

УДК 531.36

© 1995 г. В. Ф. ИВАНОВА

## РЕЛЕЙНОЕ УПРАВЛЕНИЕ УГЛОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассматривается задача о пространственной переориентации твердого тела на малых угловых скоростях ( $\ll 1 \text{ с}^{-1}$ ) при сравнительно малых внешних возмущениях. Изменение углов при развороте считается большим ( $\sim 1$  рад.). К моменту достижения требуемого углового положения вращение объекта должно быть остановлено.

Считается, что переориентация тела осуществляется с помощью релейных реактивных двигателей, создающих управляющие моменты по закону с обратной связью. В качестве функций, регулирующих переключение реле, взяты предложенные в [1] формулы для требуемых значений управляющих моментов.

Известны многочисленные законы управления с обратной связью, эффективные лишь для малых угловых отклонений ( $\ll 1$  рад.) [2—4], а также программные (без обратной связи) законы управления пространственным разворотом объекта на большие углы [5]. Особенность предложенного в [1] закона управления заключается в объединении: трехмерности движения; больших изменений углов, которые не дробятся в процессе управления на малые последовательные приращения (в закон управления закладываются лишь текущие и конечные значения параметров углового движения); обратной связи, которая должна обеспечить необходимую степень точности переориентации при наличии ограниченных возмущений, и сравнительной простоты формул, что важно для управления с обратной связью, когда надо постоянно пересчитывать управляющие функции (в частности, формулы в [5] удобны для осуществления программного разворота, но слишком громоздки для включения их в цепь обратной связи). Гипотеза о надежности и эффективности такого закона управления имеет наглядный геометрический и механический смысл [1].

В публикуемой статье эта гипотеза строго анализируется и доказывается для важного с прикладной точки зрения случая, когда на управляющие функции накладывается релейная зависимость.

Исследуется траектория углового движения в фазовом пространстве. При определенных ограничениях на исходные величины, имеющих смысл достаточных условий, затраты времени и точность прихода в заданное угловое положение гарантированно оцениваются через параметры системы управления.

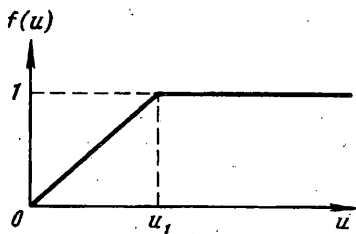
**1. Основные предположения и уравнения движения.** С объектом, который будем считать абсолютно твердым телом, жестко свяжем систему координат  $Oxuz$  с началом в центре масс тела и осями, совпадающими с главными центральными осями инерции объекта. Ориентация  $Oxuz$  относительно базовой системы координат, движение которой считается поступательным, определяется углами Крылова  $\alpha, \beta, \gamma$  [6].

Угловое движение тела описывается системой кинематических уравнений и динамических уравнений Эйлера [6]:

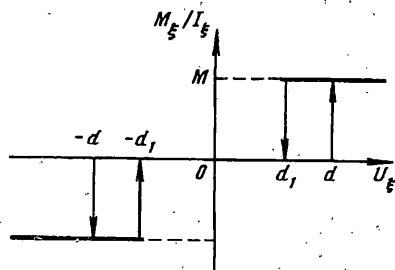
$$\dot{\alpha} = \omega_z + [\omega_y \sin \alpha - \omega_x \cos \alpha] \operatorname{tg} \beta \quad (1.1)$$

$$\beta = \omega_y \cos \alpha + \omega_x \sin \alpha, \quad \dot{\gamma} = [\omega_x \cos \alpha - \omega_y \sin \alpha] (\cos \beta)^{-1}$$

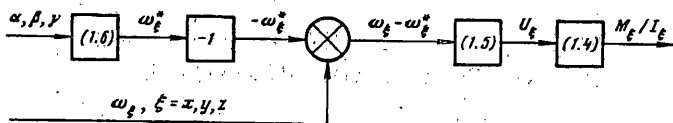
$$\dot{\omega}_\xi = \dot{I}_\xi \omega_x \omega_y \omega_z \omega_\xi^{-1} + (M_\xi + N_\xi) / I_\xi, \quad (\xi = x, y, z) \quad (1.2)$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

