

УДК 539.214:539.374

© 1995 г. М. А. АРТЕМОВ, Д. Д. ИВЛЕВ

О СТАТИЧЕСКИХ И КИНЕМАТИЧЕСКИХ СООТВЕТСТВИЯХ В ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ КУСОЧНОЛИНЕЙНЫХ УСЛОВИЯХ ТЕКУЧЕСТИ

Известно [1, 2], что условия пластичности максимального касательного и максимального приведенного напряжения при определении предела текучести на чистый сдвиг ограничивают положение всех возможных условий пластичности для изотропного идеальнопластического материала. На фиг. 1 показано взаимное расположение в девиаторной плоскости шестиугольников, соответствующих условию пластичности максимального касательного напряжения — $ABCDEF$ и максимального приведенного напряжения — $abcdef$.

Известно также [1], что диссипативная функция для условия максимального касательного напряжения

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} |\sigma_i - \sigma_j| = k, \quad k = \text{const} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

где σ_i — главные напряжения, имеет вид

$$D = 2k |\dot{\epsilon}_i|_{\max}$$

где $\dot{\epsilon}_i$ — главная компонента скорости деформации.

Диссипативная функция для условия максимального приведенного напряжения

$$\sigma'_{i\max} = |\sigma_i - \sigma| = k, \quad \sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$$

где σ'_i — главная компонента девиатора напряжений, σ — среднее давление, имеет вид

$$D = 2k |\gamma_k|_{\max}, \quad \gamma_k = \frac{1}{2} (\dot{\epsilon}_i - \dot{\epsilon}_j)$$

На фиг. 2 в девиаторной плоскости изображены соответственно равные уровни диссипативных функций D . Условию для τ_{\max} соответствует шестиугольник $ABCDEF$ на фиг. 2, условию для $\sigma'_{i\max}$ — шестиугольник $abcdef$.

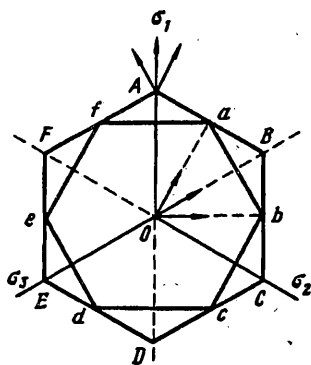
Таким образом, условию пластичности максимального касательного напряжения соответствует диссипативная функция, определяемая величиной максимальной приведенной скорости деформации. Согласно ассоциированному закону течения в обоих случаях имеет место несжимаемость материала $\epsilon = \frac{1}{3}\epsilon_{ii} = 0$.

Условию пластичности максимального приведенного напряжения соответствует диссипативная функция, определяемая величиной максимальной скорости сдвига. Причем ребру шестиугольника A (фиг. 1) соответствует грань AB на фиг. 2 и так далее. Грани ab на фиг. 1 соответствует ребро b на фиг. 2 и так далее.

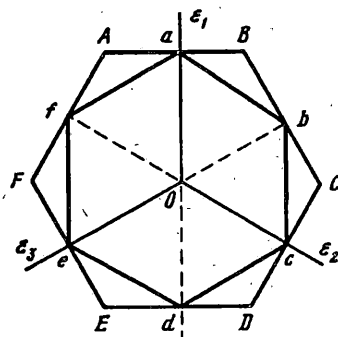
Ниже устанавливаются статические и кинематические двойственные соответствия между ребрами и гранями условий пластичности максимального касательного и приведенного напряжений.

1. Рассмотрим условие пластичности [3]:

$$|\sigma_i - \sigma_j| = a_1 \sigma + k_1, \quad a_1, k_1 = \text{const} \quad (1.1)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Условие максимального касательного напряжения Треска имеет место из (1.1) при $a_1 = 0$.

Рассмотрим также условие пластичности

$$|\sigma_1 + \sigma_2| = a_2 \sigma + k_2, \quad a_2, k_2 - \text{const} \quad (1.2)$$

В дальнейшем, избавляясь от обозначения модуля, будем предполагать, что постоянные a_i, k_i могут иметь одновременно либо положительные, либо отрицательные значения.

Из (1.2) следует

$$\sigma_1' = (2 - a_2) \sigma + k_2 \quad (1.3)$$

При $a_2 = 2$ соотношение (1.3) переходит в условие текучести максимального приведенного напряжения (1):

$$\sigma_k' = k_2 \quad (1.4)$$

В девятиаторной плоскости $\sigma = 1/3 \sigma_{ii} = 0$ условия пластичности (1.1), (1.2) будут изображаться шестиугольниками, показанными на фиг. 1.

