МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1995

УДК 539.37

 И. Ю. ЦВЕЛОДУБ

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Исследуются некоторые классы обратных задач, связанных с нахождением внешних воздействий, необходимых для получения за заданное время требуемой остаточной формы первоначального недеформированного тела с учетом упругой разгрузки в момент снятия внешних сил. Деформации считаются малыми. Данные задачи обобщают рассмотренные автором ранее [1—5]. Исследуются вопросы корректности, обосновываются итерационные методы решения изучаемых задач.

1. Рассмотрим изотермический процесс деформирования среды, полные деформации которой складываются из упругих и необратимых ε_{kl}^N деформаций

$$\varepsilon_{kl} = a_{klmn}\sigma_{mn} + \varepsilon_{kl}^N \quad (k, l = 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

где σ_{lk} — компоненты тензора напряжений, a_{klmn} — компоненты тензора упругих податливостей, обладающие известными свойствами симметрии и положительной определенности, т. е. для любого набора величин x_{kl}, одновременно не равных нулю, выполняется неравенство

$$a_{klmn}x_{kl}x_{mn} > 0, \quad x_{kl}x_{kl} \neq 0 \tag{1.2}$$

В формулах (1.1), (1.2) и в дальнейшем по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 3. Деформации ε_{kl} предполагаются малыми, так что имеют место соотношения Коши

$$\varepsilon_{kl} = 0{,}5\,(u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (k, l = 1, 2, 3) \tag{1.3}$$

где u_k — компоненты вектора перемещений, индекс после запятой означает частную производную по соответствующей декартовой координате.

Необратимые деформации ε_{kl}^N складываются из пластических ε_{kl}^p и деформаций ползучести ε_{kl}^c, развивающихся во времени $\varepsilon_{kl}^N = \varepsilon_{kl}^p + \varepsilon_{kl}^c$ $(k, l = 1, 2, 3)$.

Величины $\dot\varepsilon_{kl}^p$ (точка означает дифференцирование по t, где t — время или параметр нагружения) определяются согласно уравнениям упрочняющегося пластического тела

$$\dot\varepsilon_{kl}^p = \alpha h\,(s)\,\dot s\,\partial s/\partial\sigma_{kl} \quad (k, l = 1, 2, 3) \tag{1.4}$$

Здесь $s = s\,(\sigma_{kl})$ — однородная первой степени выпуклая функция, совпадающая при одноосном растяжении с напряжением σ (например, в качестве s может быть выбрана интенсивность напряжений σ_i, максимальное касательное напряжение $\tau_{\max}$ и так далее); $h \geq 0$, $h\,(s) = 0$ при $s < \sigma_T$ (σ_T — предел текучести):

$$\alpha\,(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } \dot s \leq 0 \text{ и при } \dot s > 0,\ s < s_{\max}(t) \\ 1 & \text{при } \dot s > 0,\ s\,(t) = s_{\max}(t) \end{cases}$$

где $s_{\max}(t)$ — максимальное значение $s\,(t)$ в интервале $[0, t]$.

Используя результаты, полученные в [6], можно показать, что если функция упрочнения $h = h\,(s)$ удовлетворяет неравенству $h'\,(s) \geq 0$ и число переходов от упругого деформирования к пластическому конечно, то для среды, подчиняющейся соотношениям (1.4), выполняется известный постулат устойчивости в большом

$$\int_0^t \Delta\dot{\varepsilon}^p_{kl}\Delta\sigma_{kl}\, dt \geq 0, \quad \Delta\dot{\varepsilon}^p_{kl} = \dot{\varepsilon}^{p(1)}_{kl} - \dot{\varepsilon}^{p(2)}_{kl}, \quad \Delta\sigma_{kl} = \sigma^{(1)}_{kl} - \sigma^{(2)}_{kl} \tag{1.5}$$

для любых двух путей нагружения $\sigma^{(1)}_{kl} = \sigma^{(1)}_{kl}(t)$ и $\sigma^{(2)}_{kl} = \sigma^{(2)}_{kl}(t)$ таких, что $\Delta\sigma_{kl}(0) = 0$ $(k, l = 1, 2, 3)$, при условии, что при $t < 0$ среда находилась в естественном недеформированном состоянии.

Для скоростей деформаций ползучести $\eta_{kl} = \dot{\varepsilon}^c_{kl}$ примем общие зависимости Ю. Н. Работнова

$$\eta_{kl} = \eta_{kl}(\sigma_{mn}, q_i) \quad (k, l, m, n = 1, 2, 3; \ i = 1, 2, \ldots, p) \tag{1.6}$$

где q_i — структурные параметры, изменение которых во времени описывается кинетическими уравнениями

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(\sigma_{mn}, \varepsilon^c_{mn}, q_j) \quad (i, j = 1, 2, \ldots, p; \ m, n = 1, 2, 3) \tag{1.7}$$

Предполагаем, что для скоростей деформаций ползучести справедлив постулат устойчивости, который утверждает, что для любых двух путей имеет место неравенство, аналогичное (1.5):

$$\int_0^t \Delta\eta_{kl}\Delta\sigma_{kl}\, dt \geq 0 \tag{1.8}$$

при условии $\Delta q_i = 0$ и $\Delta\varepsilon^c_{kl} = 0$ при $t = 0$ (требование $\Delta\sigma_{kl}(0) = 0$, необходимое в (1.5), в данном случае не является обязательным), причем знак равенства в (1.8) возможен для сжимаемой при ползучести среды ($\eta_{kk} \neq 0$) только при $\Delta\sigma_{kl}(\tau) = 0$, а для несжимаемой ($\eta_{kk} = 0$) — только при $\Delta\sigma_{kl}(\tau) = \Delta p(\tau)\,\delta_{kl}$, где δ_{kl} — компоненты единичного тензора $(k, l = 1, 2, 3)$, для любого τ такого, что $0 \leq \tau < t$. Необходимо отметить, что в отличие от (1.5), где t может быть параметром нагружения, величина t из (1.8) — физическое время.

Условие (1.8) подробно исследовано в [5], где в частности, показано, что оно выполняется для достаточно широкого класса соотношений (1.6), (1.7) (по крайней мере, с одним кинетическим параметром q), описывающих изотермический процесс ползучести металлических материалов.

