МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1995

УДК 539.374

 Ю. Г. МАРКОВ, И. В. СКОРОБОГАТЫХ

О КОЛЕБАНИЯХ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ВЯЗКОУПРУГОГО ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОВЕРХНОСТНОЙ НАГРУЗКИ

Рассматриваются колебания осесимметричного вязкоупругого тела с твердой вставкой, вращающегося вокруг оси симметрии под действием следящей нагрузки, направленной по нормали к поверхности тела. В первом приближении метода усреднения показано, что пульсирующая нагрузка специального вида может компенсировать потери энергии вследствие вязкого трения в материале при колебаниях на выбранной собственной форме.

1. Постановка задачи. Рассматривается механическая система, представляющая собой составной объект, образованный жесткой вставкой и осесимметричным вязкоупругим телом. Общая граница между телами также обладает свойством осевой симметрии (фиг. 1). Считается, что материал однородного и изотропного деформируемого тела с постоянной плотностью ρ удовлетворяет модели Кельвина—Фойгта линейной теории вязкоупругости. Для описания деформаций вводится система координат $Ox_1x_2x_3$ с центром в точке O, принадлежащей вставке и лежащей на оси симметрии x_3. Эта система координат жестко связана со вставкой.

Пусть в вязкоупругом теле возбуждены колебания, а твердая вставка приведена во вращение относительно инерциального пространства с абсолютной угловой скоростью ω, направленной вдоль оси x_3. Ставится задача изучить колебания вязкоупругого тела под действием поверхностной следящей нагрузки $\mathbf{P}$, направленной по нормали к деформированной поверхности тела. В дальнейшем будем предполагать, что модуль силы не зависит от точки ее приложения и является некоторой функцией времени.

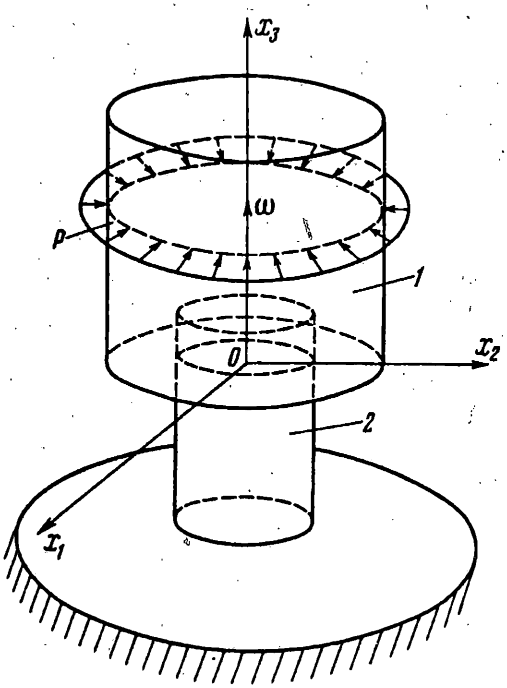
Отметим, что рассматриваемая задача близка по тематике к вопросам динамики волновых твердотельных гироскопов, изучавшимся во многих работах, в частности в [1—3].

Уравнения движения получим из принципа Даламбера—Лагранжа

$$\int_{\Omega_0} \rho\, [\ddot{\mathbf{u}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}) + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u})] + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{\rho} \nabla E\, [\mathbf{u}] + $$

$$+ \frac{1}{\rho} \nabla D\, [\dot{\mathbf{u}}]]\, \delta\mathbf{u}\, dx - \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{P}\delta\mathbf{u}\, d\sigma = 0 \qquad (1.1)$$

Здесь $\nabla E\,[\mathbf{u}]$ — градиент квадратичного функционала упругих деформаций; $\nabla D\,[\dot{\mathbf{u}}]$ — градиент диссипативного функционала; $D\,[\dot{\mathbf{u}}] = \chi\zeta E\,[\dot{\mathbf{u}}]$, $1 \gg \chi > 0$, $\zeta > 0$ — определяющее соотношение модели Кельвина—Фойгта; $\mathbf{u}\,(\mathbf{r}, t)$ — смещение точки, в недеформированном состоянии занимавшей положение $\mathbf{r}$, $\mathbf{r} \in \Omega_0$, где Ω_0 — область, занимаемая вязкоупругой частью в недеформированном состоянии; $\partial\Omega_0$ — свободная граница Ω_0, на которой действует поверхностная нагрузка; $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{e}_3$.