Соотношения связи между компонентами напряжений σ_{ij} в декартовой системе координат xyz и главными напряжениями σ_i запишем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 m_1^2 + \sigma_3 n_1^2 \\ \tau_{xy} &= \sigma_1 l_1 l_2 + \sigma_2 m_1 m_2 + \sigma_3 n_1 n_2 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} xyz \\ 123 \\ lmn \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

где $\sigma_x, \tau_{xy}, \dots$ — нормальные и касательные напряжения, l_i, m_i, n_i — направляющие косинусы, обозначения $(xyz), (123), (lmn)$ определяют круговую перестановку индексов и косинусов.

Имеет место

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \quad l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \quad (123) (lmn) \quad (1.6)$$

Если два главных напряжения равны между собой, например

$$\sigma_1 = \sigma_2 \quad (1.7)$$

то из (1.7), (1.5), (1.6) получим

$$\sigma_x = \sigma_1 + (\sigma_3 - \sigma_1) n_1^2, \quad \tau_{xy} = (\sigma_3 - \sigma_1) n_1 n_2 \quad (xyz) (123) \quad (1.8)$$

Из (1.8), (1.6) следует [1]:

$$(\sigma_x - \sigma_1) (\sigma_y - \sigma_1) - \tau_{xy}^2 = 0 \quad (\sigma_x - \sigma_1) \tau_{yz} - \tau_{xy} \tau_{xz} = 0 \quad (xyz) \quad (1.9)$$

В случае (1.1) для ребра E (фиг. 1), определяемого уравнениями

$$\sigma_3 - \sigma_1 = a_1\sigma + k_1, \quad \sigma_3 - \sigma_2 = a_1\sigma + k_1 \quad (1.10)$$

будем иметь

$$\sigma_1 = \sigma_2, \quad \sigma_1 = \sigma(1 - a_1/3) - k_1/3, \quad \sigma_3 - \sigma_1 = a_1\sigma + k_1 \quad (1.11)$$

Из (1.8), (1.9), (1.11) получим

$$\sigma_x = \sigma(1 - a_1/3) - k_1/3 + (a_1\sigma + k_1)n_1^2, \quad \tau_{xy} = (a_1\sigma + k_1)n_1n_2 \quad (1.12)$$

$$P_x = [\sigma_y - \sigma(1 - a_1/3) + k_1/3][\sigma_z - \sigma(1 - a_1/3) + k_1/3] - \tau_{yz}^2 = 0 \quad (1.13)$$

$$Q_x = [\sigma_x - \sigma(1 - a_1/3) - k_1/3]\tau_{yz} - \tau_{xy}\tau_{xz} = 0 \quad (xyz) \quad (1.14)$$

Соотношения (1.13), (1.14) могут быть использованы в качестве обобщенного пластического потенциала

$$\varepsilon_{ij} = \lambda_1 \frac{\partial P_x}{\partial \sigma_{ij}} + \lambda_2 \frac{\partial P_y}{\partial \sigma_{ij}} + \lambda_3 \frac{\partial P_z}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \lambda_i \geq 0 \quad (1.15)$$

или

$$\varepsilon_{ij} = \lambda_1 \frac{\partial Q_x}{\partial \sigma_{ij}} + \lambda_2 \frac{\partial Q_y}{\partial \sigma_{ij}} + \lambda_3 \frac{\partial Q_z}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \lambda_i \geq 0 \quad (1.16)$$

Определим диссипативную функцию для ребра, определяемого уравнениями (1.10). Используя (1.10) в качестве обобщенного пластического потенциала, получим

$$\varepsilon_1 = -\lambda_1(1 + a_1/3) - \lambda_2 a_1/3, \quad \varepsilon_2 = -\lambda_1 a_1/3 - \lambda_2(1 + a_1/3) \\ \varepsilon_3 = (\lambda_1 + \lambda_2)(1 - a_1/3) \quad (1.17)$$

Согласно (1.17), (1.10) диссипативная функция примет вид

$$D = \sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3 = k_1(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{k_1 \varepsilon_3}{1 - a_1/3} \quad (1.18)$$