Для дальнейшего конкретизация уравнений пластичности (1.4) и ползучести (1.6), (1.7) не является существенной. Основную роль будут играть условия (1.5) и (1.8), которые целесообразно объединить в одно, относящееся к неупругим деформациям ε^N_{kl} и которое формулируется следующим образом. Для любых двух путей в пространстве напряжений и соответствующих им путей в пространстве скоростей необратимых деформаций для любого момента времени $t > 0$ имеет место неравенство

$$\int_0^t \Delta\dot{\varepsilon}^N_{kl}\,\Delta\sigma_{kl}\, dt \geq 0 \tag{1.9}$$

при условии $\Delta\sigma_{kl} = 0$, $\Delta\varepsilon^p_{kl} = \Delta\varepsilon^c_{kl} = 0$, $\Delta q_i = 0$ $(k, l = 1, 2, 3; \ i = 1, 2, \ldots, p)$ при $t = 0$. Будем считать, что знак равенства в (1.9) возможен для неупруго сжимаемой среды ($\dot{\varepsilon}^N_{kk} \neq 0$) только при $\Delta\sigma_{kl}(\tau) = 0$, а для несжимаемой ($\dot{\varepsilon}^N_{kk} = 0$) — только при $\Delta\sigma_{kl}(\tau) = \Delta p(\tau)\,\delta_{kl}$ $(k, l = 1, 2, 3)$ для любого τ: $0 \leq \tau < t$.

Заметим, что если $\dot{\varepsilon}^p_{kl} = 0$ в интервале $[0, t]$, то $\dot{\varepsilon}^N_{kl} = \eta_{kl}$ и (1.9) совпадает с (1.8), поскольку условие $\Delta\sigma_{kl} = 0$ при $t = 0$, необходимое в (1.9), в этом случае несущественно [5].

При «мгновенном» нагружении в интервале $[0, t_0]$, когда $t_0 \to 0$, возникают пластические деформации, т. е. в общем случае $\Delta\varepsilon^p_{kl}(t_0) \neq 0$, $\Delta\sigma_{kl}(t_0) \neq 0$, но согласно (1.6) и (1.7) $\int\limits_0^{t_0} \Delta\eta_{kl}\Delta\sigma_{kl}\,dt \to 0$, и (1.9) вырождается в (1.5).

Рассмотрим тело объема v с поверхностью S, определяющие уравнения деформирования которого имеют вид (1.1) и которое при $t<0$ находилось в естественном недеформированном состоянии. Обратную задачу о деформировании исходного тела в заданное остаточное состояние за время t_* в общем виде можно сформулировать следующим образом: какие внешние воздействия нужно прикладывать к поверхности S (считаем, что массовые силы отсутствуют) в интервале времени $[0, t_*]$ так, чтобы выполнилось следующее условие: в момент мгновенного снятия внешних сил, вызывающих эти воздействия, при $t = t_*$ после соответствующей упругой разгрузки остаточные перемещения $u^{\vee}_k$ точек поверхности S принимают заданные значения $u^{\vee}_{k*}$ ($k = 1, 2, 3$)? Указанное условие будем обозначать звездочкой (*).

Выделим конкретные классы упомянутых внешних воздействий, относящиеся к силовым и кинематическим и гарантирующие единственность решения поставленной ОЗ. В связи с этим рассмотрим следующие задачи.

Задача 1. Необходимо определить величины p_{k*} такие, чтобы при внешних нагрузках $p_k = f(t)\,p_{k*}$ ($k = 1, 2, 3$), приложенных к поверхности S, где $f(t)$ — заданная функция ($f(0) = 0$, $\dot f(0) > 0$; $\dot f(t) \geq 0$ $(0 < t < t_*)$; $f(t_*) = 1$), выполнилось условие (*).

В частности, при мгновенном нагружении в интервале $[0, t_0]$ и последующей фиксации внешних нагрузок, когда $f(0) = 0$; $\dot f(t) > 0$ $(0 \leq t < t_0)$; $f(t) = 1$ $(t_0 \leq t \leq t_*)$, $t_0 \to 0$, и при условии отсутствия пластических деформаций ε^p_{kl}, т. е. $\varepsilon^N_{kl} = \varepsilon^c_{kl}$, данная задача совпадает с рассмотренной в [1, 5].

Задача 2. Необходимо определить величины u_{k*} такие, чтобы при перемещениях $u_k = f(t)\,u_{k*}$ ($k = 1, 2, 3$) на S, где $f(t)$ — заданная функция ($f(0) = 0$; $\dot f(t) \geq 0$ $(0 \leq t < t_*)$; $f(t^*) = 1$), выполнилось условие (*).

В частности, если $f(0) = 0$; $\dot f(t) > 0$ $(0 \leq t < t_0)$; $f(t) = 1$ $(t_0 \leq t \leq t_*)$, $t_0 \to 0$ и $\varepsilon^p_{kl} = 0$, эта задача совпадает с рассмотренной в [2, 5].

Задача 3. Необходимо определить величины p_{k0} такие, чтобы при внешних нагрузках $p_k = f(t)\,p_{k0}$ ($k = 1, 2, 3$), где $f(t)$ $(0 \leq t \leq t_0)$ — заданная функция ($f(0) = 0$, $\dot f(0) > 0$; $\dot f(t) \geq 0$ $(0 < t < t_0)$; $f(t_0) = 1$), и последующей фиксации перемещений, соответствующих моменту $t = t_0$, вплоть до момента $t = t_*$ (т. е. $\dot u_k = 0$ на S при $t_0 \leq t < t_*$) выполнилось условие (*).

В частности, при $t_0 \to 0$ данная задача соответствует рассмотренной в [4, 5], где, однако, предполагалось, что в отличие от (1.4) деформации ε^p_{kl} определяются согласно уравнениям деформационной теории пластичности.

В каком-то смысле задача *3* является смешанной по отношению к задаче *1* (в нагрузках) и к задаче *2* (в перемещениях).

Заметим, что при $t_* \to 0$ задачи *1—3* вырождаются в соответствующие упругопластические задачи о получении заданной остаточной формы тела после мгновенного нагружения и упругой разгрузки.

Сформулируем еще одну задачу, несколько отличающуюся от вышеприведенных.

Задача 4. Какие внешние нагрузки $p_k = p_k(t)$ нужно прикладывать к поверхности S тела (или какие перемещения $u_k = u_k(t)$ необходимо сообщать поверхности S) так, чтобы в текущий момент времени $t > 0$ оно имело заданные остаточные перемещения $u_k^\vee = u_k^\vee(t)$ $(k = 1, 2, 3)$ точек поверхности, т. е. те перемещения, которые остались бы на S после мгновенного снятия текущих внешних нагрузок и упругой разгрузки?

В частности, при $\varepsilon_{kl}^p = 0$ эта задача совпадает с рассмотренной в [3, 5].

Заметим, что перемещениям $u_k^\vee$ соответствуют согласно (1.3) остаточные деформации $\varepsilon_{kl}^\vee$, причем

$$\varepsilon_{kl}^\vee = a_{klmn}\rho_{mn} + \varepsilon_{kl}^N \quad (k, l = 1, 2, 3) \tag{1.10}$$

где ρ_{lk} — компоненты остаточных напряжений, возникающих в теле после разгрузки. При этом поле напряжений в любой момент времени можно представить в виде [5]:

$$\sigma_{kl} = \sigma_{kl}^e + \rho_{kl} \quad (k, l = 1, 2, 3) \tag{1.11}$$

где σ_{kl}^e — компоненты упругих напряжений, соответствующих решению чисто упругой задачи с теми же внешними нагрузками на S в тот же момент времени, т. е. напряжениям ρ_{kl} соответствуют нулевые внешние нагрузки. Из (1.1) и (1.10) видно, что разности напряжений и деформаций до и после мгновенной разгрузки связаны между собой законом Гука.

