

УДК 539.376

© 1995 г. М. Я. БРОВМАН

О ЛИНИЯХ ТОКА ПРИ ДЕФОРМАЦИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Рассмотрен вопрос о том, какие геометрические линии могут являться линиями тока при деформации установившейся ползучести. Для жесткопластической среды без упрочнения анализ возможных линий тока проведен в [1, 2].

Ниже рассмотрены условия, при которых данное семейство линий может быть линиями тока при деформации ползучести без упрочнения, когда компоненты тензора напряжений зависят только от компонент тензора скорости деформации и эта зависимость характеризуется степенной функцией.

1. Пусть при плоской деформации выбраны два семейства ортогональных кривых $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$, определенные как функции декартовых координат x, y . Многие задачи решают обратным методом, задаваясь формой линий тока и проверяя затем удовлетворяются ли при этом уравнения равновесия. Иногда форма линий тока известна из условий симметрии.

Примем, что α линии ($\beta(x, y) = \text{const}$) являются линиями тока и поэтому только одна компонента вектора скорости не равна нулю. Из условия несжимаемости получаем

$$v_\alpha = f(\beta) H_2^{-1} \quad (1.1)$$

где H_1, H_2 — коэффициенты первой квадратичной формы, $f(\beta)$ — функция координаты β .

Примем, что компоненты девиатора деформации определены соотношениями [3]:

$$\sigma_\alpha - \sigma_\beta = 2C\varepsilon_\alpha H^{n-1}, \quad \tau_{\alpha\beta} = 0,5C\gamma_{\alpha\beta} H^{n-1}, \quad T = CH^n \quad (1.2)$$

$$T = [(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_{\alpha\beta}^2]^{0,5}, \quad H = (4\varepsilon_\alpha^2 + \gamma_{\alpha\beta}^2)^{0,5}$$

где T, H — инварианты тензоров напряжения и скорости деформации, $\varepsilon_\alpha, \gamma_{\alpha\beta}$ — компоненты тензора скорости деформации; C, n — постоянные, характеризующие свойства деформируемой среды (при постоянной температуре и отсутствии упрочнения).

Подставив в (1.2) величины $\varepsilon_\alpha, \gamma_{\alpha\beta}$ с применением (1.1), получим

$$\tau_{\alpha\beta} = 0,5C [f(\beta)]^n H_2^{-2n} (f_1 - F_1) D^{0,5(n-1)}, \quad \sigma_\alpha - \sigma_\beta = -C [f(\beta)]^n H_2^{-2n} F_2 D^{0,5(n-1)}, \quad (1.3)$$

$$f_1(\beta) = \frac{d}{d\beta} |\ln f(\beta)|, \quad F_1 = \frac{\partial}{\partial\beta} |\ln(H_1 H_2)|, \quad F_2 = \frac{2}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial\alpha}$$

$$D = [f_1(\beta) - F_1]^2 + F_2^2, \quad H = f(\beta) H_2^{-2} D^{0,5}$$

Подставляя $\tau_{\alpha\beta}$ и $(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)$ в уравнения равновесия, получаем дифференциальное уравнение третьего порядка для функции $f(\beta)$:

$$\frac{d^3 f(\beta)}{d\beta^3} + \Phi_1 \left[\frac{d^2 f(\beta)}{d\beta^2} \right]^2 + \Phi_2 \frac{d^2 f(\beta)}{d\beta^2} + \Phi_3 = 0 \quad (1.4)$$

$$\Phi_1 = (n - 1) (f_1 - F_1) [f(\beta)]^{-1} [n (f_1 - F_1)^2 + 3F_2^2] [n (f_1 - F_1)^2 + F_2^2]^{-1} \quad (1.5)$$

Коэффициенты Φ_2 и Φ_3 также являются алгебраическими функциями $f(\beta)$, $f_1(\beta)$, величин H_1 , H_2 и их производных.

Для жестко пластической среды $T = \text{const}$ и (1.4), (1.5) совпадают с формулами из [1]. Если $n = 1$, то для линейно вязкой среды $\Phi_1 = 0$ и уравнение (1.4) является линейным. Течение вязкой жидкости изучено достаточно полно, см. например, [4]. Значительные трудности возникают при анализе течения нелинейных сплошных сред, когда решения находят обычно обратным методом.

В некоторых случаях уравнение (1.4) удобно использовать для проверки возможных точных решений. Пусть, например, $\tau_{\alpha\beta} = 0$, что возможно при $f_1(\beta) = F_1$ и

$$\frac{\partial F_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} (\ln H_1 H_2) = 0 \quad (1.6)$$

Уравнение (1.6) выполняется, если $(H_1 H_2)$ можно представить в виде произведения функций α и β . При этом $\sigma_\alpha - \sigma_\beta = -C [f(\beta) F_2 H_2^{-2}]^n$. Условия (1.6) достаточно только для жесткопластической среды, а в общем случае необходимо выполнение дополнительного условия (равновесия):