Фиг. 1

Используем представление смещения $\mathbf{u}$ в виде [3]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{j,\, l=0}^{\infty} (q_{jl}(t)\, \mathbf{V}_{jl}(\mathbf{r}) + p_{jl}(t)\, \mathbf{W}_{jl}(\mathbf{r}))$$

где q_{jl}, p_{jl} — нормальные координаты, а $\mathbf{V}_{jl}$ и $\mathbf{W}_{jl}$ — ортонормированные собственные формы свободных колебаний (в цилиндрической системе координат)

$$\mathbf{V}_{jl} = (U_{jl}(r, z) \sin j\varphi,\ \ V_{jl}(r, z) \cos j\varphi,\ \ W_{jl}(\mathbf{r}, z) \sin j\varphi),$$

$$\mathbf{W}_{jl} = (U_{jl}(r, z) \cos j\varphi,\ \ -V_{jl}(r, z) \sin j\varphi,\ \ W_{jl}(\mathbf{r}, z) \cos j\varphi).$$

Получим выражение для силы $\mathbf{P}$, пересчитанной к координатам недеформированного тела. Истинная сила $\mathbf{P}^*$ направлена по нормали к деформированной поверхности и имеет постоянный модуль P в каждой точке поверхности, откуда $\mathbf{P} = \mathbf{P}^* (g_u/g)^{1/2} = P\mathbf{n}\,(g_u/g)^{1/2}$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали, g_u и g — определители матриц метрических тензоров деформированной и недеформированной поверхностей. При этом имеет место равенство

$$\int_{\partial\Omega_0} \mathbf{P}\, d\sigma = \int_{\partial\Omega_u} \mathbf{P}^*\, d\sigma_u$$

где $\partial\Omega_u$ — деформированная поверхность вязкоупругого тела, а $d\sigma_u$ — ее элемент.

Определим единичный вектор нормали $\mathbf{n}$. Пусть радиус-вектор точки, находящейся на границе тела, есть $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{u} = \mathbf{r} + \sum_{j,\, l=0}^{\infty} (q_{jl}\mathbf{V}_{jl} + p_{jl}\mathbf{W}_{jl})$$

где радиус-вектор $\mathbf{r}$ пробегает границу тела.

Касательные векторы к деформированной поверхности $\tau_\varphi = \partial \mathbf{R}/\partial\varphi$, $\tau_z = \partial \mathbf{R}/\partial z$ в цилиндрической системе координат имеют вид

$$\tau_\varphi = \begin{Vmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{Vmatrix} + \sum_{j,\,l=0}^{\infty} \left[q_{ij} \begin{Vmatrix} U_{jl}' \cos j\varphi \\ -V_{jl}' \sin j\varphi \\ W_{jl}' \cos j\varphi \end{Vmatrix} - p_{jl} \begin{Vmatrix} U_{jl}' \sin j\varphi \\ V_{jl}' \cos j\varphi \\ W_{jl}' \sin j\varphi \end{Vmatrix} \right]$$

$$U_{jl}' = jU_{jl} - V_{jl},\ V_{jl}' = jV_{jl} - U_{jl},\ W_{jl}' = jW_{jl}$$

$$\tau_z = \begin{Vmatrix} \frac{\partial r}{\partial z} \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} + \sum_{j,\,l=0}^{\infty} \left[q_{jl} \begin{Vmatrix} \frac{\partial U_{jl}}{\partial z} \sin j\varphi \\ \frac{\partial V_{jl}}{\partial z} \cos j\varphi \\ \frac{\partial W_{jl}}{\partial z} \sin j\varphi \end{Vmatrix} + p_{jl} \begin{Vmatrix} \frac{\partial U_{jl}}{\partial z} \cos j\varphi \\ -\frac{\partial V_{jl}}{\partial z} \sin j\varphi \\ \frac{\partial W_{jl}}{\partial z} \cos j\varphi \end{Vmatrix} \right]$$

Единичный вектор нормали будет равен $\mathbf{n} = \tau_\varphi \times \tau_z / |\tau_\varphi \times \tau_z|$, $|\tau_\varphi \times \tau_z| = \sqrt{g_u}$. Используя соотношения

$$\int\limits_{\partial\Omega_0} \mathbf{P}\delta\mathbf{u} \sqrt{g}\, d\varphi dz = \int\limits_{\partial\Omega_0} \mathbf{P}^*\delta\mathbf{u} \sqrt{g_u}\, d\varphi dz,\ \ \mathbf{P} = \mathbf{P}^* \sqrt{g_u}/\sqrt{g}$$