2. Условия (1.2) и (1.9) являются достаточными для единственности решения всех сформулированных выше задач. Основой при доказательстве является уравнение виртуальных работ, которое при отсутствии массовых сил имеет вид [5]:

$$\int_v \sigma_{kl}\varepsilon_{kl}\,dv = \int_S p_k u_k\,dS \tag{2.1}$$

где поле σ_{kl} удовлетворяет известным уравнениям равновесия $\sigma_{kl,l} = 0$, внешние силы $p_k = \sigma_{kl}n_l$, n_k — компоненты единичного вектора внешней к S нормали; компоненты ε_{kl} выражаются через u_k с помощью (1.3); при этом величины σ_{kl} и ε_{kl} могут быть никак не связаны между собой $(k, l = 1, 2, 3)$.

Приведем, как наиболее характерное, доказательство теоремы единственности решения только для задачи 3. Заметим, что при $t_0 = t_*$ последняя совпадает с задачей 1.

Предположим, что существуют два решения задачи 3; соответствующие разности будем обозначать, вводя символ Δ. Из (1.10), (1.11) и (2.1) для любого момента времени найдем

$$\int_S \Delta u_k^\vee \Delta p_k\,dS = \int_v (a_{klmn}\Delta\rho_{mn} + \Delta\varepsilon_{kl}^N)\,\Delta\sigma_{kl}\,dv =$$
$$= \int_v (a_{klmn}\,\Delta\rho_{kl}\Delta\rho_{mn} + \Delta\varepsilon_{kl}^N\Delta\sigma_{kl})\,dv \tag{2.2}$$

Последнее равенство в (2.2) имеет место в силу того, что [5]: $\int_v a_{klmn}\Delta\rho_{mn}\Delta\sigma_{kl}^e\,dv = 0$. Аналогичным образом

$$\int_S \Delta u_k^\vee \Delta\dot p_k\,dS = \int_v (a_{klmn}\Delta\rho_{mn}\Delta\dot\rho_{kl} + \Delta\varepsilon_{kl}^N\Delta\dot\sigma_{kl})\,dv \tag{2.3}$$

Поскольку

$$\Delta\dot p_k = \dot f\Delta p_{k*} = \dot f/f\Delta p_k, \quad f > 0, \quad \dot f \geq 0 \quad (0 < t \leq t_0)$$

$$\Delta\varepsilon_{kl}^N\,\Delta\sigma_{kl} = \int_0^t \Delta\dot\varepsilon_{kl}^N\,\Delta\sigma_{kl}\,dt + \int_0^t \Delta\varepsilon_{kl}^N\Delta\dot\sigma_{kl}\,dt$$

(так как $\Delta\varepsilon_{kl}^N = 0$ при $t = 0$), из (2.2) и (2.3) с учетом (1.2) и (1.9) получим

$$\dot V + \dot U \geq \dot f/f\,(2V + U) \geq \dot f/f\,(V + U) \tag{2.4}$$

$$U(t)=\int_0^t\int_v \Delta\varepsilon_{kl}^N\Delta\dot\sigma_{kl}\,dv\,dt,\quad V(t)=\frac{1}{2}\int_v a_{klmn}\Delta\rho_{kl}(t)\Delta\rho_{mn}(t)\,dv\geq 0$$

Отсюда $[(U+V)/f]^{\cdot}\geq 0$. Интегрируя это неравенство по времени от нуля до текущего момента $t\,(0<t\leq t_0)$, будем иметь $(U(t)+V(t))/f(t)-(U(0)+ V(0))/f(0)\geq 0$.

Раскрывая неопределенность вида 0/0 в левой части, найдем

$$\lim_{t\to 0}\frac{U+V}{f}=\lim_{t\to 0}\frac{\dot U+\dot V}{\dot f}=0$$

поскольку $\dot f(0)>0$ и $\dot U(0)=\dot V(0)=0$.

Таким образом, учитывая, что $f(t)>0$ при $t>0$, будем иметь

$$U(t)+V(t)\geq 0\quad (0<t\leq t_0) \tag{2.5}$$

Поскольку $\Delta\dot u_k=0$ на S при $t_0<t<t_*$, то

$$\int_0^{t_*}\int_S \Delta\dot u_k\Delta p_k\,dS\,dt=\int_0^{t_0}\int_S \Delta\dot u_k\Delta p_k\,dS\,dt$$

Отсюда вследствие (1.1), (2.1) и с учетом равенств $\Delta\sigma_{kl}(0)=0$ получим

$$\int_v\left(\frac{1}{2}a_{klmn}\Delta\sigma_{kl*}\Delta\sigma_{mn*}+\int_0^{t_*}\Delta\dot\varepsilon_{kl}^N\Delta\sigma_{kl}\,dt\right)dv= \tag{2.6}$$

$$=\int_v\left(\frac{1}{2}a_{klmn}\Delta\sigma_{kl0}\Delta\sigma_{mk0}+\Delta\varepsilon_{kl0}^N\Delta\sigma_{kl0}-\int_0^{t_0}\Delta\varepsilon_{kl}^N\Delta\dot\sigma_{kl}\,dt\right)dv$$

Здесь индексы (*) и (0) относятся к моментам времени $t=t_*$ и $t=t_0$.

Представим напряжения $\Delta\sigma_{kl*}$ в виде (1.11): $\Delta\sigma_{kl*}=\Delta\sigma_{kl*}^e+\Delta\rho_{kl*}$, а $\Delta\sigma_{kl*}^e$ запишем как

$$\Delta\sigma_{kl*}^e=\Delta\sigma_{kl0}-(\Delta\sigma_{kl0}-\Delta\sigma_{kl*}^e)=\Delta\sigma_{kl0}-(\Delta\sigma_{kl0}^e-\Delta\sigma_{kl*}^e)-\Delta\rho_{kl0}$$

Отсюда будем иметь

$$1/2\,a_{klmn}\Delta\sigma_{kl*}^e\Delta\sigma_{mn*}^e=I+1/2\,a_{klmn}(\Delta\sigma_{kl0}^e-\Delta\sigma_{kl*}^e)(\Delta\sigma_{mn0}^e-\Delta\sigma_{mn*}^e)\geq I$$

$$I=1/2\,a_{klmn}\Delta\sigma_{kl0}\Delta\sigma_{mn0}-a_{klmn}(\Delta\sigma_{mn0}-\Delta\sigma_{mn*}^e)\,\Delta\sigma_{kl0}+$$

$$+a_{klmn}(\Delta\sigma_{mn0}^e-\Delta\sigma_{mn*}^e)\,\Delta\rho_{kl0}+1/2\,a_{klmn}\Delta\rho_{kl0}\Delta\rho_{mn0}$$

