МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1995

УДК 531.38

© 1995 г. А. Н. СИРОТИН

О ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЯ ПЕРЕОРИЕНТАЦИЕЙ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОГО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассматривается метод приближенного решения задачи оптимального по быстродействию управления пространственной переориентацией сферически-симметричного твердого тела, стабилизированного вращением. Вектор управляющего внешнего момента ограничен по модулю. Используя вариации управления специального вида, согласованные с симметрией уравнений движения, граничных условий и ограничений, получена разновидность условий оптимальности. Выделен класс вращений, удовлетворяющих сформулированным условиям, для которого получено аналитическое решение задачи быстродействия. Отмечена связь между рассматриваемыми вращениями сферически-симметричного тела и плоскими разворотами несимметричного тела, стабилизируемого вращением.

1. Формулировка задачи оптимальной переориентации. Рассматривается задача оптимальной переориентации триэдра, связанного со сферически-симметричным телом, для случая граничных условий, соответствующих равенству в связанной системе отсчета векторов угловой скорости в начальный и конечный моменты времени. Считается, что тело абсолютно жесткое, в качестве управления используется главный момент (относительно неподвижной точки) внешних сил, приложенных к телу. В качестве кинематических параметров углового движения приняты элементы матрицы направляющих косинусов.

Дифференциальные кинематические уравнения для матрицы $A = \|a_{ij}\| \in R^{3\times3}$ $(i, j = 1, 2, 3)$, направляющих косинусов, представляющей собой собственную ортогональную матрицу $A \in SO(3)$, описывающие изменение взаимного положения связанной и инерциальной систем координат в проекциях на связанные оси, имеют вид

$$A^{\cdot} = -S(\omega) A, \quad t \in (0, T) \tag{1.1}$$

$$S(\omega) = \begin{Vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{Vmatrix}$$

где $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T \in R^3$ — вектор угловой скорости, $S(\omega) \in R^{3\times3}$ — кососимметрическая матрица.

Считая тензор инерции сферически-симметричного тела единичным, динамические уравнения Эйлера можно записать как

$$\omega^{\cdot} = \mathbf{u} \tag{1.2}$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T \in R^3$ — вектор управляющего момента, на величину которого наложено ограничение

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \le u_0^2, \quad u_0 > 0 \tag{1.3}$$

В статье приняты следующие обозначения: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ из R^3, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ — векторное произведение.

Задача оптимальной переориентации: найти оптимальное управление системой (1.1), (1.2) с учетом ограничений (1.3), переводящее вектор состояния из фиксированного начального положения $A(0) = A_0$, $\omega(0) = \omega_0$ в заданное конечное $A(T) = A_1$, $\omega(T) = \omega_0$ за минимальное время T, $A(T) \neq A(0)$.

Точное аналитическое решение данной задачи в настоящее время не известно, поскольку необходимые условия принципа максимума [1] приводят к исследованию нелинейной краевой задачи, которая может быть решена только численно. Для качественного анализа процесса переориентации предложено несколько приближенных подходов [2—5], которые заключаются в наложении на исходную систему определенных связей, определяющих возможное направление угловой скорости в каждый момент времени. Например, задача оптимальной переориентации оси несимметричного тела, стабилизируемого вращением, исследовалась [4, 5] в классе плоских поворотов. Однако, вводимые связи выбираются обычно исходя из соображений реализуемости требуемого маневра (т. е. так, чтобы существовал хотя бы один такой разворот) и никак не связаны с первоначальной задачей оптимального управления. Кроме того, для произвольных граничных условий не всегда ясно, каким образом параметризовать разворот.

Ниже предложен один из приближенных подходов к решению задачи оптимальной переориентации сферически-симметричного тела. Он основан на параметризации вектора угловой скорости, исходя из некоторых условий оптимальности, и последующем решении получаемой задачи оптимального управления.