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (\sigma_\alpha - \sigma_\beta) \frac{\partial}{\partial \beta} (\ln H_1) + \frac{\partial}{\partial \beta} (\sigma_\alpha - \sigma_\beta) \frac{\partial (\ln H_2)}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} (\sigma_\alpha - \sigma_\beta) = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 F_3}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} (f^n \ln H_1) + \frac{\partial F_3}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\ln H_2) + n F_3 \frac{\partial \ln f}{\partial \beta} \frac{\partial (\ln H_2)}{\partial \alpha} = 0$$

$$F_3 = (F_2 H_2^{-2})^n = (2H_1^{-1} H_2^{-2} \partial H_2 / \partial \alpha)^n \quad (1.7)$$

Ответ на вопрос могут ли данные линии являться линиями тока сплошной среды, свойства которой определены (1.2), зависит от существования решений (1.4). Это дифференциальное уравнение для функции $f(\beta)$ может не иметь решений, поскольку его коэффициенты могут быть также функциями переменной α . Двукратным дифференцированием (1.4) по α получаем

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\partial \Phi_3}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} \right)^{-1} \right] \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} \right)^{-1} \right] \right\}^{-1} \right\} = 0$$

$$\text{при } \Phi_1 = 0, \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\partial \Phi_3}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha} \right)^{-1} \right] = 0$$

Нарушение этих условий означает, что нет функции $f(\beta)$, удовлетворяющей (1.4), и линии α ($\beta = \text{const}$) не могут быть линиями тока ни при каких краевых условиях.

Выбор возможных линий тока в качестве криволинейных координат упрощает в некоторых случаях решение.

Рассмотрим примеры использования уравнения (1.4).

1. В декартовой системе координат $H_1 = H_2 = 1$, $F_1 = F_2 = F_3 = 0$ и (1.4) выполнено при $\tau_{\alpha\beta} = C_1 + C_2\beta$, $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = C_3 - C_2\alpha$:

$$v_\alpha = f(\beta) = \int [2C^{-1} (C_2\beta + C_1)]^{1/n} d\beta$$

где C_1 , C_2 , C_3 — постоянные, зависящие от краевых условий.

2. Если в полярных координатах принять за линии тока прямые линии, то при $H_1 = 1$, $H_2 = \alpha$, $F_1 = 0$, $F_2 = 2$ получаем уравнение для функции $f(\beta)$, соответствующее осесимметричной деформации [5, 6]. Существует функция

$F_3 = 2\alpha^{-2n}$, удовлетворяющая (1.7), что определяет также известное решение $v_\alpha = C_1\alpha^{-1}$ при $\tau_{\alpha\beta} = 0$.

3. Если использовать полярные координаты, а за линии тока принять окружности, то $H_1 = \beta$, $H_2 = 1$, $F_1 = \beta^{-1}$, $F_2 = 0$, $\sigma_\alpha = \sigma_\beta$ и уравнение (1.4) удовлетворено при

$$v_\alpha = f(\beta) = C_1\beta + \beta \int [2C^{-1}(C_2 + C_3\beta^{-2})]^{1/n} d\beta/\beta$$

$$\tau_{\alpha\beta} = C_2 + C_3\beta^{-2}, \quad \sigma_\alpha = \sigma_\beta = C_4 - 2C_2\alpha$$

4. Рассмотрим течение деформируемой среды по гиперболам при $\alpha = 0,5(x^2 - y^2)$, $\beta = xy$, $H_1 = H_2 = 2^{-1/2}(\alpha^2 + \beta^2)^{-0,25}$. Проверка (1.4) показывает существование решения $f(\beta) = 1$, $f_1(\beta) = 0$, $\tau_{\alpha\beta} = C2^{n-1}\beta(\alpha^2 - \beta^2)^{-0,5}$, $v_\alpha = \sqrt{2}(\alpha^2 + \beta^2)^{0,25}$, $\sigma_\alpha = C_1 + C2^{n-1}\alpha(\alpha^2 + \beta^2)^{-0,5}$, $\sigma_\beta = C_1 - C2^{n-1}\alpha(\alpha^2 + \beta^2)^{-0,5}$.

5. Проверим допущение о том, что линиями тока являются логарифмические спирали. При этом

$$H_1 = \sqrt{\frac{\beta}{2\alpha}}, \quad H_2 = \sqrt{\frac{\alpha}{2\beta}}, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = \beta^{-1}$$

Если, следуя (1.2), записать девiator напряжения в виде $\tau_{\alpha\beta} = \varphi_1(\beta)\alpha^{-n}$, $\sigma_\alpha - \sigma_\beta = -\varphi_2(\beta)\alpha^{-n}$, где функций

$$\varphi_1(\beta) = 0,5\beta f(\beta)\varphi_2(\beta)df(\beta)/d\beta, \quad \varphi_2(\beta) = C2^n [1 + \beta^2 f_1^2(\beta)]^{0,5(n-1)}$$

то простое решение (1.4) имеет вид $f(\beta) = cv_0\beta^{-1}$, $v_\alpha = v_0\sqrt{2}(\alpha\beta)^{-0,5}c$, где v_0 — скорость при $\alpha\beta = 2c^2$ и логарифмические спирали могут быть линиями тока. Это решение определяет напряжения

$$\tau_{\alpha\beta} = -C(\alpha\beta)^{-1}(v_0c), \quad \sigma_\alpha = C_1 - C(\alpha\beta)^{-1}(v_0c), \quad \sigma_\beta = C_1 + C(\alpha\beta)^{-1}(v_0c) \quad \text{при } n = 1$$

$$\tau_{\alpha\beta} = -2^{-1/2}k, \quad \sigma_\alpha = C_1 + k\sqrt{2}\ln\alpha$$

$$\sigma_\beta = C_1 + k\sqrt{2} + k\sqrt{2}\ln\alpha, \quad k = 0,5C \quad \text{при } n = 0$$

где постоянная C_1 определена краевыми условиями.