Тогда из (2.6) нетрудно получить

$$U_0+V_0+V_*+\int_v\int_0^{t_*}\Delta\dot\varepsilon_{kl}^N\,\Delta\sigma_{kl}\,dt\,dv\leq \tag{2.7}$$

$$\leq\int_v[a_{klmn}(\Delta\sigma_{mn0}-\Delta\sigma_{mn*}^e)+\Delta\varepsilon_{kl0}^N]\,\Delta\sigma_{kl0}\,dv=\int_S\Delta u_{k*}^{\vee}\Delta p_{k0}\,dS=0$$

где функции $U(t)$ и $V(t)$ определены в (2.4). Последнее неравенство ввиду (1.2), (1.9) и (2.5) возможно только при выполнении следующего условия, которое обозначим двумя звездочками (**): для неупруго сжимаемого тела $(\dot\varepsilon_{kk}^N\neq 0)$ $\Delta\sigma_{kl}(\tau)=0$, а для несжимаемого $(\dot\varepsilon_{kk}^N=0)$ $\Delta\sigma_{kl}(\tau)=\Delta p(\tau)\,\delta_{kl}$ $(k,l=1,2,3;$ $0\leq\tau<t_*)$ во всем объеме v. В данном случае величина Δp определяется, как нетрудно видеть, следующим образом: $\Delta p(t)=f(t)\,\Delta p_0$ $(0\leq t\leq t_0)$, причем из уравнений равновесия вытекает, что Δp_0 — произвольная постоянная.

Таким образом, для сжимаемого тела $\Delta p_{k0} = 0$; для несжимаемого $\Delta p_{k0} = \Delta\sigma_{k0}n_l = f(t_0)\,\Delta p_0 n_k = \Delta p_0 n_k$ $(k = 1, 2, 3)$, поскольку $f(t_0) = 1$, т. е. внешние нагрузки p_{k0} определяются с точностью до гидростатического давления Δp_0.

Не приводя доказательства соответствующих теорем для других задач, отметим, что единственность решения понимается в смысле выполнимости условия (**): это в случае задачи 1 дает для разностей внешних сил в случае несжимаемого тела $\Delta p_{k*} = \Delta p_* n_k$ $(k = 1, 2, 3)$, где Δp_* — произвольная постоянная. В задачах *2*, *4* перемещения u_k точек поверхности S для сжимаемого тела определяются с точностью до слагаемых, отвечающих жесткому смещению, а для несжимаемого — перемещения, кроме отмеченных жестких смещений, могут отличаться на величины, соответствующие деформациям $\Delta\varepsilon_{kl*} = \Delta p_* a_{klmm}$ (задача *2*) и $\Delta\varepsilon_{kl}(t) = \Delta p(t)\,a_{klmm}$ (задача *4*), где $\Delta p(t)$ — произвольная функция времени.

3. Как известно, понятие корректности некоторой задачи включает в себя три условия: существование решения, его единственность, непрерывную зависимость решения от данных задачи. Как было указано выше, для изучаемых здесь задач единственность имеет место. Не останавливаясь пока на вопросах существования решения, рассмотрим третье из перечисленных условий. Для его выполнения необходимо усилить основное неравенство (1.9), а именно, будем считать, что при тех же начальных условиях при $t = 0$, что и в (1.9), имеет место неравенство

$$\int_0^t \Delta\dot\varepsilon^N_{kl}\Delta\sigma_{kl}\,dt \geq \int_0^t \lambda a_{klmn}\Delta\sigma_{kl}\Delta\sigma_{mn}\,dt, \quad \lambda = \lambda(t) > 0. \tag{3.1}$$

Еще более жесткое условие имеет вид

$$\Delta\dot\varepsilon^N_{kl}\Delta\sigma_{kl} \geq \lambda a_{klmn}\Delta\sigma_{kl}\Delta\sigma_{mn}, \quad \lambda > 0 \tag{3.2}$$

В качестве примера укажем, что при некоторых ограничениях неравенства (3.1) и (3.2) будут выполняться для вязкоупругой среды, когда скорости необратимых деформаций $\dot\varepsilon^N_{kl} = \dot\varepsilon^N_{kl}(\sigma_{mn})$ имеют потенциал Φ:

$$\dot\varepsilon^N_{kl} = \partial\Phi/\partial\sigma_{kl} = \Phi'\partial s/\partial\sigma_{kl} \quad (k, l = 1, 2, 3), \quad \Phi = \Phi(s),$$

$$s = (a_{klmn}\sigma_{kl}\sigma_{mn})^{1/2} \tag{3.3}$$

Прежде чем получить эти ограничения, заметим, что

$$\Delta\dot\varepsilon^N_{kl}\Delta\sigma_{kl} = \partial\dot\varepsilon^N_{kl}/\partial\sigma_{mn}\,|_{\sigma_{mn}=\sigma^*_{mn}}\Delta\sigma_{kl}\Delta_{mn} \tag{3.4}$$

$$\sigma^*_{kl} = \sigma^{(2)}_{kl} + \nu_*\Delta\sigma_{kl}, \quad \Delta\sigma_{kl} = \sigma^{(1)}_{kl} - \sigma^{(2)}_{kl} \quad (0 < \nu_* < 1)$$

Доказательство этого неравенства аналогично приведенному в [5] и состоит в следующем. Рассмотрим выражение $\mu(\nu) = \dot\varepsilon^N_{kl}(\sigma^{(2)}_{mn} + \nu\Delta\sigma_{mn})\,\Delta\sigma_{kl}$, которое при данных $\sigma^{(1)}_{kl}$ и $\sigma^{(2)}_{kl}$ является функцией числового параметра ν: $\mu = \mu(\nu)$, $0 \leq \nu \leq 1$. При этом $\mu(0) = \dot\varepsilon^{N(2)}_{kl}\Delta\sigma_{kl}$ и $\mu(1) = \dot\varepsilon^{N(1)}_{kl}\Delta\sigma_{kl}$, поэтому вследствие теоремы о конечных приращениях найдем $\Delta\dot\varepsilon^N_{kl}\Delta\sigma_{kl} = \mu(1) - \mu(0) = \mu'(\nu_*)$ $(0 < \nu_* < 1)$, откуда следует (3.4).

Из (3.3) и (3.4) получим

$$\Delta\dot\varepsilon^N_{kl}\Delta\sigma_{kl} = \partial^2\Phi/\partial\sigma_{kl}\partial\sigma_{mn}\,|_{\sigma_{kl}=\sigma^*_{kl}}\Delta\sigma_{kl}\Delta\sigma_{mn} =$$

$$= (\eta/s)_* a_{klmn}\Delta\sigma_{kl}\Delta\sigma_{mn} + s_*^{-1}(\eta/s)_*'\,(a_{klmn}\sigma^*_{mn}\Delta\sigma_{kl})^2,$$

$$\eta(s) = \Phi'(s) \tag{3.5}$$

где индекс (*) указывает на то, что соответствующие величины берутся при $\sigma_{kl} = \sigma^*_{kl}$.