2. Параметризация пространственного разворота. Сначала рассмотрим задачу параметризации вращения, исходя из свойств оптимального маневра [6]. Запишем задачу оптимальной переориентации в векторном виде

$$
\begin{gathered}
x(0) = 0, \quad x_0^{\boldsymbol{\cdot}} = 1, \quad x_0(T) \equiv T \to \min \\
\mathbf{a}_i(0) = \mathbf{a}_{i0}, \quad \mathbf{a}_i^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{a}_i \times \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{a}_i(T) = \mathbf{a}_{i1} \quad (i = 1, 2, 3) \\
\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0, \quad \boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\omega}(T) = \boldsymbol{\omega}_0 \\
\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \leq u_0^2 \\
A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3], \quad a_i \in \mathbb{R}^3, \quad |a_i| = 1 \quad (i = 1, 2, 3)
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

Лемма. Для того чтобы процесс $\{T, \mathbf{u}(\cdot\cdot\cdot), \boldsymbol{\omega}(\cdot\cdot\cdot), A(\cdot\cdot\cdot)\}$ был оптимален в задаче (2.1), необходимо существование ненулевой вектор-функции $\mathbf{s}(t) \in R^3$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению $\mathbf{s}^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{s} \times \boldsymbol{\omega}$, $t \in (0, T)$, для которой выполнено условие

$$\int_0^T \mathbf{s}(\tau) \times (\boldsymbol{\omega}(\tau) - \boldsymbol{\omega}_0)\, d\tau = 0$$

Доказательство. Воспользуемся принципом максимума. Для задачи (2.1) пвседогамильтониан имеет вид

$$H = -1 + \sum_{i=1}^{3} \langle \psi_i, \mathbf{a}_i \times \boldsymbol{\omega} \rangle + \langle \psi_\omega, \mathbf{u} \rangle$$

где $\psi_0 = -1$; $\psi_i(t)$, $\psi_\omega(t) \in R^3$ — вектор функции сопряженных переменных, удовлетворяющих уравнениям

$$
\begin{gathered}
\psi_i^{\boldsymbol{\cdot}} = -\partial H / \partial \mathbf{a}_i = \psi_i \times \boldsymbol{\omega} \quad (i = 1, 2, 3) \\
\psi_\omega^{\boldsymbol{\cdot}} = -\partial H / \partial \boldsymbol{\omega} = -\sum_{i=1}^{3} \psi_i \times \mathbf{a}_i
\end{gathered}
\tag{2.2}
$$

Согласно принципу максимума получаем: $\mathbf{u}(t) \parallel \psi_\omega(t)$, $t \in [0, T]$. Обозначим

$$s = \sum_{i=1}^{3} \psi_i \times a_i \in R^3$$

$$s^{\cdot} = s \times \omega. \tag{2.3}$$

Таким образом, для оптимальности процесса $\{T, u(\cdots), \omega(\cdots), A(\cdots)\}$ необходимо существование векторов $s(0)$ и $\psi_\omega(0)$, являющихся решением краевой задачи

$$a_i(0) = a_{i0},\ a_i^{\cdot} = a_i \times \omega,\ a_i(T) = a_{i1}\ (i = 1, 2, 3)$$

$$\omega(0) = \omega_0,\ \omega^{\cdot} = u_0\psi_\omega |\psi_\omega|^{-1},\ \omega(T) = \omega_0$$

$$s^{\cdot} = s \times \omega,\ \psi_\omega^{\cdot} = -s$$

Покажем, что для оптимального процесса

$$|s(t)| \neq 0,\ |\psi_\omega(t)| \not\equiv 0,\ t \in [0, T] \tag{2.4}$$

Пусть $s(\tau) = 0$ для некоторого $\tau \in [0, T]$. В силу (2.3) заключаем $|s(t)| = \mathrm{const}$ и, следовательно, $|s(t)| = 0$ и $s(t) = 0$ при $t \in [0, T]$. Тогда из уравнения $\psi_\omega^{\cdot} = -s$ следует: $\psi_\omega(t) = \psi_\omega = \mathrm{const}$. Это, в свою очередь, означает, что

$$\omega(t) = u_0\psi_\omega |\psi_\omega|^{-1} t + v,\ v \in R^3$$

Кроме того, $\psi_\omega \neq 0$ вследствие условия $H = 0$. Из краевых условий для вектора угловой скорости получаем

$$v = \omega_0,\ -u_0\psi_\omega |\psi_\omega|^{-1} T + v = \omega_0$$

Откуда получим $u_0\psi_\omega |\psi_\omega|^{-1} T = 0$, что невозможно. Если же $\psi_\omega(t) \equiv 0$, то из (2.2) следует $s(t) \equiv 0$, что соответствует предыдущему случаю.