6. Для биполярных координат

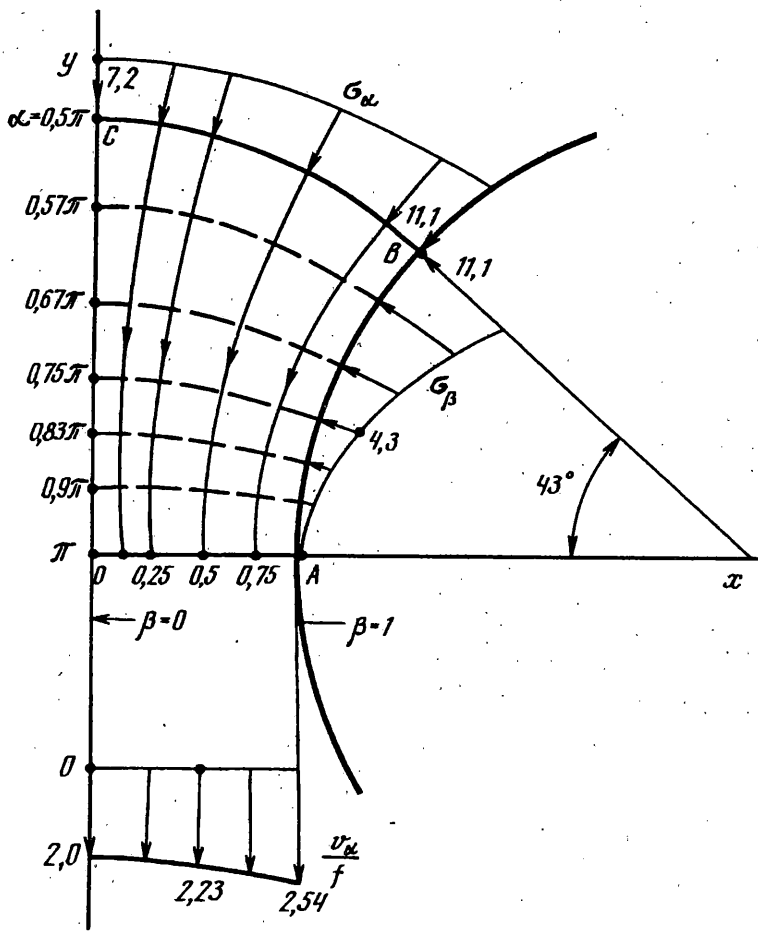
$$(x - \text{cth } \beta)^2 + y^2 = \text{cth}^2 \beta - 1 \quad (y - \text{ctg } \alpha)^2 + x^2 = 1 + \text{ctg}^2 \alpha$$

$$H_1 = H_2 = (\text{ch } \beta - \cos \alpha)^{-1}$$

при $n = 1$ существует решение: $f(\beta) = \text{const}$, $v_\alpha = f(\text{ch } \beta - \cos \alpha)$, $\tau_{\alpha\beta} = -Cf \text{sh } \beta (\text{ch } \beta - \cos \alpha)$, $\sigma_\alpha = C_1 - Cf \sin \alpha (\text{ch } \beta - \cos \alpha)$, $\sigma_\beta = C_1 + Cf \sin \alpha \times (\text{ch } \beta - \cos \alpha)$.

Пример численного расчета иллюстрирует фиг. 1.

Деформируемая среда подвергается прокатке с прессованием и зона деформации ограничена двумя поверхностями валков $\beta = 1$ ($\beta = -1$), и поверхностями AO ($\alpha = \pi$), BC , ($\alpha = 0,5\pi$); ввиду симметрии на фиг. 1 показана половина зоны деформации между линиями AB ($\beta = 1$) и OC ($\beta = 0$). На фиг. 1 приведены линии тока $\beta = \text{const}$ (сплошные линии) и линии $\alpha = \text{const}$ (штриховые), при этом на AO и OC указаны некоторые характерные значения величин α , β . На основании экспериментальных данных [7] при расчетах было принято для стали 45 при 1450°C $n = 1$, $C = 7,2 \cdot 10^4$ МПа·с. По этим данным допущение $n = 1$ допустимо использовать только при высоких температурах, близких к температуре плавления, а именно для сталей при температурах $1400\text{--}1500^\circ\text{C}$ (при меньших температурах зависимости напряжений от скорости деформации нелинейные). Если принять на линии AO ($\alpha = \pi$) краевое условие $\sigma_\alpha = 0$, то $C_1 = 0$ и эпюры напряжений $\sigma_\alpha(\beta)$ при $\alpha = 0,5\pi$ и $\sigma_\beta(\alpha)$ при $\beta = 1$ (на поверхности валка),