где  $i_x \equiv (I_y - I_z)/I_x$ ,  $i_y \equiv (I_z - I_x)/I_y$ ;  $i_z \equiv (I_x - I_y)/I_z$ ,  $t$  — время,  $\omega_x$  — проекции абсолютной угловой скорости тела на оси  $Oxuz$ ,  $I_x$  — моменты инерции тела относительно осей  $Oxuz$ ,  $M_x$  — проекции управляющего момента на оси  $Oxuz$ ,  $N_x$  — проекции остальных (возмущающих) моментов на оси  $Oxuz$ , точка — дифференцирование по  $t$ .

Запишем уравнения (1.1) в другом виде, разрешив их относительно  $\omega_x$  при условии  $\cos \beta \neq 0$ :

$$\omega_x = \dot{\gamma} \cos \beta \cos \alpha + \beta \sin \alpha \quad (1.3)$$

$$\omega_y = -\dot{\gamma} \cos \beta \sin \alpha + \beta \cos \alpha, \quad \omega_z = \dot{\gamma} \sin \beta + \dot{\alpha}$$

Введем обозначения  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  — заданные значения углов  $\alpha, \beta, \gamma$ , которые должны быть реализованы в результате переориентации;  $\Delta\alpha \equiv \alpha - \alpha_1$ ,  $\Delta\beta \equiv \beta - \beta_1$ ,  $\Delta\gamma \equiv \gamma - \gamma_1$ ,  $u \equiv (\Delta\alpha^2 + \Delta\beta^2 + \Delta\gamma^2)^{1/2}$ ,  $u_0 \equiv u(t=0)$ ,  $\delta = \{\Delta\alpha, \Delta\beta, \Delta\gamma\}$ .

Изложим логику построения алгоритма управления. Прежде всего введем текущую фазовую скорость  $\delta, \equiv \{\Delta\dot{\alpha}, \Delta\dot{\beta}, \Delta\dot{\gamma}\}$  в пространстве  $\delta$ :

$$\delta_i = -\Omega [f(u)/u] \delta \quad (1.4)$$

где  $f(u) = 1$  ( $u \geq u_1$ ),  $f(u) = u/u_1$ , ( $u \leq u_1$ ),  $\Omega, u_1$  — положительные управляющие константы. Функция  $f(u)$  изображена на фиг. 1.

Введенная требуемая скорость соответствует движению по прямой к нулю в пространстве  $\delta$  со скоростью  $\Omega f(u)$  [1]. Константа  $\Omega$  имеет смысл максимально допустимой величины требуемой фазовой скорости и вводится для ограничения модуля угловой скорости объекта.

Для вычисления компонент  $\omega_x^*, \omega_y^*, \omega_z^*$  требуемой угловой скорости, соответствующих требуемой фазовой скорости (1.4), подставим (1.4) в (1.3):

$$\omega_x^* = -\Omega [f(u)/u] (\Delta\gamma \cos \beta \cos \alpha + \Delta\beta \sin \alpha)$$

$$\omega_y^* = -\Omega [f(u)/u] (-\Delta\gamma \cos \beta \sin \alpha + \Delta\beta \cos \alpha) \quad (1.5)$$

$$\omega_z^* = -\Omega [f(u)/u] (\Delta\gamma \sin \beta + \Delta\alpha)$$

Величины  $\omega_x^*$  принимают значения, удовлетворяющие неравенствам:

$$|\omega_x^*| \leq \Omega k_x, \quad k_x = k_y \equiv 1, \quad k_z \equiv \sqrt{2} \quad (1.6)$$

Выпишем теперь релейную зависимость управляющего момента  $M_{\xi}$  от рассогласования  $\omega_{\xi} - \omega_{\xi}^*$ , графически уточненную на фиг. 2 с помощью стрелок

$$\begin{aligned} M_{\xi}/I_{\xi} &= E (d_1 \leq U_{\xi}), \quad U_{\xi} \equiv -K (\omega_{\xi} - \omega_{\xi}^*) \\ M_{\xi}/I_{\xi} &= 0 \quad (-d \leq U_{\xi} \leq d) \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$M_{\xi}/I_{\xi} = -E (U_{\xi} \leq -d_1) \quad (\xi = x, y, z)$$

где  $U_{\xi}$  — функции, управляющие переключением реле,  $E, d, d_1, K$  — положительные управляющие константы.