Таким образом, можно сделать вывод: если $u(\cdots)$ — оптимальное в задаче (2.1) управление, то существуют вектор-функции $s(t)$, $\psi_\omega(t) \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$s^{\cdot} = s \times \omega,\ \psi_\omega^{\cdot} = -s \tag{2.5}$$

и условиям (2.4), для которых выполнено равенство

$$u(t) \times \psi_\omega(t) = 0,\ t \in [0, T] \tag{2.6}$$

В силу краевых условий справедлива запись

$$\int_0^T \frac{d}{dt}((\omega - \omega_0) \times \psi_\omega)\, dt = 0$$

Вычисляя явно производную под интегралом и используя (2.5), (2.6), получаем требуемое равенство. Лемма доказана.

Условия оптимальности позволяют достаточно просто указать одно из возможных представлений вращения. Действительно, потребовав $s(t) \times (\omega(t) - \omega_0) = 0$, $t \in [0, T]$, заключаем, что для того чтобы вращение удовлетворяло условиям леммы, достаточно существования непрерывной скалярной функции $\alpha(\cdots)$ с краевыми условиями

$$\alpha(0) = \alpha(T) = 0 \tag{2.7}$$

такой что

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha(t)\, s(t),\ s^{\cdot} = s \times \omega,\ t \in [0, T] \tag{2.8}$$

Заметим, что в частном случае $\omega_0 = 0$ получается плоский разворот, который действительно является оптимальным вращением сферически-симметричного тела из положения покоя в положение покоя [7].

3. Декомпозиция задачи быстродействия. Рассмотрим решение исходной задачи быстродействия в предположении о представлении вектора угловой скорости в виде (2.7), (2.8). Используя формулы в кинематических уравнениях, получаем

$$A^{\cdot} = -S(\omega_0)A - \alpha S(s)A \tag{3.1}$$

Определим ортогональную матрицу $R(t) \in SO(3)$ как

$$R(0) = E_3, \quad R^{\cdot} = -S(\omega_0)R$$

Поскольку $R(t)$ является фундаментальной матрицей линейной системы дифференциальных уравнений $s^{\cdot} = s \times \omega = s \times (\omega_0 + \alpha s) = s \times \omega_0$, то

$$s(t) = R(t)s_0, \quad s_0 = s(0), \quad t \in [0, T] \tag{3.2}$$

Подставляя (3.2) в (3.1), получаем

$$A^{\cdot} = -S(\omega_0)A - \alpha S(Rs_0)A$$

Откуда следует

$$R^T A^{\cdot} = -S(R^T\omega_0)R^TA - \alpha S(s_0)R^TA \tag{3.3}$$

Здесь используется тождество $S(R\omega) = RS(\omega)R^T$, $R \in SO(3)$. По определению $R(t)$ описывает решение относительно неподвижного вектора ω_0, поэтому $R(t)\omega_0 = R^T(t)\omega_0 = \omega_0$.

Используя формулу $R^{T\cdot}A = S(\omega_0)R^TA$ и (3.3), имеем

$$d(R^TA)/dt = -\alpha S(s_0)R^TA$$

Обозначим $C(t) = R^T(t)A(t)A_0^T$. Тогда ортогональное преобразование $A(t)A_0^T$ представляет собой последовательность поворота $C(t)$ относительно неподвижной в инерциальном пространстве оси s_0 на угол $\int \alpha(\tau)d\tau$, $0 \le \tau \le t$, и поворота $R(t)$ относительно подвижной оси ω_0. Таким образом, вращение описывается независимыми кинематическими уравнениями

$$R(0) = E_3, \quad R^{\cdot} = -S(\omega_0)R; \quad C(0) = E_3, \quad C^{\cdot} = -\alpha S(s_0)C \tag{3.4}$$

со связанным терминальным условием

$$R(T)C(T) = A_1A_0^T \tag{3.5}$$

Кинематические уравнения (3.4) можно записать проще, если перейти к угловым координатам. Пусть $e_\omega = -\omega_0|\omega_0|^{-1}$, если $|\omega_0| \ne 0$, и e_ω произвольно, если $\omega_0 = 0$. Тогда

$$R^{\cdot} = |\omega_0|S(e_\omega)R$$

Так как $R(t) \in SO(3)$, то используя представление

$$R(t) = E_3 + \sin\vartheta(t)S(e_\omega) + (1 - \cos\vartheta(t))S^2(e_\omega)$$