Фиг. 1

приведены на фиг. 1, при $f = 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $Sf = 7,2 \text{ МПа}$. Касательные напряжения на линии $\beta = 1$ возрастают от $13,1 \text{ МПа}$ в точке B до $21,5 \text{ МПа}$ в точке A , их средняя величина $17,5 \text{ МПа}$, а средняя величина напряжения σ_α на BC равна $9,45 \text{ МПа}$. Деформация осуществляется и действием давления прессования на BC , и вращающимися валками. Аналогичные схемы возможны в прокатных агрегатах, совмещенных с машинами непрерывного литья и в тянущих клетках этих машин, где температура близка к температуре затвердевания. На фиг. 1 приведена также эпюра $f^{-1}v_\alpha(\beta)$ в сечении AO ($\alpha = \pi$), характеризующая неравномерность скорости течения. Окружная скорость валков в данном примере равна $v_\alpha = 2,544f$, а скорость деформируемой среды равна скорости валков в точке A и меньше этой скорости на дуге AB (при $\alpha = 2/3\pi$, $v_\alpha = 2,04f$, а при $\alpha = 1/2\pi$ в точке B — $v_\alpha = 1,544f$).

2. Рассмотрим осесимметричную деформацию при установившейся ползучести и степенной функции, связывающей вторые инварианты тензоров напряжений и скорости деформации.

Если в меридиональной плоскости определены координаты $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$, H_1 и H_2 , а $H_3 = x(\alpha, \beta)$, то поле скоростей (см. [2]) имеет вид

$$v_\alpha = f(\beta) (H_2 H_3)^{-1}, \quad v_\beta = v_\gamma = 0 \quad (2.1)$$

где γ — угол поворота вокруг оси y .

При осевой симметрии напряжения и скорости не зависят от координаты γ . Приняв аналогично (1.2):

$$T = CH^n \quad (2.2)$$

$$T = 2^{-1/2} [(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + (\sigma_\beta - \sigma_\gamma)^2 + (\sigma_\gamma - \sigma_\alpha)^2 + 6\tau_{\alpha\beta}^2]^{1/2}$$

$$H = 3^{-1/2} \{ [2/3 [(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)^2 + (\varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma)^2 + (\varepsilon_\gamma - \varepsilon_\alpha)^2] + \gamma_{\alpha\beta}^2 \}^{1/2}$$

где $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_\gamma, \tau_{\alpha\beta}$ — компоненты тензора напряжений (в этом случае $\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\gamma} = 0$); $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_\gamma, \gamma_{\alpha\beta}$ — компоненты тензора скорости деформации; определим девиатор напряжения

$$\sigma_\alpha - \sigma_\beta = 2/3 CH^{n-1} (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta), \quad \tau_{\alpha\beta} = 1/3 CH^{n-1} \gamma_{\alpha\beta}$$

При $\sigma_\beta = \sigma_\gamma = \tau_{\alpha\beta} = 0, \varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma = -0,5\varepsilon_\alpha, \gamma_{\alpha\beta} = 0, T = \sigma_\alpha, H = \varepsilon_\alpha$.

Используя (2.1), получим

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\beta} &= 1/3 Cf(\beta) H_2^{-2} H_3^{-1} H^{n-1} (f_1 - F_1), \quad \sigma_\alpha - \sigma_\beta = \\ &= -2/3 Cf(\beta) (H_1 H_2 H_3)^{-1} H^{n-1} (2a + b) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\sigma_\beta - \sigma_\gamma = 2/3 Cf(\beta) (H_1 H_2 H_3)^{-1} H^{n-1} (a - b)$$

$$\sigma_\gamma - \sigma_\alpha = 2/3 Cf(\beta) (H_1 H_2 H_3)^{-1} H^{n-1} (a + 2b)$$

$$f_1(\beta) = \frac{d}{d\beta} [\ln f(\beta)], \quad H = \frac{f(\beta)}{\sqrt{3}} H_2^{-2} H_3^{-1} [(f_1 - F_1)^2 + F_2^2]^{0.5}$$

$$F_1 = \frac{\partial}{\partial\beta} [\ln (H_1 H_2 H_3)], \quad F_2 = 2H_2 H_1^{-1} (a^2 + ab + b^2)^{0.5}$$

$$a = \frac{\partial}{\partial\alpha} (\ln H_2), \quad b = \frac{\partial}{\partial\alpha} (\ln H_3)$$

Подставив (2.3) в уравнения равновесия, получим уравнения (1.4), (1.5) (при других, чем в плоской задаче, функциях F_1 и F_2). Приведем несколько примеров.

1. В цилиндрических координатах линиями тока могут быть прямые, параллельные оси z , при $H_1 = H_2 = 1, H_3 = \beta$:

$$\tau_{\alpha\beta} = C_1 \beta + C_2 \beta^{-1}$$

$$f(\beta) = C_3 \beta + \beta \int [3^{0.5(n+1)} C^{-1} \tau_{\alpha\beta}]^{1/n} d\beta$$

$$v_\alpha = f(\beta) \beta^{-1}$$

2. Радиальное течение к точке $x = y = z = 0$ определяет известное [5] решение, например $f(\beta) = v_0 \cos \beta, v_\alpha = v_0 \alpha^{-2}$.