Тем самым в законе управления заложено стремление  $\omega_{\xi}$  и  $\omega_{\xi}^*$  и, соответственно, стремление  $\delta$  к величине (1.4).

На фиг. 3 приведена блок-схема системы управления.

Введем обозначения  $u_{\xi} \equiv |\omega_{\xi} - \omega_{\xi}^*|$  ( $\xi = x, y, z$ ),  $v \equiv \max_{\xi} u_{\xi}$ ,  $\varepsilon_1 \equiv \Omega^2 E^{-1}$ ,  $\varepsilon_2 \equiv d(\Omega K)^{-1}$ ,  $R_{\xi} \equiv i_{\xi} \omega_x \omega_y \omega_z \omega_{\xi}^{-1} + N_{\xi}/I_{\xi}$ ,  $v_0 \equiv v$  ( $t=0$ ).

Будем исследовать динамику объекта при следующих предположениях:

$$|R_{\xi}| < R = \text{const}, \quad t \geq 0 \quad (\xi = x, y, z) \quad (1.8)$$

$\varepsilon_1 \ll 1$  (например, при  $\Omega = 0,01 \text{ с}^{-1}$  и  $E = 0,01 \text{ с}^{-2}$  величина  $\varepsilon_1 = 0,01$ );  $\varepsilon_2 \ll 1$  (т. е. зона нечувствительности реле сравнительно мала);  $\varepsilon_3 \equiv RE^{-1} \ll 1$  ( $\Omega$  — характерная угловая скорость, т. е.  $|\omega_{\xi}| \sim \Omega$ , поэтому, если  $N_{\xi}/I_{\xi}$  не доминируют в  $R_{\xi}$ , то  $\varepsilon_3 \sim \varepsilon_1 \max_{\xi} i_{\xi}$ ):

$$|(\cos \beta)^{-1}| \sim 1 \quad (1.9)$$

$$v_0 < k_1 \Omega \ll 1 \text{ с}^{-1}, \quad k_1 = \text{const} \sim 1 \quad (1.10)$$

$$u_1 \geq \varepsilon_1 \quad (1.11)$$

Последнее соотношение принято на основании следующих соображений: характерное время  $t_*$  изменения  $u$  от значения  $u_1$  до значений во много раз меньших должно быть  $\sim u_1/\Omega$ ; с другой стороны, поскольку на этом же интервале времени должно произойти погашение угловой скорости,  $t_* \geq \Omega/E$ , следовательно  $u_1/\Omega \geq \Omega/E$  или  $u_1 \geq \varepsilon_1$ ; при  $u_1 \ll \varepsilon_1$  угловая скорость не успевает погаситься к моменту достижения требуемой ориентации, и возникают нежелательные колебания значения  $u$ , поэтому рассмотрение таких значений параметра  $u_1$  нецелесообразно.

2. Движение при больших угловых отклонениях. Пусть  $u_0 \sim 1$ . Рассмотрим начальный этап движения, для которого  $v \geq d/K$ . Покажем, как можно обеспечить монотонное уменьшение  $v$  до значения  $d/K$ . Момент достижения последнего назовем концом первого участка траектории.

Воспользовавшись (1.3), (1.5), (1.9), преобразуем первое уравнение (1.1) следующим образом:  $\Delta \dot{\alpha} = \omega_z^* + [\omega_y^* \sin \alpha - \omega_x^* \cos \beta] \text{tg } \beta + f_{\alpha} = -\Omega [f(u)/u] \Delta \alpha + f_{\alpha}$ ,  $f_{\alpha} \equiv (\omega_z - \omega_z^*) + [(\omega_y - \omega_y^*) \sin \alpha - (\omega_x - \omega_x^*) \cos \alpha] \text{tg } \beta$ .