Из (3.5) видно, что для выполнимости (3.2) достаточно условий $\eta/s \geq \lambda$, $(\eta/s)' \geq 0$, т. е.

$$\eta' \geq \eta/s \geq \lambda \tag{3.6}$$

Можно показать, что (3.6) будут иметь место, если $\eta(0) = 0$, $\eta'(0) = \lambda > 0$ и $\eta''(s) \geq 0$. Это видно из следующих разложений:

$$\eta(s) = \eta(0) + \eta'(0)s + \tfrac{1}{2}\eta''(\xi)s^2 \geq \lambda s \quad (0 < \xi < s)$$

$$\omega(s) \equiv s\eta' - \eta = \omega(0) + \omega'(\xi_1)s = \xi_1\eta''(\xi_1)s \geq 0 \quad (0 < \xi_1 < s)$$

Данным условиям удовлетворяют, например, следующие функции, используемые в теории установившейся ползучести [5]:

$$\eta = B\left[\exp\left(\frac{\lambda s}{B}\right) - 1\right], \quad \eta = B\,\mathrm{sh}\left(\frac{\lambda s}{B}\right), \quad \eta = \frac{Bs}{B/\lambda - s}$$

Заметим, что известная функция $\eta = Bs^n$ при $n > 1$ не удовлетворяет неравенствам (3.6) при $s = 0$.

Если $(\eta/s)' \leq 0$, то вследствие неравенства $(a_{klmn}\sigma^*_{mn}\Delta\sigma_{kl})^2 \leq (a_{klmn}\sigma^*_{kl}\sigma^*_{mn}) \times (a_{klmn}\Delta\sigma_{kl}\Delta\sigma_{mn}) = s^2_* a_{klmn}\Delta\sigma_{kl}\Delta\sigma_{mn}$ достаточным для выполнимости (3.2) условием, как видно из (3.5), является $\eta/s + s(\eta/s)' = \eta' \geq \lambda$. В этом случае

$$\eta/s \geq \eta' \geq \lambda \tag{3.7}$$

Как и в п. 2, доказательство непрерывной зависимости решения от исходных данных проведем только для задачи 3. Предположим, что остаточные перемещения $u^{\vee}_{k*}$ на S при $t = t_*$ изменились на $\Delta u^{\vee}_{k*}$. Получим оценку для приращений внешних нагрузок Δp_{k0} $(k = 1, 2, 3)$. В качестве нормы для $\Delta u^{\vee}_{k*}$ на S можно выбрать величину

$$\|\Delta \mathbf{u}^{\vee}_*\| = \left(\int_v \frac{1}{2} a_{klmn}\Delta\sigma^{\vee e}_{kl*}\Delta\sigma^{\vee e}_{mn*}\,dv\right)^{1/2}$$

где $\Delta\sigma^{\vee e}_{kl*}$ — поле упругих напряжений, соответствующих перемещениям $\Delta\bar{u}^{\vee}_{k*}$ на S [4, 5]. Очевидно, что для оценки Δp_k на S можно принять

$$\|\Delta p\| = \|\Delta \mathbf{u}^e\| = \left(\int_v \frac{1}{2} a_{klmn}\Delta\sigma^e_{kl}\Delta\sigma^e_{mn}\,dv\right)^{1/2}$$

где Δu^e_k — упругие перемещения на S, а $\Delta\sigma^e_{kl}$ упругие напряжения в v, соответствующие нагрузкам Δp_k.

Вследствие (2.7), (2.5), (3.1) будем иметь

$$2\varphi_0\|\Delta \mathbf{u}^e_0\|^2 \leq U_0 + V_0 + V_* + \int_v \int_0^{t_*} \Delta\dot{\varepsilon}^N_{kl}\Delta\sigma_{kl}\,dt\,dv \leq \int_S \Delta u^{\vee}_{k*}\Delta p_{k0}\,dS =$$

$$= \int_v a_{klmn}\Delta\sigma^{\vee e}_{mn*}\,\Delta\sigma^e_{kl0}\,dv = 2(\Delta \mathbf{u}^{\vee}_*, \Delta \mathbf{u}^e_0) \leq 2\|\Delta \mathbf{u}^{\vee}_*\|\cdot\|\Delta \mathbf{u}^e_0\|, \quad \varphi_0 = \int_0^{t_0} \lambda f^2\,dt \tag{3.8}$$

Здесь учитывалось, что

$$\int_v \int_0^{t_*} \Delta\dot{\varepsilon}^N_{kl}\Delta\sigma_{kl}\,dt\,dv \geq \int_0^{t_*} 2\lambda\|\Delta \mathbf{u}^e\|^2\,dt \geq \int_0^{t_0} 2\lambda\|\Delta \mathbf{u}^e\|^2\,dt = 2\varphi_0\|\Delta \mathbf{u}^e_0\|^2$$

поскольку $\Delta\sigma^e_{kl} = f(t)\,\Delta\sigma_{kl0}$, а также использовалось известное неравенство для скалярного произведения векторов $\mathrm{x} = \{x_{kl}\}$ и $\mathrm{y} = \{y_{kl}\}$:

$$(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \le (\mathrm{x}, \mathrm{x})^{1/2} (\mathrm{y}, \mathrm{y})^{1/2}, \quad (\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \int_v \frac{1}{2} a_{klmn} x_{kl} y_{mn}\, dv$$

Из (3.8) вытекает оценка, гарантирующая непрерывную зависимость внешних нагрузок p_{k0} от $u^{\vee}_{k*}$: $\|\Delta u^e_0\| \le \|\Delta u^{\vee}_*\|/\varphi_0$.

Не останавливаясь на выкладках, отметим, что для задачи *2* при выполнимости неравенства (3.2) имеет место следующая оценка:

$$\|\Delta u^e_*\| \le \beta \|\Delta u_*\|, \quad \beta = 1 - \exp\left(-\int_0^{t_*} \lambda\, dt\right) \int_0^{t_*} \lambda f \exp\left(\int_0^t \lambda\, d\tau\right) dt \quad (0 < \beta < 1) \quad (3.9)$$

При условии (3.1) будем иметь неравенство (3.9), в котором

$$\beta = \left(\int_0^{t_*} \frac{(\dot f)^2}{2\lambda}\, dt\right)^{1/2}$$

Будем считать, как и в (3.9), что и в этом случае $\beta < 1$ (что накладывает ограничение на производную $\dot f(t)$). Поскольку $\|\Delta \mathrm{u}_*\| = \|\Delta \mathrm{u}^e_* + \Delta \mathrm{u}^{\vee}_*\| \le \|\Delta \mathrm{u}^e_*\| + \|\Delta \mathrm{u}^{\vee}_*\| \le \beta \|\Delta \mathrm{u}_*\| + \|\Delta \mathrm{u}^{\vee}_*\|$, отсюда получается требуемая оценка для приращения перемещений Δu_{k*} через приращения остаточных перемещений $\|\Delta \mathrm{u}_*\| \le \|\Delta \mathrm{u}^{\vee}_*\|/(1 - \beta)$.