Если же принять за линии тока в меридиональной плоскости окружности с центрами в полюсе, то $H_1 = \beta, H_2 = 1, H_3 = \beta \cos \alpha$ и решением (1.4) является функция $f(\beta) = v_0 \beta^2$, когда $v_\alpha = v_0 \beta (\cos \alpha)^{-1}, \tau_{\alpha\beta} = 0$

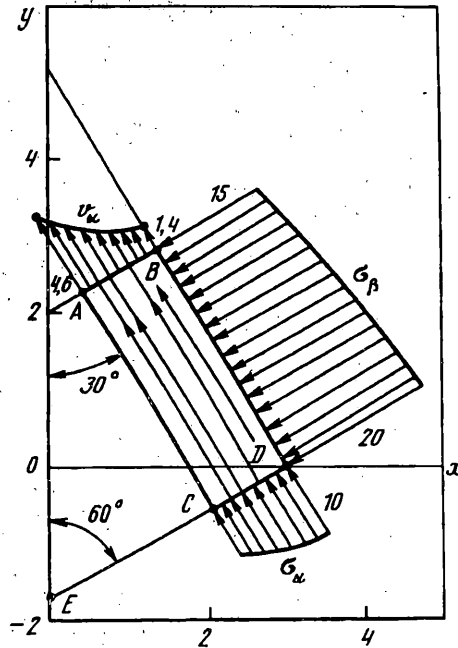
$$\sigma_\alpha = C_1 + 2^{n+1} 3^{-0.5(n+1)} C \int (\sin \alpha)^{n+1} (\cos \alpha)^{-2n-1} d\alpha$$

$$\sigma_\beta = \sigma_\alpha - 2^n 3^{-0.5(n+1)} C (\sin \alpha)^n (\cos \alpha)^{-2n}$$

$$\sigma_\gamma = \sigma_\alpha - 2^{n+1} 3^{-0.5(n+1)} C (\sin \alpha)^n (\cos \alpha)^{-2n} \quad (2.4)$$

где v_0, C_1, C — постоянные, определяемые краевыми условиями.

3. Примем координатные линии в виде $x = c(c^2 + 1)^{-1}(\beta - \alpha), y = (c^2 + 1)^{-1}(\alpha + \beta c^2)$, где постоянная c определяет угол наклона прямых к оси x .



Фиг. 2

Линии тока $\beta = \text{const}$ показаны на фиг. 2. Такая деформация близка к реализуемой при редуцировании труб, когда уменьшают диаметр без изменения толщины трубы. В этом случае

$$H_1 = (c^2 + 1)^{-0.5}, H_2 = c(c^2 + 1)^{-0.5}, H_3 = c(c^2 + 1)^{-1}(\beta - \alpha)$$

$$a = 0, b = -(\beta - \alpha)^{-1}, F_1 = (\beta - \alpha)^{-1}, F_2 = 2c(\beta - \alpha)^{-1}$$

и по формулам (2.3) получаем (при $n \neq 0$) $f(\beta) = \text{const}$:

$$v_\alpha = fc^{-2}(c^2 + 1)^{1.5}(\beta - \alpha)^{-1}, \tau_{\alpha\beta} = \Phi(\beta - \alpha)^{-2n} \quad (2.5)$$

$$\sigma_\alpha - \sigma_\beta = \sigma_\beta - \sigma_\gamma = 2c\Phi(\beta - \alpha)^{-2n}, \Phi = -C(c^2 + 1)^{2n}c^{-3n}3^{-0.5(n+1)}$$

Если принять $f(\beta) = \text{const}$, то $\Phi = \text{const}$ и

$$\sigma_\alpha = C_1 - \Phi c_0(\beta - \alpha)^{-2n}$$

$$\sigma_\beta = C_1 - \Phi(c_0 - 2c)(\beta - \alpha)^{-2n}$$

$$\sigma_\gamma = C_1 + \Phi(c_0 - 4c)(\beta - \alpha)^{-2n} \quad (2.6)$$

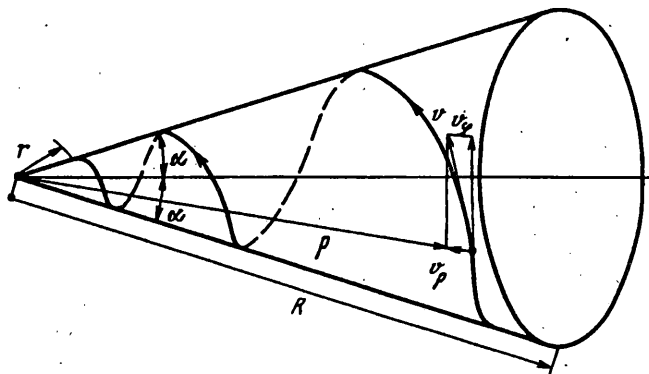
Подставив эти величины, содержащие постоянные c и c_0 , в уравнения равновесия, получим $2c_0n = 4c_0 + c^{-1}(2n - 1)$, $2c_0n = c(1 + 6n)$.