получим

$$\{\cos\vartheta S(e_\omega) + \sin\vartheta S^2(e_\omega)\}\vartheta^{\cdot} = |\omega_0|\{\cos\vartheta S(e_\omega) + \sin\vartheta S^2(e_\omega)\}$$

так как $S^3(e_\omega) = -S(e_\omega)$ для $|e_\omega| = 1$. Следовательно вращение $R(t)$ описывается уравнением

$$\vartheta^{\cdot} = |\omega_0|, \quad \vartheta(0) = 0, \quad \vartheta(T) = \vartheta_1 \tag{3.6}$$

Аналогично, вращение $C(t)$ будет удовлетворять уравнению

$$\zeta^{\cdot} = \alpha|s_0|, \quad \zeta(0) = 0, \quad \zeta(T) = \zeta_1 \tag{3.7}$$

для вектора $e_s = -s_0|s_0|^{-1}$. Заметим, что направление вектора s_0 всегда можно выбрать таким образом, чтобы $\zeta_1 \ge 0$. Этот факт будет использован в дальнейшем.

Динамические уравнения с учетом параметризации (2.8) принимают вид $\omega^{\cdot} = \alpha^{\cdot} s + \alpha s \times \omega_0$.

Соответственно, ограничения (1.3) можно переписать как

$$\langle \omega^{\cdot}, \omega^{\cdot} \rangle = k_1^2 \alpha^{\cdot 2} + k_2^2 \alpha^2 \le u_0^2$$

$$k_1^2 = |s_0|^2 = \text{const},\ k_2^2 = |s_0 \times \omega_0|^2 = |s_0|^2 |\omega_0|^2 \sin^2 (\widehat{s_0, \omega_0}) = \text{const}$$

поскольку в силу уравнения $s^{\cdot} = s \times \omega$ имеем $|s(t)| = \text{const}$, $|s(t) \times \omega_0| = |s_0 \times \omega_0| = \text{const}$. Кроме того, $k_1^2 \neq 0$. Таким образом, в качестве управления в новой задаче можно принять $\alpha^{\cdot}(t)$.

Перейдем к точной формулировке задачи быстродействия, соответствующей представлению (2.7), (2.8). Пусть T — минимальное время маневра. Тогда в силу (3.6) $\vartheta_1 = |\omega_0| T$ и тем самым полностью определена матрица $R(T)$. Из граничного условия (3.5) следует соотношение

$$C(T) = R^T(T)(A_1 A_0^T) \tag{3.8}$$

из которого могут быть определены вектор $s_0 \in R^3$ и угол ζ_1. При этом разворот $C(T)$ описывается уравнениями

$$\begin{aligned} &\zeta^{\cdot} = \chi,\ \zeta(0) = 0,\ \zeta(T) = \zeta_1 \\ &\chi^{\cdot} = u,\ \chi(0) = 0,\ \chi(T) = 0 \\ &u^2 + k^2\chi^2 \le u_0^2,\ t \in [0, T] \\ &\chi = \alpha |s_0|,\ k^2 = |\omega_0|^2 \sin^2 (\widehat{s_0, \omega_0}),\ k \ge 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Величины ζ_1 и k^2 определены, как только задано время T. Зафиксируем ζ_1 и k^2 для минимального времени маневра и рассмотрим для них задачу быстродействия для системы (3.9). Предположим, что решение $T^*(\zeta_1, k)$ этой задачи известно. Тогда, очевидно, должно выполняться неравенство

$$T^*(\zeta_1, k) = T^*(\zeta_1(T), k(T)) \le T$$

так как противоположное противоречило бы определению T.

Допустим, что функции ζ_1, k и T^* непрерывны. Если для оптимального времени T выполнено строгое неравенство $T^*(\zeta_1(T), k(T)) < T$, то нашлось бы число $T^{\vee} < T$, такое что

$$T^*(\zeta_1(T^{\vee}), k(T^{\vee})) \le T^{\vee}$$

что противоречит определению T. Следовательно, если функции ζ_1, k, T^* непрерывны, то минимальное время маневра является минимальным неотрицательным решением уравнения

$$T^*(\zeta_1(T), k(T)) = T \tag{3.10}$$

Таким образом, для нахождения минимального времени необходимы формулы, определяющие время в задаче быстродействия для системы (3.9) при фиксированных ζ_1 и k^2, а также функции $\zeta_1(T)$, $k(T)$.