Для задачи 4 также имеет место непрерывная зависимость внешних нагрузок от остаточных перемещений, причем в случае монотонного изменения последних, т. е. при $u^{\vee}_k = f(t)\, u^{\vee}_{k*}$ на S, где $f(t)$ — заданная функция ($f(0) = 0, \dot f(t) \ge 0$, $f(t_*) = 1$) справедлива оценка, аналогичная (3.9):

$$\|\Delta u^e\|_1 \le \|\Delta u\|_1/(1 + \gamma) \quad (3.10)$$

$$\|\ldots\|_1^2 = \int_0^{t_*} \dot f/f \|\ldots\|^2\, dt, \quad \gamma = \lambda f/\dot f\,|_{t=t_1} \quad (0 < t_1 < t_*)$$

Поскольку $\|\Delta \mathrm{u}\|_1 \le \|\Delta \mathrm{u}^e\|_1 + \|\Delta \mathrm{u}^{\vee}\|_1$, из (3.10) следует, что $\|\Delta \mathrm{u}^e\|_1 \le \|\Delta \mathrm{u}^{\vee}\|_1/\gamma$.

4. Остановимся на вопросах, связанных с существованием решений рассмотренных выше задач и с построением итерационных методов их решения. Для того, чтобы сохранить прежние обозначения, будем понимать под v область в R^3 с границей S, удовлетворяющей необходимым условиям гладкости [7]. Используемые ниже пространства определены в [7].

Пусть на S заданы компоненты вектора перемещений $u_k \in H^{1/2}(S)$. Тогда в области v для решения в перемещениях соответствующей упругой задачи будем иметь $u_k \in H^1(v)$. Получаемое при этом на S распределение внешних нагрузок $p_k \in H^{-1/2}(S)$. Каждому вектору перемещений u_k на S можно поставить в соответствие используемую ранее норму

$$\|\mathrm{u}\| = \left(\int_v \frac{1}{2} a_{klmn} \bar\sigma^e_{kl} \bar\sigma^e_{mn}\, dv\right)^{1/2} = \left(\int_v \frac{1}{2} b_{klmn} \bar\varepsilon^e_{kl} \bar\varepsilon^e_{mn}\, dv\right)^{1/2}$$

где $\bar{\varepsilon}^e_{kl} = a_{klmn}\bar{\sigma}^e_{mn}$, b_{klmn} — компоненты тензора, обратного к a_{klmn} т. е. $a_{klmn}b_{klij} = \delta_{im}\delta_{jn}$, так что $\bar{\sigma}^e_{kl} = b_{klmn}\bar{\varepsilon}^e_{mn}$. Как известно [7], при отсутствии жестких смещений (а это будет предполагаться всюду в дальнейшем) норма $\|u\|_{H^1(v)}$ эквивалентна $\|u\|$. Поэтому величины $u_k \in H^{1/2}(S)$ можно рассматривать как элементы банахова пространства U с нормой $\|u\|$. Аналогичным образом можно ввести норму для вектора внешних нагрузок p_k на S:

$$\|\mathbf{p}\| = \left(\int_v \frac{1}{2} a_{klmn}\sigma^e_{kl}\sigma^e_{mn}\, dv\right)^{1/2} = \left(\int_v \frac{1}{2} b_{klmn}\varepsilon^e_{kl}\varepsilon^e_{mn}\, dv\right)^{1/2} = \|\mathbf{u}^e\|$$

т. е. величины $p_k \in H^{-1/2}(S)$ можно рассматривать как элементы банахова пространства **P** с указанной нормой.

Рассмотрим вначале задачу 2, которая сводится к решению векторного уравнения

$$\mathbf{u}_* = \mathbf{F}(\mathbf{u}_*) \quad \text{на} \quad S, \quad \mathbf{F}(\mathbf{u}_*) = \mathbf{u}^e_*(\mathbf{u}_*) + \mathbf{u}^\vee_* \tag{4.1}$$

Пусть $\mathbf{u}^\vee_* \in \mathbf{U}$, т. е. $\|\mathbf{u}^\vee_*\| < \infty$. Оператор **F** из (4.1) переводит каждый элемент $\mathbf{u}^\vee_* \in \mathbf{U}$ в элемент этого же пространства, поскольку согласно (3.9) $\|\mathbf{u}^e_*\| < \|\mathbf{u}_*\|$, поэтому $\|\mathbf{F}(\mathbf{u}_*)\| \le \|\mathbf{u}^e_*\| + \|\mathbf{u}^\vee_*\| < \infty$. Кроме того, указанный оператор при сделанных в п. 3 предположениях является сжимающим, так как $\|\Delta\mathbf{F}\| = \|\Delta\mathbf{u}^e_*\| \le \beta\|\Delta\mathbf{u}_*\|$ $(0 < \beta < 1)$ вследствие (3.9). На основании известного принципа сжимающих отображений [8] приходим к выводу, что существует единственное решение $\mathbf{u}_* \in \mathbf{U}$ уравнения (4.1), причем это решение может быть получено как предел последовательности $\{\mathbf{u}^n_*\}$, где

$$\mathbf{u}^{n+1}_* = \mathbf{F}(\mathbf{u}^n_*) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4.2}$$

а $\mathbf{u}^0_*$ — произвольный элемент из U.

Итерационный процесс (4.2), приводящий на каждой итерации к аналогичной прямой задаче, может быть применен для построения приближенных решений рассматриваемой обратной задачи. При этом скорость сходимости последовательных приближений к точному решению дается известным неравенством [8] $\|\mathbf{u}^n_* - \mathbf{u}_*\| \le \beta^n/(1-\beta)\|\mathbf{u}^1_* - \mathbf{u}^0_*\|$. Некоторые примеры таких построений в случае релаксационных обратных задач, когда $f(t) = 0$ при $t_0 < t < t_*$ $(t_0 \to 0)$, приведены в [4, 9].

Совершенно аналогично, задача 4 сводится к решению уравнения

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}_1(\mathbf{u}) \quad \text{на} \quad S, \quad \mathbf{F}_1(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^e(\mathbf{u}) + \mathbf{u}^\vee$$

Если $u^\vee \in U \times [0, t_*]$, то для случая, когда $u^\vee = f(t)\, u^\vee_*$, оператор $\mathbf{F}_1$ вследствие (3.10) будет сжимающим. Тогда из принципа сжимающих отображений вытекает, что существует единственное решение $\mathbf{u} \in \mathbf{U} \times [0, t_*]$ указанного уравнения, являющееся пределом последовательности $\{\mathbf{u}^n\}$, где $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{F}_1(\mathbf{u}^n)$, а $\mathbf{u}^0$ — произвольный элемент из $U \times [0, t_*]$.