Это определяет решение

$$c = 1/\sqrt{3}, c_0 = (2n)^{-1}(1 + 6n)/\sqrt{3}, \Phi = -4^{2n}3^{-1.5n}7^{0.5(n-1)}Cf(\beta)$$

а формулы (2.6) определяют напряженное состояние.

4. Пример, иллюстрирующий результаты численных расчетов, приведен на фиг. 2. Расчеты выполнены для деформации трубы из никеля (марки НПАИ), при степени деформации 10% и температуре 1100° С, когда по экспериментальным данным [6, 7] можно в уравнении (2.2) принять $C = 27,2 \text{ МПа} \cdot (c)^{0.11}$, $n = 0,11$ (т. е. скорость деформации пропорциональна величине $\sigma^{0.1}$). Примем далее $c = 0,577$,



Фиг. 3

$f = -1 \text{ м}^2/\text{с}$, $c_0 = 4,36$, $\Phi = 12,9 \text{ (МПа)}^{2n+1}$ и формулы (2.6) определяют решение. Зона деформации $ABDC$ (фиг. 2) ограничена линиями AB и CD с уравнениями $\alpha = 2$ и $\alpha = -1,73$, соответственно, а также линиями $\beta = \text{const}$, AC ($\beta = 3$) и BD ($\beta = 5,2$). Из условия того, чтобы суммарное усилие на AB было равно нулю определяем постоянную $C_1 = -47 \text{ МПа}$. На фиг. 2 приведены эпюры напряжения σ_α на CD и давления σ_β на поверхности BD , а также эпюра скорости течения на AB . Для этого примера среднее напряжение прессования на CD равно $8,7 \text{ МПа}$.

В ABC все линии тока параллельны AC (и BD).

5. Гиперболы с уравнениями $\alpha = y^2 - 0,5x^2$; $\beta = x^2y$; ($\beta = \text{const}$) являются линиями тока при $f(\beta) = \text{const} = c_0$.

В этом случае

$$H_1 = (x^2 + 4y^2)^{-0,5}, H_2 = x^{-1} (x^2 + 4y^2)^{-0,5}, H_3 = x$$

$$v_\alpha = c_0 y^{-0,5} (3\beta + 4\alpha y)^{0,5}, \tau_{\alpha\beta} = C 2^{n+1} f^n [\beta (\alpha y + 0,5\beta)]^{0,5} (3\beta + 4\alpha y)^{-1}$$

$$\sigma_\alpha = C 2^{n+2} f^n (\alpha y + 0,5\beta) (3\beta + 4\alpha y)^{-1}, \sigma_y = 0$$

$$\sigma_\beta = C 2^n f^n \beta (3\beta + 4\alpha y)^{-1}$$

где c_0 — постоянная, зависящая от краевых условий, функция $y(\alpha, \beta)$ определена уравнением $y^3 - \alpha y - 0,5\beta = 0$ согласно обычным алгебраическим формулам.

В некоторых случаях использование линий тока в качестве криволинейных координат существенно упрощает задачу, позволяя рассматривать одно дифференциальное уравнение вместо системы уравнений с частными производными, и проверить возможность течения по данным линиям.

3. Линиями тока могут являться и некоторые винтовые линии. Так поле скоростей в цилиндрических координатах r, θ, z :

$$v_r = 0, v_\theta = \omega r, v_z = C_1 + \int (3C^{-1} \tau_{rz})^{1/n} dr$$

при $\tau_{rz} = C_2 r + C_3 r^{-1}$, $\tau_{\theta z} = 0$, $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = C_4 - 2C_2 z$ определяет течение по винтовым линиям, расположенным на поверхности цилиндров (ω — характеристика скорости вращения, $C_1 \dots C_4$ — постоянные, определяемые краевыми условиями).

Рассмотрим течение, при котором линии тока являются винтовыми линиями на конических поверхностях, как показано на фиг. 3.

В сферических координатах ρ, θ, φ примем поле скоростей

$$v_\rho = -v_0 R^2 \rho^{-2} g_1(\theta), v_\theta = 0, v_\varphi = -\omega R^2 \rho^{-2} \sin \alpha g_2(\theta) \quad (3.1)$$

где v_0 — характеристика радиальной компоненты скорости на некоторой сфере

радиусом R , α — половина угла некоторой конической поверхности, ω — характеристика скорости вращения, $g_1(\theta)$, $g_2(\theta)$ — неизвестные функции θ .

Близкие схемы деформации реализуются при прессовании в конической матрице с углом (2α) и при обжатии цилиндрических труб с редуцированием. Поле скоростей (3.1) определяет компоненты девиатора напряжений в виде

$$\tau_{\rho\theta} = -C\psi_1(\theta)\rho^{-3n}, \quad \tau_{\varphi\varphi} = -C\psi_2(\theta)\rho^{-3n} \quad (3.2)$$

$$\tau_{\theta\varphi} = C\psi_3(\theta)\rho^{-3n}, \quad \sigma_\rho - \sigma_\theta = C\psi_4(\theta)\rho^{-3n}, \quad \sigma_\theta = \sigma_\varphi$$

$$\psi_1(\theta) = 3^{-0.5(n+1)}(v_0R^2)^n D^{0.5(n-1)} dg_1(\theta)/d\theta, \quad \psi_2(\theta) =$$