Найдем ζ_1 и k из граничного условия (3.5). Пусть $e \in R^3$ ($|e| = 1$) — собственный вектор матрицы $A_1 A_0^T$, задающий направление оси эквивалентного поворота, а ξ — соответствующая величина угла поворота относительно e. Используя формулы для сложения поворотов $A_1 A_0^T$ и $R^T(T)$ в кватернионной записи [8], можно получить следующие представления:

$$\cos \tfrac{1}{2}\zeta_1 = \cos \tfrac{1}{2}\xi \cos \tfrac{1}{2}\vartheta_1 + \cos (\widehat{e, e_\omega}) \sin \tfrac{1}{2}\xi \sin \tfrac{1}{2}\vartheta_1$$

$$k^2 = |\omega_0|^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\xi \sin^2 (\widehat{e, e_\omega}) \sin^{-2} \tfrac{1}{2}\zeta_1$$

Для удобства записи введем новые параметры a и φ следующим образом:

$$a = (\cos^2 \tfrac{1}{2}\xi + \cos^2 (\widehat{\mathbf{e}, \mathbf{e}_\omega}) \sin^2 \tfrac{1}{2}\xi)^{1/2} \quad (0 \le a \le 1)$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi = \cos (\widehat{\mathbf{e}, \mathbf{e}_\omega}) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\xi$$

Тогда в новых обозначениях функции $\zeta_1 (\vartheta_1)$ и $k (\vartheta_1)$ примут вид ($l \ge 0$ — постоянная):

$$\begin{aligned} &\zeta_1 = \zeta_1 (\vartheta_1) = 2 \arccos (a \cos \tfrac{1}{2} (\vartheta_1 - \varphi)) \\ &k = k (\vartheta_1) = l (1 - a^2 \cos^2 \tfrac{1}{2} (\vartheta_1 - \varphi))^{-1/2} \\ &l^2 = |\omega_0|^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\xi \sin^2 (\widehat{\mathbf{e}, \mathbf{e}_\omega}) \end{aligned} \tag{3.11}$$

4. Анализ решения. Введем в (3.9) новые переменные

$$h^2 = u^2 + k^2\chi^2 \quad (0 \le h^2 \le u_0^2)$$

$$\sigma \in \{-1, 0, +1\}$$

Тогда $u = \sigma (h^2 - k^2\chi^2)^{1/2}$. Следовательно, задача быстродействия для системы (3.9) сводится к виду

$$\begin{aligned} &\zeta^\bullet = \chi, \ \zeta (0) = 0, \ \zeta (T^*) = \zeta_1 \\ &\chi^\bullet = \sigma (h^2 - k^2\chi^2)^{1/2}, \ \chi (0) = 0, \ \chi (T^*) = 0 \\ &|\chi| \le k^{-1}u_0, \ 0 \le h^2 \le u_0^2, \ \sigma \in \{-1, 0, +1\} \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$T^* \to \min$$

Решение задачи быстродействия (4.1) известно (см. [5, гл. 8, § 4]); оно обладает симметрией относительно $\tfrac{1}{2}T^*$ и выражается в элементарных тригонометрических функциях.

Возможны два случая оптимального вращения. Если $|\zeta_1| \le 2k^{-2}u_0$, то управление состоит из симметричных относительно момента времени $\tfrac{1}{2}T^*$ участков разгона и торможения:

$$\sigma (t) = \begin{cases} \operatorname{sign} \zeta_1, & t \in [0, \tfrac{1}{2}T^*] \\ -\operatorname{sign} \zeta_1, & t \in (\tfrac{1}{2}T^*, T^*] \end{cases}$$

$$\chi (t) = \begin{cases} u_0\sigma k^{-1} \sin kt, & t \in [0, \tfrac{1}{2}T^*] \\ u_0\sigma k^{-1} \sin k (T^* - t), & t \in (\tfrac{1}{2}T^*, T^*] \end{cases}$$

$$\zeta (t) = \begin{cases} u_0\sigma k^{-2} (1 - \cos kt), & t \in [0, \tfrac{1}{2}T^*] \\ u_0\sigma k^{-2} (1 - 2 \cos \tfrac{1}{2}kT^* + \cos k (T^* - t)), & t \in (\tfrac{1}{2}T^*, T^*] \end{cases} \tag{4.2}$$

$$h^2 = u_0^2, \ t \in [0, T^*]$$

Время быстродействия в этом случае равно

$$T^* = T^* (\zeta_1, k) = 2k^{-1} \arccos (1 - \tfrac{1}{2}u_0^{-1}k^2 |\zeta_1|) \tag{4.3}$$