Аналогично запишем два других уравнения (1.1). В результате будем иметь

$$\Delta \dot{\alpha} = -\Omega [f(u)/u] \Delta \alpha + f_{\alpha} \quad (2.1)$$

$$\Delta \dot{\beta} = -\Omega [f(u)/u] \Delta \beta + f_{\beta}, \quad \Delta \dot{\gamma} = -\Omega [f(u)/u] \Delta \gamma + f_{\gamma}$$

$$(f_{\alpha}^2 + f_{\beta}^2 + f_{\gamma}^2)^{1/2} < k_2 v, \quad k_2 = \text{const} \sim 1 \quad (2.2)$$

Умножим первое уравнение (2.1) на  $\Delta\alpha/u$ , второе — на  $\Delta\beta/u$ , третье — на  $\Delta\gamma/u$  и сложим их. Тогда на основании (2.2) получим

$$\dot{u} = -\Omega f(u) + O(1)k_2v, \quad |O(1)| < 1 \quad (2.3)$$

Согласно (1.7) на первом участке постоянно  $\max_{\xi} |M_{\xi}/I_{\xi}| = E$ . В каждый рассматриваемый момент времени  $t$  будем обозначать через  $X(t) \equiv \{\xi_i\}$  множество всех таких значений  $\xi_i$  индекса  $\xi$ , при которых  $M_{\xi}(t) \neq 0$ , а через  $\dot{a}_{\xi_i}$  — величины  $\dot{a}_{\xi}(t)$  с  $\xi \in X(t)$ .

Рассмотрим движение в области  $u \geq k_3\varepsilon_1$ ,  $k_3 = \text{const} \sim 1$ . Предположим для определенности, что

$$k_3\varepsilon_1 \geq u_1 \quad (2.4)$$

Продифференцируем формулы (1.5) и величины  $v_{\xi_i}$  при  $u \geq u_1$ . Согласно (1.2), (1.3), (1.6)–(1.9):

$$\begin{aligned} |\dot{\omega}_{\xi}^*| &\leq (\Omega/u) | -(\dot{u}/\Omega) \omega_{\xi}^* - \omega_{\xi} | + k_4\Omega(\Omega + v) < \\ &< (1 + k_2k_3) \Omega v/u + k_4\Omega(\Omega + v), \quad k_4 = \text{const} \sim 1 \quad (u \geq u_1) \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\dot{u}_{\xi_1} < - (E - R - |\dot{\omega}_{\xi_1}^*|) \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_{\xi_1} &< -E [1 - \varepsilon_3 - \varepsilon_1(1 + k_2\sqrt{2})] (u_0 - \Delta u)^{-1} (v/\Omega) - \\ &- k_4\varepsilon_1(1 + v/\Omega) \quad (u \geq u_1) \end{aligned} \quad (2.7)$$

где  $\Delta u \equiv \max |u - u_0|$  на первом участке.

Пусть  $k_3$  выбрано так, что  $k_5 \equiv 1 - \varepsilon_3 - k_4\varepsilon_1(1 + k_1) - (k_1/k_3)(1 + k_2\sqrt{2}) \sim 1$ . Тогда, согласно (2.4), (2.7),  $\dot{u}_{\xi_1} < -Ek_5 < 0$ , пока  $u \geq k_3\varepsilon_1$ , и, следовательно,  $v \leq v_0$ . Отсюда в силу (1.6), (1.10) получим соотношение  $|\omega_{\xi}| < \Omega(k_1 + k_2)$ . Поэтому, если  $u \geq k_3\varepsilon_1$  на всем первом участке, то

$$\Delta u < k_6T_1\Omega(k_1 + \sqrt{2}) < k_6k_1\Omega^2(k_1 + \sqrt{2})/(k_5E) \equiv k_7\varepsilon_1$$

$$k_6 = \text{const} \sim 1$$

$$\Delta u < k_7\varepsilon_1, \quad k_7 = \text{const} \sim 1 \quad (2.8)$$

где  $T_1$  — время движения по первому участку.

Потребуем, чтобы для значения  $u_0$  выполнялось условие

$$u_0 - k_7\varepsilon_1 \geq k_3\varepsilon_1 \quad (2.9)$$

Тогда вышесказанное сводится к следующему: при выполнении (2.4), (2.9) и  $k_5 \sim 1$  имеют место неравенства  $\dot{u}_{\xi_1} < -Ek_5 < 0$ ,  $0 \leq t \leq T_1$ .