Из (1.17) следует

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = -a_1(\lambda_1 + \lambda_2) = -\frac{a_1 \varepsilon_3}{1 - a_1/3} \quad (1.19)$$

При определении связи $\sigma_{ij} - \varepsilon_{ij}$ через диссипативную функцию [4], потенциал напряжений согласно (1.18), (1.19) следует принять в виде

$$D = \frac{k_1 \varepsilon_3}{1 - a_1/3} + \mu \left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \frac{a_1 \varepsilon_3}{1 - a_1/3} \right), \quad \mu \geq 0 \quad (1.20)$$

Согласно (1.18), (1.19) при $a_1 \neq 0$ в качестве потенциала напряжений может быть использовано выражение

$$D = \frac{k_1(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)}{a_1} + \mu \left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \frac{a_1 \varepsilon_3}{1 - a_1/3} \right), \quad \mu \geq 0 \quad (1.21)$$

2. Соотношения связи между компонентами скорости деформаций в декартовой системе координат и главными скоростями деформации имеют вид, вполне аналогичный (1.5):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_1 l_1^2 + \varepsilon_2 m_1^2 + \varepsilon_3 n_1^2 \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_1 l_1 l_2 + \varepsilon_2 m_1 m_2 + \varepsilon_3 n_1 n_2 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} xyz \\ 123 \\ lmn \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Совпадение направляющих косинусов в (1.5), (2.1) имеет место для изотропного материала.

Если две главные компоненты скорости деформации равны между собой, например,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad (2.2)$$

то из (2.2), (2.1), (1.6) получим аналогично (1.8), (1.9):

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1) n_1^2, \quad \varepsilon_{xy} = (\varepsilon_3 - \varepsilon_1) n_1 n_2 \quad (2.3)$$

$$(\varepsilon_x - \varepsilon_1)(\varepsilon_y - \varepsilon_1) - \tau_{xy}^2 = 0, \quad (\varepsilon_x - \varepsilon_1)\tau_{yz} - \tau_{xy}\tau_{xz} = 0 \quad (xyz) \quad (2.4)$$

В случае (1.2), (1.3) для грани *ab* (фиг. 1):

$$\sigma_1 + \sigma_2 = a_2 \sigma + k_2 \quad (2.5)$$

согласно ассоциированному закону пластического течения, получим

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \lambda(1 - a_2/3), \quad \varepsilon_3 = -\lambda a_2/3, \quad \lambda \geq 0 \quad (2.6)$$

Из (2.6) следует

$$\lambda = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)/(2 - a_2) \quad (2.7)$$

Из (2.6), (2.7) найдем

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon(3 - a_2)}{2 - a_2}, \quad \varepsilon_3 - \varepsilon_1 = \frac{3\varepsilon}{2 - a_2}, \quad \varepsilon = \frac{1}{3} \varepsilon_{ii} \quad (2.8)$$

Согласно (2.8), соотношения (2.3), (2.4) примут вид

$$\varepsilon_x = \frac{3\varepsilon}{2 - a_2} \left(1 - \frac{a_2}{3} - n_1^2\right), \quad \varepsilon_{xy} = \frac{3\varepsilon}{2 - a_2} n_1 n_2 \quad (2.9)$$

$$M_x = \left[\varepsilon_y - \frac{\varepsilon(3 - a_2)}{2 - a_2} \right] \left[\varepsilon_x - \frac{\varepsilon(3 - a_2)}{2 - a_2} \right] - \varepsilon_{yz}^2 = 0 \quad (2.10)$$

$$N_x = \left[\varepsilon_x - \frac{\varepsilon(3 - a_2)}{2 - a_2} \right] \varepsilon_{yz} - \varepsilon_{xy}\varepsilon_{xz} = 0 \quad (xyz) \quad (123) \quad (2.11)$$

Три соотношения (2.10) или (2.11) являются замкнутыми относительно трех компонент скоростей перемещения *u*, *v*, *w*. Следовательно, задача определения предельного состояния, соответствующая грани условия пластичности (1.2), (1.3), является кинематически определенной.