Если $|\zeta_1| \ge 2k^{-2}u_0$, то управление состоит из участков разгона до максимальной по модулю скорости $k^{-1}u_0 \operatorname{sign} \zeta_1$, пассивного вращения с этой скоростью и торможения. Оптимальный разворот описывается формулами

$$\sigma (t) = \begin{cases} \operatorname{sign} \zeta_1; & t \in [0, \tfrac{1}{2}\pi k^{-1}] \\ 0, & t \in (\tfrac{1}{2}\pi k^{-1}, T^* - \tfrac{1}{2}\pi k^{-1}] \\ -\operatorname{sign} \zeta_1, & t \in (T^* - \tfrac{1}{2}\pi k^{-1}, T^*] \end{cases}$$

$$\chi(t)=\begin{cases}u_0\sigma k^{-1}\sin kt, & t\in[0,\,½\pi k^{-1}]\\ u_0k^{-1}\operatorname{sign}\zeta_1, & t\in(½\pi k^{-1},\,T^*-½\pi k^{-1}]\\ u_0k^{-1}\sigma\sin k(T^*-t), & t\in(T^*-½\pi k^{-1},\,T^*]\end{cases} \tag{4.4}$$

$$\zeta(t)=\begin{cases}u_0\sigma k^{-2}(1-\cos kt), & t\in[0,\,½\pi k^{-1}]\\ u_0k^{-2}(1+k^{-1}(t-½\pi k^{-1})), & t\in(½\pi k^{-1},\,T^*-½\pi k^{-1}]\\ u_0\sigma k^{-2}(1+k(T^*-\pi k^{-1})+\cos k(T^*-t)), & t\in(T^*-½\pi k^{-1},\,T^*]\end{cases}$$

$$h^2=u_0^2,\ t\in[0,T^*]$$

Соответствующее минимальное время равно

$$T^*=T^*(\zeta_1,k)=k^{-1}(\pi-2)+u_0^{-1}k\,|\zeta_1| \tag{4.5}$$

Отметим, что задача (4.1) в [5] возникла при исследовании оптимального плоского разворота оси вращения несимметричного твердого тела при дополнительном предположении о постоянстве угловой скорости закрутки в течение всего процесса управления. Таким образом, существует связь пространственных разворотов сферически-симметричного тела, стабилизированного вращением, рассматриваемых в классе (2.7), (2.8), и плоских поворотов вращающегося несимметричного тела.

Поскольку, как указано в п. 3, ось s_0 всегда можно выбрать таким образом, что $\zeta_1\geq 0$, то в формулах (4.2)—(4.5) в данно случае можно заменить $|\zeta_1|$ на ζ_1. Кроме того, функции $T^*(\zeta_1,k)$ из (4.3) и (4.5) являются непрерывными и, следовательно, минимальное время маневра определяется из решения уравнения (3.10). Поскольку между ϑ_1 и T имеется однозначная связь $T=\vartheta_1|\omega_0|^{-1}$, $\omega_0\neq 0$, $\vartheta_1\geq 0$, то уравнение (3.10) запишем для ϑ_1, используя формулы (3.11).

Пусть $\vartheta_1^*\geq 0$ — минимальное решение трансцендентного уравнения

$$1-u_0^{-1}l^2\frac{\arccos(a\cos ½(\vartheta_1-\varphi))}{1-a^2\cos^2 ½(\vartheta_1-\varphi)}=\cos\left\{\frac{1}{2}l\,|\omega_0|^{-1}\frac{\vartheta_1}{(1-a^2\cos^2 ½(\vartheta_1-\varphi))^{½}}\right\}$$

с ограничением

$$0\leq u_0^{-1}l^2\frac{\arccos(a\cos ½(\vartheta_1-\varphi))}{1-a^2\cos^2 ½(\vartheta_1-\varphi)}\leq 1$$

а $\vartheta_1^{**}\geq 0$ — минимальное решение уравнения

$$1-u_0^{-1}l^2\frac{\arccos(a\cos ½(\vartheta_1-\varphi))}{1-a^2\cos^2 ½(\vartheta_1-\varphi)}=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}l\,|\omega_0|^{-1}\frac{\vartheta_1}{(1-a^2\cos^2 ½(\vartheta_1-\varphi))^{½}}$$

с ограничением

$$u_0^{-1}l^2\frac{\arccos(a\cos ½(\vartheta_1-\varphi))}{1-a^2\cos^2 ½(\vartheta_1-\varphi)}\geq 1$$

Тогда минимальное время T разворота равно

$$T=|\omega_0|^{-1}\min\{\vartheta_1^*,\vartheta_1^{**}\}$$

а соответствующий тип разворота (4.2) или (4.4) определяется неравенством $\vartheta_1^*\gtrless\vartheta_1^{**}$.