Оценим  $T_1$ . Подставив (2.8) в (2.7), получим  $\dot{u}_{\xi_1} < g(v)$ . Функция  $g(v)$  монотонно возрастает по  $v$ , поэтому для решения  $w$  уравнения

$$\dot{w} = g(w), \quad w(t=0) = v(0) \quad (2.10)$$

имеет место неравенство  $v(t) < w(t)$  при  $0 < t \leq T_1$ . Действительно,  $\dot{w}(0) = g(v_0) > \dot{u}_{\xi_1}(0)$  при любом  $\xi_1$ , и, пока  $v < w$  на некотором интервале  $0 < t < \tau$ ,  $\dot{u}_{\xi_1} < g(v) < g(w) = \dot{w}$  для любого  $\xi_1$ , откуда и получается требуемое неравенство. Следовательно,  $v$  достигает значения  $d/K$  раньше, чем  $w$ . Время убывания  $w$  до  $d/K$  обозначим через  $T_1^*$ .

Проинтегрировав (2.10), получим

$$T_1 < T_1^* = (\Omega/E) (u_0 - k_7 \varepsilon_1) \varepsilon_1^{-1} [1 + k_2 \sqrt{2} + k_4 (u_0 - k_7 \varepsilon_1)]^{-1} \times \\ \times \ln (k_9/k_8) < (\Omega/E) (k_1 - \varepsilon_2)/k_8 \sim \Omega/E \\ k_8 \equiv 1 - \varepsilon_3 - k_4 \varepsilon_1 - \varepsilon_1 k_1 (u_0 - k_7 \varepsilon_1)^{-1} [k_4 (u_0 - k_7 \varepsilon_1) + 1 + k_2 \sqrt{2}] \\ k_9 \equiv 1 - \varepsilon_3 - k_4 \varepsilon_1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 (u_0 - k_7 \varepsilon_1)^{-1} [k_4 (u_0 - k_7 \varepsilon_1) + 1 + k_2 \sqrt{2}]$$

Перейдем к рассмотрению второго участка. Назовем его концом момент  $T_1 + T_2$  достижения значения  $u = u_1$ .

Из (2.5), (1.11) получается, что  $|\omega_\xi^*|/(E - R) \sim \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ll 1$  при  $v \leq d/K$  ( $u \geq u_1$ ), следовательно, согласно (2.6), на втором участке имеет место соотношение

$$v \leq d/K, \quad T_1 \leq t \leq T_1 + T_2 \quad (2.11)$$

На основании (2.3), (2.8), (2.11) и естественного предположения  $k_2 \varepsilon_2 < 1$  можно выписать неравенства

$$-\Omega (1 + k_2 \varepsilon_2) < \dot{u} < -\Omega (1 - k_2 \varepsilon_2) < 0, \quad T_1 \leq t \leq T_1 + T_2 \quad (2.12)$$

$$(u_0 - k_7 \varepsilon_1 - u_1) \Omega^{-1} (1 + k_2 \varepsilon_2)^{-1} \leq T_2 \leq (u_0 + k_7 \varepsilon_1 - u_1) \Omega^{-1} (1 - k_2 \varepsilon_2)^{-1}$$

$$T_2 \sim \Omega^{-1} \gg T_1$$

**3. Движение при малых угловых отклонениях.** Произведем замену переменных  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\beta$ ,  $\Delta\gamma$  на  $p_\xi$  ( $\xi = x, y, z$ ):

$$p_x = \Delta\gamma \cos \beta \cos \alpha + \Delta\beta \sin \alpha \quad (3.1)$$

$$p_y = -\Delta\gamma \cos \beta \sin \alpha + \Delta\beta \cos \alpha, \quad p_z = \Delta\gamma \sin \beta + \Delta\alpha$$

$$|p_\xi| \leq k_\xi u \quad (3.2)$$

В силу (1.9) преобразование (3.1) является невырожденным, и

$$u < k_{10} \max_\xi |p_\xi|, \quad k_{10} = \text{const} \sim 1 \quad (3.3)$$

Согласно (1.5) формулы (3.1) можно переписать в виде

$$\omega_\xi^* = -\Omega [f(u)/u] p_\xi \quad (3.4)$$

Из (1.5)–(1.7), (2.11), (2.12) следует, что в конце второго участка  $|\omega_\xi^*| < \Omega k_\xi + d/K$ ,  $u = u_1$ ,  $\dot{u} < 0$ .