получим

$$\mathbf{P} = \frac{\tau_\varphi \times \tau_z}{\sqrt{g_u}} P \frac{\sqrt{g_u}}{\sqrt{g}} = \frac{\tau_\varphi \times \tau_z}{\sqrt{g}}$$

В дальнейшем в выражении для $\mathbf{P}$ ограничимся членами, линейными по q_{jl}, p_{jl}. Тогда будем иметь

$$\mathbf{P} \approx \frac{1}{r(1 + (\partial r/\partial z)^2)} \begin{Vmatrix} r + \sum\limits_{j,\,l=0}^{\infty} (-q_{jl}V_{jl}' \sin j\varphi - p_{jl}V_{jl}' \cos j\varphi) + \\ + r \sum\limits_{j,\,l=0}^{\infty} \frac{\partial W_{jl}}{\partial z} (q_{jl} \sin j\varphi + p_{jl} \cos j\varphi) \\ \sum\limits_{j,\,l=0}^{\infty} \left(\frac{\partial r}{\partial z} W_{jl}' - U_{jl}' \right) (q_{jl} \cos j\varphi - p_{jl} \sin j\varphi) \\ - r\frac{\partial r}{\partial z} - r \sum\limits_{j,\,l=0}^{\infty} (q_{jl} \sin j\varphi + p_{jl} \cos j\varphi) + \\ + \frac{\partial r}{\partial z} \sum\limits_{j,\,l=0}^{\infty} (V_{jl}' (q_{jl} \sin j\varphi + p_{jl} \cos j\varphi)) \end{Vmatrix}$$

Принцип Даламбера — Лагранжа (1) перепишется в виде бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\ddot{q}_{0n} + \nu_{0n}^2 q_{0n} + \chi\zeta\nu_{0n}^2 \dot{q}_{0n} + 2\omega \sum_{l=0}^{\infty} N_{00ln}\dot{p}_{0l} = P \sum_{l=0}^{\infty} A_{00ln}q_{0l} \\ &\ddot{p}_{0n} + \nu_{0n}^2 p_{0n} + \chi\zeta\nu_{0n}^2 \dot{p}_{0n} - 2\omega \sum_{l=0}^{\infty} N_{00ln}^*\dot{q}_{0l} = P \sum_{l=0}^{\infty} A_{00ln}^* p_{0l} + S_{0n} \qquad (1.2) \\ &\ddot{q}_{kn} + \nu_{kn}^2 q_{kn} + \chi\zeta\nu_{kn}^2 \dot{q}_{kn} + 2\omega \sum_{l=0}^{\infty} N_{kkln}\dot{p}_{kl} = P \sum_{l=0}^{\infty} A_{kkln}q_{kl} \\ &\ddot{p}_{kn} + \nu_{kn}^2 p_{kn} + \chi\zeta\nu_{kn}^2 p_{kn} - 2\omega \sum_{l=0}^{\infty} N_{kkln}\dot{q}_{kl} = P \sum_{l=0}^{\infty} A_{kkln}p_{kl} \quad (n = 0, 1, \ldots, k = 1, 2, \ldots) \end{aligned}$$

Здесь принято, что вращение происходит с малой постоянной угловой скоростью, и опущены члены с квадратами угловой скорости и с $\dot{\omega}$:

$$N_{kkln} = D_{kkln}(1-\delta_{k0}) + E_{kkln}(1+\delta_{k0}), \quad N^*_{00ln} = 2D_{00ln}$$

$$D_{kkln} = \pi \int V_{kl}U_{kn}dx^*, \quad E_{kkln} = \pi \int V_{kn}U_{kl}dx^*$$

Интегралы в соответствующих формулах берутся по области $\partial\Omega_0^*$ — сечении области $\partial\Omega_0$ плоскостью, проходящей через ось Ox_3:

$$A_{kkln} = A^1_{kkln}(1-\delta_{k0}) + A^2_{kkln}(1+\delta_{k0}), \quad A^*_{00ln} = 2A^1_{00ln}$$

$$A^1_{kkln} = \pi \int\limits_{\partial\Omega_0^*} \left[r\left(\frac{\partial W_{kl}}{\partial z} U_{kn} - \frac{\partial U_{kl}}{\partial z} W_{kn} \right) + V_{kl}' \left(W_{kn}\frac{\partial r}{\partial z} - U_{kn} \right) \right] dz$$

$$A^2_{kkln} = \pi \int\limits_{\partial\Omega_0^*} V_{kn}\left(\frac{\partial r}{\partial z} - W_{kl}' - U_{kl}' \right) dz, \quad S_{0n} = 2\pi P \int\limits_{\partial\Omega_0^*} r\left(U_{0n} - \frac{\partial r}{\partial z} W_{0n} \right) dz$$

Отметим, что если взять $\mathbf{P} = \mathbf{n}p$ (т. е. истинная сила не имеет постоянного модуля в каждой точке поверхности $\mathbf{P}^* = \mathbf{P}\sqrt{g}/\sqrt{g_u}$), то уравнения приняли бы точно такой же вид, только значения коэффициентов A_{kkln}, S_{0n} были бы другими.