Рассмотрим теперь задачи *1*, *3*, которые также можно свести к решению уравнений типа (4.1), однако соответствующие операторы в этом случае не будут сжимающими. Поэтому для исследования вопросов существования решений и построения итерационных процессов нужны другие соображения. Для этого предположим, что для необратимых деформаций ε^N_{kl} наряду с (3.1) выполняется также неравенство (при тех же предположениях при $t = 0$ что и в (1.9)):

$$\int_0^t \Delta\dot{\varepsilon}^N_{kl}\Delta\sigma_{kl}\, dt \ge \int_0^t \lambda_1 b_{klmn}\Delta\dot{\varepsilon}^N_{kl}\Delta\dot{\varepsilon}^N_{mn}\, dt, \quad \lambda_1 = \lambda_1(t) > 0 \tag{4.3}$$

где компоненты b_{klmn} определены выше.

В качестве примера получим достаточные условия выполнимости (4.3), а точнее, неравенства

$$\Delta\dot{\varepsilon}^N_{kl}\Delta\sigma_{kl} \geq \lambda_1 b_{klmn}\Delta\dot{\varepsilon}^N_{kl}\Delta\dot{\varepsilon}^N_{mn}, \quad \lambda_1 > 0 \tag{4.4}$$

для скоростей необратимых деформаций, определенных согласно (3.3). Из (3.3) имеем $\dot{\varepsilon}^N_{kl} = (\eta/s)\ a_{klmn}\sigma_{mn}$, отсюда $\sigma_{kl} = (s/\eta)\ b_{klmn}\dot{\varepsilon}^N_{mn}$ $(k, l = 1, 2, 3)$. Тогда с учетом (3.3) получим

$$\dot{\varepsilon}^N_{kl}\sigma_{kl} = \eta s = (s/\eta)\ b_{klmn}\dot{\varepsilon}^N_{kl}\dot{\varepsilon}^N_{mn}$$

Откуда следует $\eta = (b_{klmn}\dot{\varepsilon}^N_{kl}\dot{\varepsilon}^N_{mn})^{1/2}$ и $\sigma_{kl} = s\partial\eta/\partial\dot{\varepsilon}^N_{kl}$, где $s = s(\eta)$ — функция, обратная по отношению к введенной в (3.5); она существует вследствие монотонности функции $\eta = \eta(s)$, что видно из (3.6) или (3.7). Тогда рассуждения, аналогичные приведенным в п. 3, дают

$$\Delta\dot{\varepsilon}^N_{kl}\Delta\sigma_{kl} = (s/\eta)_* b_{klmn}\Delta\dot{\varepsilon}^N_{kl}\Delta\dot{\varepsilon}^N_{mn} + \eta_*^{-1}(s/\eta)'_*\,(b_{klmn}\dot{\varepsilon}^{N*}_{mn}\Delta\dot{\varepsilon}^N_{kl})^2 \tag{4.5}$$

где штрих означает дифференцирование по η.

Если $(\eta/s)_s' \geq 0$, т. е. имеет место (3.6), то, как легко видеть, $(s/\eta)_\eta' \leq 0$, и из (4.5) (по аналогии с (3.5)) следует, что достаточным для выполнимости (4.4) будет условие $s/\eta + \eta\,(s/\eta)_\eta' = s_\eta' \geq \lambda_1$ или $\eta_s' \leq \lambda_1^{-1}$.

В частности, последнему неравенству будут удовлетворять такие функции $\eta = \eta(s)$, для которых $\eta''(s) \geq 0$, при $\lambda_1 = 1/\eta'(\sigma_b)$, поскольку $s < \sigma_b$, где σ_b — предел прочности (или при $\lambda_1 = 1/\eta'(\sigma_T)$, где σ_T — предел текучести, если пластические деформации ε^p_{kl} отсутствуют).

Если же $(\eta/s)_s' \leq 0$, то $(s/\eta)_\eta' \geq 0$, и из (4.5) видно, что для выполнимости (4.4) достаточно, чтобы $s/\eta \geq \lambda_1$. Поскольку $(s/\eta)_\eta' = (\eta/\eta_s' - s)/\eta^2 \geq 0$, то $\eta_s' \leq \eta/s \leq \lambda_1^{-1}$.

Объединяя эти условия с (3.6) и (3.7), получим, что для соотношений (3.3) неравенства (3.1) и (4.3) будут выполняться одновременно, если $\lambda \leq \eta/s \leq \eta'(s) \leq \lambda_1^{-1}$ или $\lambda \leq \eta'(s) \leq \eta/s \leq \lambda_1^{-1}$.

Кроме полученных ранее неравенств (3.8) для дальнейшего будут необходимы оценки для $\|\Delta\mathbf{u}^{\vee}_*\|$, которые установим ниже, используя (4.3). Обозначим, как и выше, через $\Delta\sigma^{\vee e}_{kl}$ поле упругих напряжений, соответствующих перемещениям $\Delta u^{\vee}_{k*}$ на S, а через $\Delta p^{\vee}_{k*}$ — внешние нагрузки, соответствующие напряжениям $\Delta\sigma^{\vee e}_{kl*}$, т. е. $\Delta p^{\vee}_{k*} = \Delta\sigma^{\vee e}_{kl*}n_l$ на S.

Тогда будем иметь

$$\|\Delta\mathbf{u}^{\vee}_*\|^2 = \frac{1}{2}\int_S \Delta u^{\vee}_{k*}\Delta p^{\vee}_{k*}\,dS = \frac{1}{2}\int_v \Delta\varepsilon^N_{kl*}\Delta\sigma^{\vee e}_{kl*}\,dv =$$

$$= \frac{1}{2}\int_v\int_0^{t_*}\Delta\sigma^{\vee e}_{kl*}\,\Delta\dot{\varepsilon}^N_{kl}\,dt\,dv = \frac{1}{2}\int_v\int_0^{t_*}\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\,a_{klmn}\Delta\sigma^{\vee e}_{mn*}\,\times$$

$$\times\sqrt{\lambda_1}\,b_{klij}\Delta\dot{\varepsilon}^N_{ij}\,dt\,dv \leq \frac{1}{2}\left(\int_v\int_0^{t_*}\lambda_1^{-1}a_{klmn}\Delta\sigma^{\vee e}_{kl*}\Delta\sigma^{\vee e}_{mn*}\,dt\,dv\right)^{1/2}\times$$

$$\times \left(\int_v \int_0^{t_*} \lambda_1 a_{klmn} (b_{klij} \Delta \dot{\varepsilon}_{ij}^N)(b_{mnpq} \Delta \dot{\varepsilon}_{pq}^N)\, dt\, dv \right)^{1/2} =$$

$$= \|\Delta \mathbf{u}_*^\vee\| \left(\frac{1}{2} \int_0^{t_*} \lambda_1^{-1}\, dt \right)^{1/2} \left(\int_v \int_0^{t_*} \lambda_1 b_{klmn} \Delta \dot{\varepsilon}_{kl}^N \Delta \dot{\varepsilon}_{mn}^N\, dt\, dv \right)^{1/2}$$