Для исследования третьего участка выделим два возможных случая:

$$(1) u \leq u_1, \quad t \geq T_1 + T_2 \quad (3.5)$$

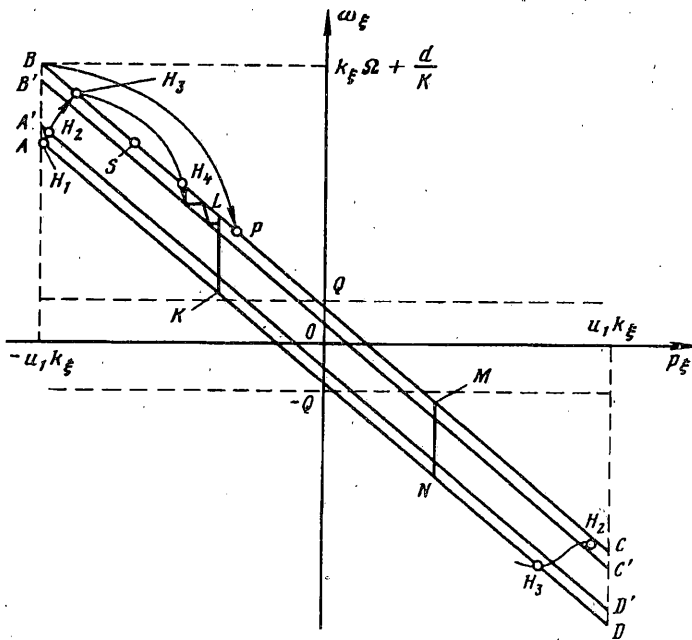
(2) неравенство  $u \leq u_1$  может нарушаться при  $t \geq T_1 + T_2$ .

Разберем сначала случай (1). Будем пока рассматривать движение до момента нарушения условия

$$\omega \leq \omega(T_1 + T_2), \quad \omega \equiv \max_\xi |\omega_\xi| \quad (3.6)$$

Воспользовавшись (1.3), запишем уравнения (1.1) в виде

$$\dot{p}_\xi = \omega_\xi + Q_\xi \quad (3.7)$$



Фиг. 4

Из (1.1), (1.9), (3.5), (3.6) и  $u_1 \sim \varepsilon_1$  (см. (2.4), (1.11)) следует

$$|Q_\xi| < k_{11} u \omega, \quad k_{11} = \text{const} \sim 1$$

$$|Q_\xi| < Q \equiv k_{12} u_1 \Omega \sim \varepsilon_1 \Omega \ll \Omega, \quad k_{12} = \text{const} \sim 1 \quad (3.8)$$

Зафиксируем некоторое значение индекса  $\xi$ . Рассмотрим подсистему системы (3.7), (1.2) из двух уравнений

$$\dot{p}_\xi = \omega_\xi + Q_\xi, \quad \dot{\omega}_\xi = M_\xi / I_\xi + R_\xi \quad (3.9)$$

Будем использовать при этом фазовую плоскость переменных  $p_\xi, \omega_\xi$ .

В силу (1.7), (3.4), (3.5) наклонные прямые  $(\Omega/u_1) p_\xi + \omega_\xi = \pm d/K, \pm d_1/K$ , обозначенные на фиг. 4 через  $AD, BC, A'D', B'C'$ , являются линиями переключения управления при  $t \geq T_1 + T_2$ . Следовательно, согласно (2.11), (3.2), точка  $(p_\xi, \omega_\xi)$  в момент  $T_1 + T_2$  находится в параллелограмме  $ABCD$ .

Пользуясь центральной симметрией, будем рассматривать движение в основном в верхней координатной полуплоскости.