2. Анализ уравнений. Исследуем (1.2), положив $\chi = 0$ и $P = \mathrm{const}$. Тогда будем иметь систему с постоянными коэффициентами.

Найдем в первом приближении спектр частот этой системы. Учитывая, что вращение медленное, а поверхностная сила мала, введем безразмерный малый параметр ε так, что $\omega = \Omega\varepsilon$, $P = p\varepsilon$.

Перепишем уравнения в комплексной форме $z_{ij} = q_{ij} + ip_{ij}$, $\bar{z}_{ij} = q_{ij} - ip_{ij}$:

$$\ddot{z}_{kn} + \nu^2_{kn}z_{kn} - 2i\Omega\varepsilon \sum_{l=0}^{\infty} N_{kkln}\dot{z}_{kl} = \varepsilon p \sum_{l=0}^{\infty} A_{kkln}z_{kl}$$

$$\ddot{\bar{z}}_{kn} + \nu^2_{kn}\bar{z}_{kn} + 2i\Omega\varepsilon \sum_{l=0}^{\infty} N_{kkln}\dot{\bar{z}}_{kl} = \varepsilon p \sum_{l=0}^{\infty} A_{kkln}\bar{z}_{kl} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

$$\ddot{z}_{0n} + \nu^2_{0n}z_{0n} + 2\Omega\varepsilon \sum_{l=0}^{\infty} (-in_{00ln}\dot{z}_{ln} + in^*_{00ln}\dot{\bar{z}}_{ln}) = \varepsilon p \sum_{l=0}^{\infty} (a_{00ln}z_{0l} + a^*_{00ln}\bar{z}_{0l}) + iS_{0n}$$

$$\ddot{\bar{z}}_{0n} + \nu^2_{0n}\bar{z}_{0n} + 2\Omega\varepsilon \sum_{l=0}^{\infty} (in_{00ln}\dot{\bar{z}}_{ln} - in^*_{00ln}\dot{z}_{ln}) = \varepsilon p \sum_{l=0}^{\infty} (a_{00ln}\bar{z}_{0l} + a^*_{00ln}z_{0l}) - iS_{0n} \qquad (2.1)$$

$$a_{00ln} = 1/2\,(A_{00ln} + A^*_{00ln}), \quad a^*_{00ln} = 1/2\,(A_{00ln} - A^*_{00ln})$$

$$n_{00ln} = 1/2\,(N_{00ln} + N^*_{00ln}), \quad n^*_{00ln} = 1/2\,(N_{00ln} - N^*_{00ln})$$

Собственные векторы и собственные значения полученной системы представим в виде рядов по степеням малого параметра ε. Опустив члены с S_{0n}, определяющие постоянный прогиб, вызываемый следящий нагрузкой (и не влияющий на динамику упругих колебаний), подставим частное решение

$$\mathbf{e}_{mj}(\varepsilon)\exp(i\nu_{mj}(\varepsilon)t) = \left\| \begin{matrix} e_{mj}^{00} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_{mj}^{kn} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_{mj}^{\vee 00} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_{mj}^{\vee kn} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \right\| \exp(i\nu_{mj}(\varepsilon)t)$$