Определим диссипативную функцию, соответствующую грани (2.5). Согласно (2.5), (2.6), (2.7), получим

$$D = \sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3 = \lambda k_2 = \frac{k_2(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)}{2 - a_2} \quad (2.12)$$

Соотношения (2.12), (2.10), (2.11) могут быть использованы в качестве потенциала напряжений

$$\sigma_{ij} = \frac{k_2 \delta_{ij}}{2 - a_2} + \mu_2 \frac{\partial M_x}{\partial \varepsilon_{ij}} + \mu_2 \frac{\partial M_y}{\partial \varepsilon_{ij}} + \mu_3 \frac{\partial M_z}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \mu_i \geq 0 \quad (2.13)$$

или

$$\sigma_{ij} = \frac{k_2 \delta_{ij}}{2 - a_2} + \mu_1 \frac{\partial N_x}{\partial \varepsilon_{ij}} + \mu_2 \frac{\partial N_y}{\partial \varepsilon_{ij}} + \mu_3 \frac{\partial N_z}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \mu_i \geq 0 \quad (2.14)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Соотношения (2.8)—(2.14) имеют место при $a_2 \neq 2$. При $a_2 = 2$ имеет место условие максимального приведенного напряжения (1.4). Используя выражение (1.4) в качестве пластического потенциала в виде

$$\sigma_3 - \sigma = k_2 \quad (2.15)$$

получим согласно ассоциированному закону течения

$$\varepsilon_1 = -\lambda/3, \quad \varepsilon_2 = -\lambda/3, \quad \varepsilon_3 = 2\lambda/3, \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0, \quad \lambda \geq 0 \quad (2.16)$$

откуда

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\varepsilon_3/2, \quad \varepsilon_3 - \varepsilon_1 = -3\varepsilon_1 \quad (2.17)$$

Согласно (2.17), второй и третий инварианты тензора скоростей деформаций J_2, J_3 будут иметь вид

$$J_2 = 3\varepsilon_1^2 = \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{xz}^2 - \varepsilon_x \varepsilon_y - \varepsilon_y \varepsilon_z - \varepsilon_x \varepsilon_z \quad (2.18)$$

$$J_3 = -2\varepsilon_1^3 = \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + 2\varepsilon_{xy} \varepsilon_{yz} \varepsilon_{xz} - \varepsilon_x \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_y \varepsilon_{xz}^2 - \varepsilon_z \varepsilon_{xy}^2$$

Из (2.18) следует

$$S = (J_2/3)^{1/2} - |J_3/2|^{1/3} = 0 \quad (2.19)$$

Диссипативная функция для грани (2.15) условия максимального приведенного напряжения, согласно (2.16), (2.15), примет вид

$$D = \sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3 = \lambda k_2 = k_2 (\varepsilon_3 - \varepsilon_1) \quad (2.20)$$

В качестве потенциала напряжений, согласно (2.20), (2.16), (2.19), следует использовать выражение

$$D = k_2 (\varepsilon_3 - \varepsilon_1) + \mu_1 (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + \mu_2 S, \quad \mu_i \geq 0 \quad (2.21)$$

Отметим также, что для условия текучести максимального приведенного напряжения (1.4) величина ε_1 в выражениях (2.17), (2.3), (2.4) может быть определена из (2.18).

Если одно из главных напряжений определено

$$\sigma_i = f(\sigma_{mn}) \quad (2.22)$$

другими словами, корень характеристического уравнения известен и равен $f(\sigma_{mn})$, то третий инвариант тензора

$$\sigma_{ij} - \delta_{ij} f(\sigma_{mn}) \quad (2.23)$$

равен нулю.

Соотношение (2.5) можно переписать в виде

$$\sigma_3 = (3 - a_2) \sigma - k_2 \quad (2.24)$$

Следовательно, условие пластичности (2.24) может быть переписано в виде

$$(\sigma_x - \sigma_3)(\sigma_y - \sigma_3)(\sigma_z - \sigma_3) + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} - (\sigma_x - \sigma_3)\tau_{yz}^2 - (\sigma_y - \sigma_3)\tau_{xz}^2 - (\sigma_z - \sigma_3)\tau_{xy}^2 = 0 \quad (2.25)$$

где σ_3 определяется согласно (2.24).