Из точки  $B$  на фиг. 4 выпущена парабола  $BP$ , являющаяся решением вспомогательной системы

$$\dot{p}_\xi = \omega_\xi + Q, \quad \dot{\omega}_\xi = -E + R \quad (3.10)$$

Согласно (1.8), (3.8) траектория (3.9), вышедшая из  $ABCD$  через  $BC$ , будет оставаться в области между  $BC$  и  $BP$  до пересечения с  $BC$ .

В целях сокращения времени затухания величин  $p_\xi, \omega_\xi$  исключим возможность закручивания траектории вокруг начала координат при любом значении  $\xi$ . Потребуем, чтобы точка  $P$  пересечения  $BP$  и  $BC$  при  $k_\xi = \max k_\xi = \sqrt{2}$  имела неположительную абсциссу, как изображено на фиг. 4. Это требование равносильно неравенству

$$u_1 \geq u^* \equiv E (E - R)^{-1} (\varepsilon_1 / \sqrt{2}) (1 + \varepsilon_2 \sqrt{2}) [1 - \varepsilon_1 k_{12} (1 - \varepsilon_3)^{-1}]^{-1} \approx \varepsilon_1 / \sqrt{2} \quad (3.11)$$

Соотношение (3.11) обеспечивает выполнение неравенства (3.6), а вместе с ним и неравенства (3.8), при  $t \geq T_1 + T_2$ .

На прямой  $BC$  есть точка  $S$  с координатами  $(-p_s, \omega_s)$  такая, что  $BC$  является касательной к параболе—решению (3.10), выпущенной из  $S$ . Следовательно, возможно наличие следующих четырех частей траектории (3.9) при  $t \geq T_1 + T_2$  (см. фиг. 4):  $H_1H_2$  с  $M_\xi/I_\xi = E$  между прямыми  $AD, A'D'$ ;  $H_2H_3$  с  $M_\xi/I_\xi = 0$  между прямыми  $AD, BC$ ;  $H_3H_4$  в области выше  $BC$ ; движение с переключениями между прямыми  $B'C'$  и  $BC$ .

Рассмотрим параллелограмм  $KLMN$ , изображенный на фиг. 4, с вершинами на прямых  $BC$  и  $AD$ . Абсциссы вершины равны  $\pm p^0$ , где  $p^0 = (u_1/\Omega) [2R(u_1/\Omega) + (2d + d_1)/K + Q] \sim \varepsilon_1 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \ll p_s \sim \varepsilon_1$ . Обозначим через  $\omega^0$  ординату точки  $L$ .

Траектория (3.9), попав в  $KLMN$ , не сможет выйти из него. Действительно, через наклонные стороны она не может выйти, так как точка  $L$  находится ниже  $S$  ( $p^0 \ll p_s$ ), а через  $[KL]$  и  $[MN]$  — потому что  $\omega^0 - 2d/K > Q$ , в силу чего  $\dot{p}_\xi > 0$  на  $[KL]$  и  $\dot{p}_\xi < 0$  на  $[MN]$ .

Назовем концом третьего участка траектории момент  $T_1 + T_2 + T_3$ , начиная с которого траектория (3.9) на плоскости  $p_\xi, \omega_\xi$  при любом  $\xi$  содержится в  $KLMN$ .

Обозначим  $p_i, \omega_i$  — координаты  $p_\xi, \omega_\xi$  в момент  $T_1 + T_2$ ,  $p_i, \omega_i$  — координаты точки  $H_i$  ( $i = 2, 3, 4$ ),  $T_{3i}$  — время движения по  $i$ -ой части траектории (3.9) ( $i = 1-4$ ).

С помощью мажорирования сверху и снизу первых частей решениями системы (3.10), а также решениями систем  $\dot{p}_\xi = \omega_\xi - Q, \dot{\omega}_\xi = -E - R$  и  $\dot{p}_\xi = \omega_\xi - Q, \dot{\omega}_\xi = \pm R$  можно получить оценки  $T_{31} < T_{31}^* \equiv (d - d_1) K^{-1} (E - R)^{-1}, T_{32} < T_{32}^*(\omega_1), T_{33} < T_{33}^*(\omega_1), \omega_4 < \omega_4^*(\omega_1)$ , где правые части — определенные выражения, зависящие от параметров управления  $E, \Omega, d, d_1, K, u_1$ , а также от  $R$  и  $\omega_1$ .