$$= 3^{0.5(1-n)}\omega R^3 \sin \alpha (v_0R^2)^{n-1} D^{0.5(n-1)} g_2(\theta)$$

$$\psi_3(\theta) = 3^{-0.5(n+1)}\omega R^3 \sin \alpha (v_0R^2)^{n-1} D^{0.5(n-1)} [dg_2(\theta)/d\theta - g_2(\theta) \operatorname{ctg} \theta]$$

$$\psi_4(\theta) = 2 \cdot 3^{1-n} (v_0R^2)^n g_1(\theta) D^{0.5(n-1)}$$

$$D = 12g_1^2(\theta) + (dg_1/d\theta)^2 + a_0^2 \{9g_2^2(\theta) + [dg_2(\theta)/d\theta - g_2(\theta) \operatorname{ctg} \theta]^2\}$$

Безразмерный параметр $a_0 = \omega R (v_0)^{-1} \sin \alpha$ характеризует соотношение скоростей вращения и радиального движения, см. [8].

Подставив (3.2) в уравнения равновесия, определяем напряжения

$$\sigma_\rho = C_1 + C(3n)^{-1} \rho^{-3n} [-d\psi_1(\theta)/d\theta + \psi_1(\theta) \operatorname{ctg} \theta + 2\psi_4(\theta)]$$

$$\sigma_\theta = \sigma_\varphi = \sigma_\rho - C\rho^{-3n}\psi_4(\theta) \quad (3.3)$$

и получаем два уравнения для определения функций $g_1(\theta)$, $g_2(\theta)$:

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left[D^{0.5(n-1)} \frac{dg_1(\theta)}{d\theta} \right] - \operatorname{ctg} \theta \frac{d}{d\theta} \left[D^{0.5(n-1)} \frac{dg_1(\theta)}{d\theta} \right] +$$

$$+ 2 \cdot 3^{1.5-0.5n} \frac{d}{d\theta} [D^{0.5(n-1)} g_1(\theta)] + D^{0.5(n-1)} \frac{dg_1}{d\theta} [9n(1-n) + \sin^{-2} \theta] = 0$$

$$\frac{d}{d\theta} \left\{ D^{0.5(n-1)} \left[\frac{dg_2(\theta)}{d\theta} - \operatorname{ctg} \theta g_2(\theta) \right] \right\} + 2D^{0.5(n-1)} \left[\frac{dg_2(\theta)}{d\theta} - \operatorname{ctg} \theta g_2(\theta) \right] +$$

$$+ 9(n-1)g_2(\theta)D^{0.5(n-1)} = 0 \quad (3.4)$$

Примем краевое условие на оси ρ в виде $g_1(0) = 1$, т. е. в (3.1) на поверхности $\rho = R$ задана скорость $v_\rho = -v_0$ (при $\theta = 0$). На поверхности радиусом $\rho = r$ (фиг. 3) скорость по модулю выше в $\lambda = (R/r)^2$ раз. Кроме того, на оси $\theta = 0$ заданы условия $\tau_{\rho\varphi} = dg_1(\theta)/d\theta = 0$, $\tau_{\rho\theta} = g_2(\theta) = 0$.

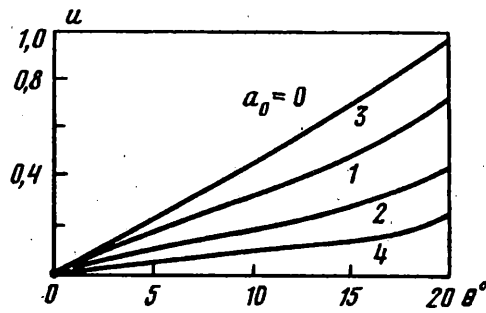
Остальные краевые условия должны быть заданы на поверхности конической матрицы при $\theta = \alpha$. Напряжение трения τ_n здесь должно быть направлено противоположно вектору скорости, см. фиг. 3. Этот вектор определен компонентами $v_\rho(\alpha)$ и $v_\varphi(\alpha)$ при $\theta = \alpha$. С учетом этого компоненты напряжения будут равны

$$|\tau_{\rho\theta}| = C\rho^{-3n}\psi_1(\alpha) = \tau_n v_\rho (v_\rho^2 + v_\varphi^{0.5}) = \tau_n g_1(\alpha) [g_1^2(\alpha) + a_0^2 g_2^2(\alpha)]^{-0.5}$$

$$|\tau_{\theta\varphi}| \cong C\rho^{-3n}\psi_3(\alpha) = \tau_n a_0 g_2(\alpha) [g_1^2(\alpha) + a_0^2 g_2^2(\alpha)]^{-0.5} \quad (3.5)$$

поскольку $v_\varphi = a_0 |v_\rho| g_2(\alpha) [g_1(\alpha)]^{-1}$. Если, например, трение отсутствует и $\tau_n = 0$, то

$$\psi_1(\alpha) = \frac{dg_1}{d\theta}(\alpha) = 0, \quad \psi_3(\alpha) = \frac{dg_2}{d\theta}(\alpha) - g_2(\alpha) \operatorname{ctg} \alpha = 0 \quad (3.6)$$



Фиг. 4

В отличие от деформации идеально пластической среды [8] выполнить условие $\tau_n = \text{const}$, при $\tau_n \neq 0$ нельзя из-за множителя ρ^{-3n} , но можно удовлетворить условию сухого трения

$$\tau_n = \mu |\sigma_\theta(\alpha)| = C_1 \mu - \mu C (3n)^{-1} \rho^{-3n} \left[-\frac{d\psi_1}{d\theta}(\alpha) + \psi_1(\alpha) \text{ctg } \alpha + (2 - 3n)\psi_4(\alpha) \right]$$

где μ — коэффициент трения.