3. Для грани условия пластичности Треска

$$\sigma_1 - \sigma_2 = k_1 \quad (3.1)$$

согласно ассоциированному закону пластического течения, получим

$$\varepsilon_1 = \lambda, \quad \varepsilon_2 = -\lambda_2, \quad \varepsilon_3 = 0, \quad \lambda \geq 0 \quad (3.2)$$

Из (3.2) следует

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0, \quad J_2 = \varepsilon_1^2, \quad J_3 = 0 \quad (3.3)$$

В качестве пластического потенциала следует использовать выражение

$$D = k\varepsilon_1 + \mu (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \mu_2 J_3, \quad \mu_1 \geq 0 \quad (3.4)$$

Для ребра условия пластичности максимального приведенного напряжения α (фиг. 1), образованного пересечением граней

$$\sigma_1 = \sigma + k_2, \quad \sigma_3 = \sigma - k_2 \quad (3.5)$$

Согласно (2.22), (2.23), два условия пластичности (3.5) в компонентах декартовой системы координат будут иметь вид

$$\begin{aligned} &(\sigma_x - \sigma \pm k_2) (\sigma_y - \sigma \pm k_2) (\sigma_z - \sigma \pm k_2) + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} - \\ & - (\sigma_x - \sigma \pm k_2) \tau_{yz}^2 - (\sigma_y - \sigma \pm k_2) \tau_{xz}^2 - (\sigma_z - \sigma \pm k_2) \tau_{xy}^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Два соотношения (3.6) могут быть использованы в качестве пластического потенциала. В качестве потенциала напряжений следует использовать функцию

$$D = k_2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) + \mu (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z), \quad \mu \geq 0 \quad (3.7)$$

4. Рассмотрим предельное состояние отрыва [1]. Под условием сопротивления отрыву понимается условие предельного состояния

$$\sigma_{\text{imax}} \leq c, \quad c - \text{const} > 0 \quad (4.1)$$

где σ_{imax} — максимальное нормальное растягивающее напряжение.

Предположим, что предельное состояние отрыву достигнуто на грани

$$\sigma_1 = c \quad (4.2)$$

Тогда согласно (2.22), (2.23) условие предельного состояния может быть записано в виде

$$\begin{aligned} &(\sigma_x - c) (\sigma_y - c) (\sigma_z - c) + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} - \\ & - (\sigma_x - c) \tau_{yz}^2 - (\sigma_y - c) \tau_{xz}^2 - (\sigma_z - c) \tau_{xy}^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Предположим, что прямоугольный брус с образующей вдоль оси растягивается напряжением $\sigma_z = p < c$. На фиг. 3 показано сечение бруса в плоскости xy .

Пусть, далее, $\sigma_x = q < c$, $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$, тогда условие (4.3) примет вид

$$c\tau_{xz}^2 + (c - q) \tau_{yz}^2 = c(c - p)(c - q) \quad (4.4)$$

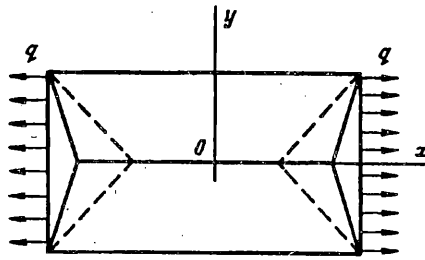
Предельное значение отрыва может быть достигнуто за счет удовлетворения условия (4.4), т. е. за счет скручивания бруса.

Условие (4.4) может быть интерпретировано как предельное условие при кручении стержня из анизотропного материала. Положим

$$\tau_{xz} = k(\theta) \cos \theta, \quad \tau_{yz} = k(\theta) \sin \theta \quad (4.5)$$

Из (4.5), (4.4) найдем

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2(\theta), \quad k(\theta) = \left(\frac{c(c-p)(c-q)}{c \cos^2 \theta + (c-q) \sin^2 \theta} \right)^{1/2} \quad (4.6)$$



Фиг. 3

Теория кручения стержней из анизотропного материала в общем случае зависимости $k(\theta)$ развита в [5].

На рис. 3 качественно показано положение линий разрыва при $p = q = c/2$. При $q = 0$ эффекты «анизотропии» места не имеют, положение линий разрыва показано в этом случае на фиг. 3 пунктиром. При фиксированном q положение линий разрыва неизменно, с изменением p меняется величина предела сопротивления кручению.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 013-16520).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
2. Ишлинский А. Ю. Гипотеза прочности формоизменения // Уч. зап. МГУ. 1940. Вып. 46. С. 117—124.
3. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. М.: Наука, 1960. 274 с.
4. Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 232 с.
5. Быковцев Г. И. О кручении призматических стержней из анизотропного идеально-пластического материала. Изв. АН СССР. ОТН Механика и машиностроение. № 3. 1961. С. 151—157.

Воронеж, Чебоксары

Поступила в редакцию
19.IV.1994