в систему (2.1). В результате получим

$$\begin{gathered}
-\nu_{mj}^2(\varepsilon)e_{mj}^{kn} + \nu_{kn}^2 e_{mj}^{kn} + 2\Omega\varepsilon\sum_{l=0}^{\infty} N_{kkln}\nu_{mj}(\varepsilon)e_{mj}^{kl} = \varepsilon p\sum_{l=0}^{\infty} A_{kkln}e_{mj}^{kl} \\
-\nu_{mj}^2(\varepsilon)e_{mj}^{\vee kn} + \nu_{kn}^2 e_{mj}^{\vee kn} - 2\Omega\varepsilon\sum_{l=0}^{\infty} N_{kkln}\nu_{mj}(\varepsilon)e_{mj}^{\vee kl} = \varepsilon p\sum_{l=0}^{\infty} A_{kkln}e_{mj}^{\vee kl} \quad (k \ge 1) \\
-\nu_{mj}^2(\varepsilon)e_{mj}^{0n} + \nu_{0n}^2 e_{mj}^{kn} + 2\Omega\varepsilon\sum_{l=0}^{\infty}(n_{00ln}\nu_{mj}(\varepsilon)e_{mj}^{0l} - \\
-n_{00ln}^*\nu_{mj}(\varepsilon)e_{mj}^{\vee 0l}) = \varepsilon p\sum_{l=0}^{\infty}(a_{00ln}e_{mj}^{0l} + a_{00ln}^*e_{mj}^{\vee 0l}) \\
-\nu_{mj}^2(\varepsilon)e_{mj}^{\vee 0n} + \nu_{0n}^2 e_{mj}^{\vee 0n} - 2\Omega\varepsilon\sum_{l=0}^{\infty}(-n_{00ln}\nu_{mj}(\varepsilon)e_{mj}^{\vee 0l} - \\
-n_{00ln}^*\nu_{mj}(\varepsilon)e_{mj}^{0l}) = \varepsilon p\sum_{l=0}^{\infty}(a_{00ln}e_{mj}^{\vee 0l} + a_{00ln}^*e_{mj}^{0l})
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Откуда при $\varepsilon = 0$ будем иметь $-\nu_{mj}^2 e_{mj}^{kn} + \nu_{kn}^2 e_{mj}^{kn} = 0$, $-\nu_{mj}^2 e_{mj}^{\vee kn} + \nu_{kn}^2 e_{mj}^{\vee kn} = 0$, и поскольку $\nu_{mj} \ne \nu_{kn}$ при $\delta_{mk}\delta_{jn} = 0$, то $e_{mj}^{kn} = e_{mj}^{\vee kn} = 0$, если $\delta_{mk}\delta_{jn} = 0$. Продифференцировав предыдущую систему по ε и положив $\varepsilon = 0$, найдем

$$\begin{gathered}
-2\nu_{mj}'\nu_{mj}e_{mj}^{kn} - \nu_{mj}^2 e_{mj}'^{kn} + \nu_{kn}^2 e_{mj}'^{kn} + 2\Omega\sum_{l=0}^{\infty} N_{kkln}\nu_{mj}e_{mj}^{kl} = p\sum_{l=0}^{\infty} A_{kkln}e_{mj}^{kl} \\
-2\nu_{mj}'\nu_{mj}e_{mj}^{\vee kn} - \nu_{mj}^2 e_{mj}'^{\vee kn} + \nu_{kn}^2 e_{mj}'^{\vee kn} - 2\Omega\sum_{l=0}^{\infty} N_{kkln}\nu_{mj}e_{mj}^{\vee kl} = p\sum_{l=0}^{\infty} A_{kkln}e_{mj}^{\vee kl} \quad (k \ge 1) \\
-2\nu_{mj}'\nu_{mj}e_{mj}^{0n} - \nu_{mj}^2 e_{mj}'^{0n} + \nu_{0n}^2 e_{mj}'^{0n} + 2\Omega\sum_{l=0}^{\infty}(n_{00ln}\nu_{mj}e_{mj}^{0l} - \\
-n_{00ln}^*\nu_{mj}e_{mj}^{\vee 0l} = p\sum_{l=0}^{\infty}(a_{00ln}e_{mj}^{0l} + a_{00ln}^*e_{mj}^{\vee 0l})
\end{gathered}$$

$$-2\nu_{mj}'\nu_{mj}e_{mj}^{\vee 0n} - \nu_{mj}^2 e_{mj}'^{\vee 0n} + \nu_{0n}^2 e_{mj}'^{\vee 0n} - 2\Omega \sum_{l=0}^{\infty} (-n_{00ln}\nu_{mj}e_{mj}^{\vee 0l} +$$

$$+ n_{00ln}^{*}\nu_{mj}e_{mj}^{0l}) = p\sum_{l=0}^{\infty} (a_{00ln}e_{mj}^{\vee 0l} + a_{00ln}^{*}e_{mj}^{0l})$$

где штрихом обозначена производная по ε. Отсюда при $m = k$, $j = n$ получим

$$-2\nu_{kn}'\nu_{kn}e_{kn}^{kn} + 2\Omega N_{kknn}\nu_{kn}e_{kn}^{kn} = pA_{kknn}e_{kn}^{kn}$$

$$-2\nu_{kn}'\nu_{kn}e_{kn}^{\vee kn} - 2\Omega N_{kknn}\nu_{kn}e_{kn}^{\vee kn} = pA_{kknn}e_{kn}^{\vee kn} \quad (k \geq 1)$$