Уравнения (3.5) и (3.6) (при $C_1 = 0$) определяют краевые условия для функций $g_1(\alpha)$, $g_2(\alpha)$ в виде соотношений

$$D^{0,5(n-1)} \frac{dg_1}{d\theta}(\alpha) [g_1^2(\alpha) + a_0^2 g_2^2(\alpha)] = \mu g_1(\alpha) (3n)^{-1} \left\{ -\frac{d}{d\theta} \left[D^{0,5(n-1)} \frac{dg_1}{d\theta} \right] + \right. \\ \left. + \text{ctg } \alpha D^{0,5(n-1)} \frac{dg_1}{d\theta}(\alpha) + 2(2 - 3n) 3^{1,5-0,5n} g_1(\alpha) D^{0,5(n-1)} \right\} \quad (3.7)$$

$$D^{0,5(n-1)} \left[\frac{dg_2}{d\theta}(\alpha) - g_2(\alpha) \text{ctg } \alpha \right] [g_1^2(\alpha) + a_0^2 g_2^2(\alpha)]^{0,5} = \\ = \mu g_2(\alpha) (3n)^{-1} \left\{ -\frac{d}{d\theta} \left[D^{0,5(n-1)} \frac{dg_1}{d\theta} \right] + \text{ctg } \alpha D^{0,5(n-1)} \frac{dg_1}{d\theta}(\alpha) + \right. \\ \left. + 2(2 - 3n) 3^{1,5-0,5n} g_1(\alpha) D^{0,5(n-1)} \right\}$$

Изложенное подтверждает, что винтовые линии на конических поверхностях (фиг. 3) могут быть линиями тока сплошной среды, свойства которой определяются уравнением (2.2). Частный случай $a_0 = 0$ соответствует деформации без вращения, когда линии тока — прямые линии. Если $g_1(\theta) = 0$, то имеет место вращение среды без радиального течения.

Численные расчеты выполнялись для углов $\alpha = 10^\circ$, 20° и 40° , разбивая диапазон изменения θ на интервалы $\Delta\theta = 0,01\alpha$. При $\theta = 0$ известны величины $g_1(0)$, $dg_1(0)/d\theta$, $g_2(0)$, а производную $dg_2(0)/d\theta$ принимали произвольно и проводили расчеты вплоть до $\theta = \alpha$. Если условия (3.6) или (3.7) не выполнены, изменяли величину $dg_2(0)/d\theta$ и повторяли расчет. Это осуществляли вплоть до того, как условия (3.7) или (3.6) выполнены с погрешностью не более 5%.

Расчеты выполнялись при $n = 0,11$ и $\mu = 0,20$, при этом графики величины $u = \tau_{\rho_0} (RC^{-1}v_0^{-1})^n$ для случая $\alpha = 20^\circ$ приведены на фиг. 4 при различных величинах параметра a_0 , указанных у соответствующих кривых.

Если на поверхности $\rho = r$ принять суммарное усилие равным нулю, то можно определить среднее напряжение прессования σ_{ρ_0} при $\rho = R$. Результаты численных расчетов удовлетворительно аппроксимируются формулой

$$\sigma_{\rho_0} = C [v_0 (R - r)^{-1}]^n [1 + \mu\alpha^{-1} (a_0^2 + 1)^{-0,5}]$$

Увеличение скорости вращения уменьшает давление прессования; например, при $\mu = 0,20$, $\alpha = 10^\circ$, $a_0 = 2$ оно в 1,42 раза меньше, чем при $a_0 = 0$.

Прессование или волочение через вращаемую матрицу может существенно уменьшить усилие, однако это связано с необходимостью приложения к инструменту крутящего момента.

Изложенное показывает, что винтовые линии, также как прямые, окружности и гиперболы, могут являться линиями тока для материалов, у которых зависимость вторых инвариантов тензоров напряжения и скорости деформации может быть описана степенной функцией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бровман М. Я. О линиях тока при плоской пластической деформации//Известия АН СССР. МГТ. 1989. № 2. С. 185—187.
2. Бровман М. Я. О линиях тока при осесимметричной пластической деформации//Известия АН. МГТ. 1992. № 1. С. 80—83.
3. Работнов Ю. Б. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
5. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
6. Бровман М. Я. Применение теории пластичности в прокатке. М.: Metallurgia, 1991. 265 с.
7. Бровман М. Я. Экспериментальное исследование ползучести при высоких температурах//Проблемы прочности. 1979. № 8. С. 77—79.
8. Broyman M. Ya. Steady forming processes of plastic materials with their rotation//Internat. J. of Mech. Sci. 1987. № 7. P. 483—489.

Краматорск

Поступила в редакцию
9.II.1993