В общем случае решение зависит от численных значений параметров l, u_0, $|\omega_0|$, σ, a, которые полностью определяются начальными условиями ω_0, A_0, A_1. Вектор s_0 выбирается как собственный вектор ортогональной матрицы $R^T(T)(A_1,A_0^T)$.

5. Один предельный случай. Рассмотрим простейший частный случай исходной задачи: $\omega_0 = 0$. Из (3.11) получаем $l^2 = k^2 = 0$ и задача (4.1) быстродействия принимает вид

$$\zeta^{\cdot} = \chi, \ \zeta(0) = 0, \ \zeta(T^{\vee}) = \zeta_1$$

$$\chi^{\cdot} = u, \ \chi(0) = 0, \ \chi(T^{\vee}) = 0$$

$$|u| \le u_0, \ T^{\vee} \to \min$$

Как известно, эта простейшая линейная задача имеет решение ($\zeta_1 \ge 0$):

$$u^{\vee}(t) = \begin{cases} u_0, & t \in [0, \tfrac{1}{2}T^{\vee}] \\ -u_0, & t \in (\tfrac{1}{2}T^{\vee}, T^{\vee}] \end{cases}$$

$$\chi^{\vee}(t) = \begin{cases} u_0 t, & t \in [0, \tfrac{1}{2}T^{\vee}] \\ u_0(T^{\vee} - t), & t \in (\tfrac{1}{2}T^{\vee}, T^{\vee}] \end{cases}$$

$$\zeta^{\vee}(t) = \begin{cases} \tfrac{1}{2}u_0 t^2, & t \in [0, \tfrac{1}{2}T^{\vee}] \\ \tfrac{1}{2}u_0(\tfrac{1}{2}T^{\vee 2} - (T^{\vee} - t)^2), & t \in (\tfrac{1}{2}T^{\vee}, T^{\vee}] \end{cases}$$

$$T^{\vee} = 2(u_0^{-1}\zeta_1)^{1/2}$$

Исследуем, как ведет себя решение исходной задачи (4.1) при $k \to 0$, $k > 0$. Очевидно, если $k \to 0$, то реализуется случай $0 \le \zeta_1 \le 2k^{-2}u_0$ и решение определяется формулами (4.2) и (4.3). Непосредственно проверяется, что

$$(T^{\vee}, u^{\vee}(t), \chi^{\vee}(t), \zeta^{\vee}(t)) = \lim_{\substack{k \to 0 \\ k > 0}} (T^*, u_0\sigma(t), \chi(t), \zeta(t))$$

Наконец, поскольку при $\omega_0 = 0$ разворот описывается уравнением

$$\omega(t) = \alpha(t)\, s(t), \ s(t) = \text{const}$$

то можно сделать вывод о том, что в частном случае $\omega_0 = 0$ оптимальный разворот рассматриваемого класса (2.7), (2.8) совпадает с точным решением задачи оптимальной переориентации сферически-симметричного тела из положения покоя в положение покоя [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969, 384 с.
2. *Раушенбах Б. В., Токарь Е. Н.* Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974, 598 с.
3. *Алексеев К. Б.* Экстенсивное управление ориентацией космических летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1977, 121 с.
4. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980, 384 с.
5. *Акуленко Л. Д.* Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987, 368 с.
6. *Сиротин А. Н.* Геометрия локально-оптимального управления терминальной точностью переориентации симметричного КА, стабилизированного вращением//Космич. исследования. 1989. Т. 27. № 3. С. 375—384.
7. *Сиротин А. Н.* Оптимальное управление переориентацией симметричного твердого тела из положения покоя в положение покоя//Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 1. С. 36—43.
8. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение квантернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.

Москва

Поступила в редакцию
24.IX.1992