Следовательно, либо $e_{kn}^{kn} \neq 0$, $e_{kn}^{\vee kn} = 0$ и

$$\nu_{kn}' = -\tfrac{1}{2}pA_{kknn}\nu_{kn} + \Omega N_{kknn} \qquad (k \geq 1) \tag{2.3}$$

либо $e_{kn}^{kn} = 0$, $e_{kn}^{\vee kn} \neq 0$ и

$$\nu_{kn}' = -\tfrac{1}{2}pA_{kknn}\nu_{kn} - \Omega N_{kknn} \qquad (k \geq 1) \tag{2.4}$$

Для $k = 0$ подобным образом определим

$$\nu_{0n}' = \pm\, [\Omega^2 (n_{00nn}^2 - n_{00nn}^{*2}) + p^2 a_{00nn}^{*2}/4\nu_{0n}^2]^{1/2} + pa_{00nn}/2\nu_{0n}$$

или, учитывая, что $N_{00nn} = N_{00nn}^{*} = 2\pi \int V_{0n}U_{0n}dx^{*}$, будем иметь

$$\nu_{0n}' = \pm \left[\,\Omega^2 N_{00nn}^2 + \frac{p^2 a_{00nn}^2}{4\nu_{0n}^2}\right]^{1/2} + \frac{pa_{00nn}}{2\nu_{0n}} \tag{2.5}$$

В формулах (2.3), (2.4) первый член отвечает за изменение частоты вследствие действия поверхностной нагрузки, он не зависит от угловой скорости вращения. Второй отвечает за процессию волны. Видно, что в (2.3), (2.4) волны процессируют в противоположные стороны. Однако в первом приближении фактически будет лишь одна волна, так как вторая будет процессировать в комплексно сопряженном пространстве. Формула (2.5) показывает, что здесь будут две волны, процессирующие в противоположные стороны (за это отвечает первый член), частота которых изменится (за счет влияния второго).

3. Внутренняя диссипация и ее влияние на процесс колебаний. Одним из наиболее существенных факторов, отличающих идеальную ситуацию от реальной, является наличие диссипативных сил в системе. Исследуем теперь систему при наличии вязкого трения в случае пульсирующей нагрузки P. Используем метод усреднения [2]. Заметим, что при решении уравнений методом усреднения все перекрестные связи каждой пары уравнений с другими исчезают (в первом приближении). Иначе говоря, достаточно исследовать одну пару уравнений, которую снабдим только одним индексом k и представим в виде

$$\ddot{q}_k + \nu_k^2 q_k = f_{q_k} \quad (k \geq 1), \quad \ddot{p}_k + \nu_k^2 p_k = f_{p_k}$$

$$f_{q_k} = -\chi\nu_k^2\dot{q}_k - 2\omega N_k\dot{p}_k + PA_kq_k$$

$$f_{p_k} = -\chi\nu_k^2\dot{p}_k + 2\omega N_k\dot{q}_k + PA_kp_k$$

или

$$\frac{d}{dt}q_k = \dot{q}_k, \quad \frac{d}{dt}(\dot{q}_k) = -\nu_k^2 q_k + f_{q_k}$$

$$\frac{d}{dt}p_k = \dot{p}_k, \quad \frac{d}{dt}(\dot{p}_k) = -\nu_k^2 p_k + f_{p_k}$$

Перейдем к переменным C_{1k}, C_{2k}, C_{1k}', C_{2k}':

$$\begin{Vmatrix} q_k \\ \dot{q}_k \\ p_k \\ \dot{p}_k \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\nu_k t & \sin\nu_k t & 0 & 0 \\ -\nu_k \sin\nu_k t & \nu_k \cos\nu_k t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\nu_k t & \sin\nu_k t \\ 0 & 0 & -\nu_k\sin\nu_k t & \nu_k\cos\nu_k t \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} C_{1k} \\ C_{2k} \\ C_{1k}' \\ C_{2k}' \end{Vmatrix}$$

которые будут удовлетворять системе

$$\dot{C}_{1k} = \frac{1}{\nu_k} f_{q_k} \sin\nu_k t, \quad \dot{C}_{1k}' = -\frac{1}{\nu_k} f_{p_k} \sin\nu_k t$$

$$\dot{C}_{2k} = \frac{1}{\nu_k} f_{q_k} \cos\nu_k t, \quad \dot{C}_{2k}' = \frac{1}{\nu_k} f_{p_k} \cos\nu_k t \tag{3.1}$$