Величину  $T_{34}$  можно оценить через время воображаемого движения по прямой  $B'C'$ :

$$T_{34} = \int_{p_4}^{p^0} (\dot{p}_\xi)^{-1} dp_\xi < \int_{p_4}^{p^0} (\omega_\xi - Q)^{-1} dp_\xi < \int_{p_4}^{p^0} [-(\Omega/u_1) p_\xi + d/K - Q]^{-1} dp_\xi < T_{34}^*(\omega_1) \equiv (u_1/\Omega) \ln \{1/2 [\omega_4^*(\omega_1) - Q - (d - d_1)/K] [Ru_1/\Omega + (d + d_1)/K]^{-1}\}$$

Исследование функции  $\Phi(\omega_1) \equiv T_{31}^* + T_{32}^*(\omega_1) + T_{33}^*(\omega_1) + T_{34}^*(\omega_1)$  на экстремум на отрезке  $\omega^0 - 2d/K \leq \omega_1 \leq \Omega \sqrt{2} + d/K$  дало следующий результат: пусть выполняются условия

$$A_1 \equiv (d + d_1) \Omega / (KRu_1) \leq 1/2, \quad A_2 \equiv \ln \{(E - R) u_1 (4R)^{-1} \times$$

$$\times [(d + d_1)/K + Ru_1/\Omega]^{-1}\} \geq 1$$

$$(A_1 \sim \varepsilon_2/\varepsilon_3, \quad A_2 \sim \ln(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)^{-1})$$

тогда  $\max \Phi(\omega_1)$  достигается при  $\omega_1 = \omega_{1m} = (1/2) (u_1/\Omega) (3E + 5R) + Q + 2d_1/K$ . Следовательно

$$T_3 < \Phi(\omega_{1m}) = (d - d_1) K^{-1} (E - R)^{-1} + (u_1/\Omega) (d + d_1) K^{-1} [\omega_s - (3d + d_1)/K - Ru_1/\Omega - Q]^{-1} + 4(E - R)^{-1} [(u_1/\Omega) (E + R) + Q + (d + d_1)/K] - 3(u_1/\Omega) + (u_1/\Omega) \ln \{u_1 (E - R) (4\Omega)^{-1} [(d + d_1)/K + Ru_1/\Omega]^{-1}\} \quad (3.12)$$

$$\Phi(\omega_{1m}) \sim (\Omega/E) \ln(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)^{-1}$$

Рассмотрим теперь случай (2): поскольку при  $u_1 = u^*$  (см. (3.11))  $v \sim \Omega$  (расстояние по вертикали между  $BP$  и  $BC$  порядка  $\Omega$ ), то условие (3.5) может нарушаться (см. (2.3)). В силу (3.4) при  $u > u_1$  линии переключения управления на плоскостях  $Op_\xi\omega_\xi$  ( $\xi = x, y, z$ ) сдвигаются, становясь более пологими при увеличении  $u$ . Однако анализ изменения во времени величин  $p_\xi$ , связанных при  $t = T_1 + T_2$  условием  $u = u_1$  через формулы (3.1), показывает, что при выполнении (3.11) оценка (3.12) для  $T_3$  остается справедливой и для тех траекторий, на которых (3.5) нарушается.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борзов В. И. Об одном способе управления движением летательного аппарата вокруг центра масс//Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 2. С. 49—53.
2. Бортовые системы управления полетом/Под ред. Байбородина Ю. В. М.: Транспорт, 1975. 336 с.
3. Гаушус Э. В., Смольянинов Н. Д. Исследование релейной системы стабилизации летательного аппарата//Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 2. С. 5—13.
4. Худов В. Ф. Об устойчивости одного класса систем с тремя релейными функциями//Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 4. С. 23—29.
5. Бранец В. Н., Черток М. Б., Казначеев Ю. В. Оптимальный разворот твердого тела с одной осью симметрии//Космические исследования. Том 22. Вып. 3. С. 352—360.
6. Парусников Н. А., Морозов В. М., Борзов В. И. Задача коррекции в инерциальной навигации. М.: Изд-во МГУ, 1982. 176 с.

Москва

Поступила в редакцию  
10.VI.1993