Отсюда найдем

$$\|\Delta \mathbf{u}_*^\vee\| \le \left(\int_0^{t_*} \frac{1}{2} \lambda_1^{-1}\, dt \right)^{1/2} I_1, \quad I_1 = \left(\int_v \int_0^{t_*} \lambda_1 b_{klmn} \Delta \dot{\varepsilon}_{kl}^N \Delta \dot{\varepsilon}_{mn}^N\, dt\, dv \right)^{1/2} \tag{4.6}$$

Оценим величину I_1 из (4.6) для задачи 3 (частным случаем которой при $t_0 = t_*$ является задача 1). Вследствие (2.7), (2.5) и (4.3) будем иметь

$$I_1^2 \le \int_v \int_0^{t_*} \Delta \dot{\varepsilon}_{kl}^N \Delta \sigma_{kl}\, dt\, dv \le \int_S \Delta u_{k*}^\vee \Delta p_{k0}\, dS = \int_v \Delta \varepsilon_{kl*}^\vee \Delta \sigma_{kl0}^e\, dv = \int_v \Delta \varepsilon_{kl*}^N \Delta \sigma_{kl0}^e\, dv =$$

$$= \int_v \int_0^{t_*} \Delta \dot{\varepsilon}_{kl}^N \Delta \sigma_{kl0}^e\, dt\, dv \le \left(\int_0^{t_*} 2\lambda_1^{-1} \|\Delta \mathbf{u}_0^e\|^2\, dt \right)^{1/2} I_1 = \|\Delta u_0^e\| \left(\int_0^{t_*} 2\lambda_1^{-1}\, dt \right)^{1/2} I_1$$

Отсюда ввиду (4.6) найдем

$$\|\Delta \mathbf{u}_*^\vee\| \le \psi_0 \|\Delta u_0^e\|, \quad \psi_0 = \int_0^{t_*} \lambda_1^{-1}\, dt \tag{4.7}$$

Рассмотрим следующий итерационный процесс (индекс l относится к упругим перемещениям):

$$\mathbf{u}_{l0}^{n+1} = \mathbf{u}_{l0}^n - \varepsilon (\mathbf{u}_*^{\vee n} - \mathbf{u}_*^\vee) \quad \text{на} \quad S \tag{4.8}$$

Пусть $\mathbf{u}_*^\vee \in \mathbf{U}$. Возьмем произвольный элемент $\mathbf{u}_{l0}^0 \in \mathbf{U}$. Из (4.7) следует, что $\|\mathbf{u}_*^{\vee 0}\| \le \psi_0 \|\mathbf{u}_{l0}^0\|$, т. е. $\mathbf{u}_*^{\vee 0} \in \mathbf{U}$. Отсюда видно, что при любом n элементы последовательности (4.8) будут принадлежать пространству U.

Из (4.8) с учетом (3.8) и (4.7) получим

$$\|\mathbf{u}_{l0}^{m+1} - \mathbf{u}_{l0}^{n+1}\|^2 = \|\mathbf{u}_{l0}^m - \mathbf{u}_{l0}^n\|^2 - 2\varepsilon (\mathbf{u}_{l0}^m - \mathbf{u}_{l0}^n, \mathbf{u}_*^{\vee m} - \mathbf{u}_*^{\vee n}) + \tag{4.9}$$

$$+ \varepsilon^2 \|\mathbf{u}_*^{\vee m} - \mathbf{u}_*^{\vee n}\|^2 \le (1 - 2\varepsilon\varphi_0 + \varepsilon^2 \psi_0^2) \|\mathbf{u}_{l0}^m - \mathbf{u}_{l0}^n\|^2$$

Видно, что последовательность (4.8) является фундаментальной, если $-2\varepsilon\varphi_0 + \varepsilon^2\psi_0^2 < 0$, т. е. при $0 < \varepsilon < 2\varphi_0/\psi_0^2$, причем максимальная скорость сходимости соответствует значению $\varepsilon = \varphi_0/\psi_0^2$, при котором $1 - 2\varepsilon\varphi_0 + \varepsilon^2\psi_0^2 = 1 - \varphi_0^2/\psi_0^2$. В силу полноты пространства $\mathbf{U}$ существует

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{u}_{l0}^n = \mathbf{u}_{l0} \in \mathbf{U}$$

при этом согласно (4.8) $\lim \mathbf{u}_*^{\vee n} = \mathbf{u}_*^\vee$ при $n \to \infty$. Как отмечалось выше, элемент $u_{l0} \in U$ однозначно определяет элемент $p_0 \in P$.

Соотношения (4.8) могут служить для построения приближенных решений задачи 3. Поскольку вследствие (4.9) $\|\mathbf{u}_{l0}^{n+1} - \mathbf{u}_{l0}^n\| \le \delta \|\mathbf{u}_{l0}^n - \mathbf{u}_{l0}^{n-1}\|$, $\delta = (1 - 2\varepsilon\varphi_0 + \varepsilon^2\psi_0^2)^{1/2} < 1$, то можно показать [8], что скорость сходимости последовательных приближений к точному решению аналогична отмеченной выше в задаче 2 $\|\mathbf{u}_{l0}^n - \mathbf{u}_{l0}\| \le \delta^n/(1 - \delta) \|\mathbf{u}_{l0}^1 - \mathbf{u}_{l0}^0\|$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Цвелодуб И. Ю.* Обратная задача теории ползучести для неупрочняющегося тела//Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР. 1984. Вып. 66. С. 126—137.
2. *Цвелодуб И. Ю.* Об одной обратной задаче теории ползучести//Изв. АН АрмССР. Механика. 1987. № 3. С. 33—40.
3. *Цвелодуб И. Ю.* Об одном классе обратных задач теории ползучести//ПМТФ. 1989. № 2. С. 163—173.
4. *Сухоруков И. В., Цвелодуб И. Ю.* Итерационный метод решения релаксационных обратных задач//Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 3. С. 93—101.
5. *Цвелодуб И. Ю.* Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1991. 201 с.
6. *Соломещ М. А.* Об одном неравенстве в теории пластического течения//Вестн. МГУ. Сер. 1. Механика, математика. 1965. № 3. С. 70—76.
7. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.
8. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
9. *Цвелодуб И. Ю., Сухоруков И. В.* Некоторые обратные задачи упругопластического формоизменения пластин//Моделирование в механике. Новосибирск: ВЦ и ИТПМ СО АН СССР. 1990. Т. 4(21). № 4. С. 153—159.

Новосибирск

Поступила в редакцию
1.IV.1993