Далее сделаем еще одну замену:

$$C_{1k} = a_k \cos\varphi_k \cos\psi_{k0} + b_k \sin\varphi_k \sin\psi_{k0}$$

$$C_{2k} = a_k \cos\varphi_k \sin\psi_{k0} - b_k \sin\varphi_k \cos\psi_{k0} \tag{3.2}$$

$$C_{1k}' = a_k \sin\varphi_k \cos\psi_{k0} - b_k \cos\varphi_k \sin\psi_{k0}$$

$$C_{2k}' = a_k \sin\varphi_k \sin\psi_{k0} + b_k \cos\varphi_k \cos\psi_{k0}$$

в итоге будем иметь

$$q_k = a_k \cos\varphi_k \cos(\nu_k t - \psi_{k0}) - b_k \sin\varphi_k \sin(\nu_k t - \psi_{k0})$$

$$p_k = a_k \sin\varphi_k \cos(\nu_k t - \psi_{k0}) + b_k \cos\varphi_k \sin(\nu_k t - \psi_{k0}) \tag{3.3}$$

$$\dot{q}_k = -a_k\nu_k \cos\varphi_k \sin(\nu_k t - \psi_{k0}) - b_k\nu_k \sin\varphi_k \cos(\nu_k t - \psi_{k0})$$

$$\dot{p}_k = -a_k\nu_k \sin\varphi_k \sin(\nu_k t - \psi_{k0}) + b_k\nu_k \cos\varphi_k \cos(\nu_k t - \psi_{k0})$$

Дифференциальные уравнения для переменных a_k, b_k, φ_k, ψ_{k0} представим в форме

$$\dot{\varphi}_k = \frac{1}{\nu_k (a_k^2 - b_k^2)} \{a_k \sin(\nu_k t - \psi_{k0}) [f_{q_k} \sin\varphi_k - f_{p_k} \cos\varphi_k] +$$

$$+ b_k \cos(\nu_k t - \psi_{k0}) [f_{q_k} \cos\varphi_k + f_{p_k} \sin\varphi_k]\} \tag{3.4}$$

$$\dot{\psi}_{k0} = (C_{1k} f_{q_k} + C_{1k}' f_{p_k}) \nu_k^{-1} \cos(\nu_k t - \psi_{k0}) - (C_{2k} f_{q_k} + C_{2k}' f_{p_k}) \nu_k^{-1} \sin(\nu_k t - \psi_{k0})$$

$$\dot{a}_k = -\nu_k^{-1} \sin(\nu_k t - \psi_{k0}) (f_{q_k} \cos\varphi_k + f_{p_k} \sin\varphi_k)$$

$$\dot{b}_k = \nu_k^{-1} \cos(\nu_k t - \psi_{k0}) (-f_{q_k} \sin\varphi_k + f_{p_k} \cos\varphi_k)$$

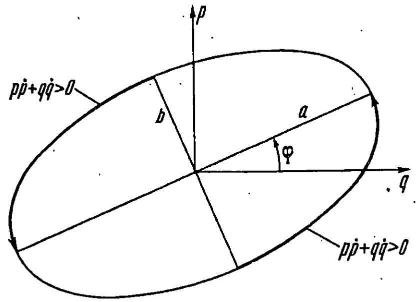
Рассмотрим частный случай колебаний по 2-й собственной форме ($k = 2$). Опуская для краткости индекс 2 и обозначив $\psi = \nu t - \psi_0$, перепишем уравнения (3.4) в виде

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{\nu (a^2 - b^2)} \{PAab \cos 2\psi + 2\omega N\nu (a^2 \sin^2\psi - b^2 \cos\psi) - \zeta\chi ab\nu \sin 2\psi\} \tag{3.5}$$

$$\dot{a} = -\nu^{-1} \sin\psi \, [PAa \cos\psi - 2\omega Nb\nu \cos\psi + \zeta\chi\nu^2 a\nu \sin\psi]$$

$$\dot{b} = \nu^{-1} \cos\psi \, [PAb \sin\psi - 2\omega Na\nu \sin\psi - \zeta\chi\nu^2 b\nu \cos\psi]$$

Уравнение для ψ_0 здесь не приведено, так как оно в дальнейшем не понадобится.



Фиг. 2

Для последующего рассмотрения необходимо уточнить модель действующей поверхностной нагрузки. Пусть она имеет следующий специальный вид:

$$P=\gamma\begin{cases}1-\alpha\langle p^2+q^2\rangle>0\begin{cases}1, & \operatorname{sign}(p\dot p+q\dot q)=1\\ 0\end{cases}\\[2ex] 1-\alpha\langle p^2+q^2\rangle<0\begin{cases}-1, & \operatorname{sign}(p\dot p+q\dot q)=-1\\ 0\end{cases}\end{cases}\qquad(3.6)$$

где α, γ — константы, угловые скобки соответствуют усреднению. В новых переменных получим

$$P=\gamma\begin{cases}1-\frac{\alpha}{2}(a^2+b^2)>0\begin{cases}1, & \operatorname{sign}(\sin 2\psi)\operatorname{sign}(a^2-b^2)=1\\ 0\end{cases}\\[2ex] 1-\frac{\alpha}{2}(a^2+b^2)<0\begin{cases}-1, & \operatorname{sign}(\sin 2\psi)\operatorname{sign}(a^2-b^2)=-1\\ 0\end{cases}\end{cases}\qquad(3.7)$$

Из фиг. 2 видно, что если расстояние изображающей точки (p, q) от начала координат увеличивается

$$\operatorname{sign}\frac{d}{dt}(p^2+q^2)=\operatorname{sign}(p\dot p+q\dot q)>0$$

и если $1-\alpha\langle p^2+q^2\rangle>0$, то действует сила притяжения; если же $1-\alpha\langle p^2+q^2\rangle<0$, то сила притяжения, согласно (3.6), будет действовать, когда расстояние уменьшается, т. е. будет уменьшать амплитуду колебаний. Формула (3.6), как видно из (3.7), учитывает и случай $b>a$ и в этом случае усиливаются колебания в направлении большей оси. Сила вида (3.6) (или (3.7)) стремится поддерживать колебания на постоянной (в среднем) амплитуде и компенсировать потери на трение в материале.

Отметим, что величины a и b — полуоси эллипса, выписываемого изображающей точкой, являются медленными переменными, а переменная ψ — быстрой. Произведем усреднение уравнений (3.5) по переменной ψ.

Поскольку

$$\left\langle P\frac{\sin 2\psi}{2}\right\rangle=-\frac{1}{2\pi}\gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}(a^2+b^2)\right)\begin{cases}1, & \text{если } a^2-b^2>0\\ -1, & \text{если } a^2-b^2<0\end{cases}$$

то после усреднения получим

$$\dot a=-\frac{\zeta\chi\nu^2}{2}a+\frac{A\gamma}{2\pi\nu}a\left(1-\frac{\alpha}{2}(a^2+b^2)\right)\begin{cases}1, & \text{если } a^2-b^2>0\\ -1, & \text{если } a^2-b^2<0.\end{cases}$$

$$\dot b=-\frac{\zeta\chi\nu^2}{2}b-\frac{A\gamma}{2\pi\nu}b\left(1-\frac{\alpha}{2}(a^2+b^2)\right)\begin{cases}1, & \text{если } a^2-b^2>0\\ -1, & \text{если } a^2-b^2<0\end{cases}$$

$$\dot{\varphi} = \omega N \qquad (3.8)$$

Очевидно, что уравнения при $a^2 - b^2 < 0$ совпадают со случаем $a^2 - b^2 > 0$, если переобозначить $a \to b$, $b \to a$. Поэтому можно изучать лишь случай $a^2 - b^2 > 0$.

Третье уравнение системы (3.8) показывает, что в первом приближении метода усреднения волна колебаний прецессирует с угловой скоростью $\frac{1}{2}\omega N$. Первые два уравнения имеют асимптотически устойчивое положение равновесия $a^* = [(1 - \lambda/\mu)\, 2/\alpha]^{1/2}$, где $\lambda = \zeta\chi\nu^2/2$, $\mu = A\gamma/(2\pi\nu)$, $b^* = 0$ (при $a^2 - b^2 > 0$). Это проверяется при помощи уравнений в вариациях. При $a^2 - b^2 < 0$ асимптотически устойчивым положением равновесия будет $a^{**} = 0$, $b^{**} = a^*$. Таким образом, в первом приближении метода усреднения пульсирующая нагрузка специального вида (3.6) будет компенсировать вязкое трение в материале и не повлияет на прецессию волны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 125 с.
2. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
3. *Вильке В. Г.* Об относительном движении осесимметричного упругого тела//Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. 1988. № 3. С. 25—30.

Москва

Поступила в редакцию 24.IV.1993