МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1995

УДК 539.3

© 1995 г. В. А. БАБЕШКО, М. В. ЧЕПИЛЬ

# О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ФАКТОРИЗАЦИИ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ЗАДАЧ ГИДРОУПРУГОСТИ ОПРЕДЕЛЕННОГО ТИПА

Динамические контактные задачи теории упругости вызывают постоянно растущий интерес у исследователей как у нас в стране, так и за рубежом. Это связано с развитием гидроакустики, сейсмологии, фундаментостроения, геофизики, с интенсивным освоением природных ресурсов Мирового океана и так далее. Использование новых конструкций с повышенными требованиями надежности и экономичности сооружений; расчеты поведения сооружений, подвергающихся динамическим (в частности, сейсмическим) воздействиям, обусловливают совершенствование имеющихся методов расчета с целью приближения к реальным условиям. Перечисленные проблемы заставляют рассматривать модели, представляющие собой системы слоев идеальной сжимаемой жидкости или однородных упругих слоев с плоскопараллельными границами раздела, либо их комбинации.

Для решения задач механики твердого деформируемого тела со смешанными граничными условиями были применены такие аналитические методы, как метод факторизации, метод ортогональных полиномов и собственных функций, метод нормальных волн и интегральных преобразований, асимптотические методы и другие, дающие возможность получить решения интегральных уравнений I рода в явном виде и качественно его исследовать.

Сложность рассматриваемого класса задач заключается в необходимости рассмотрения интегральных уравнений с ядрами, обладающими как особенностями, так и осцилляцией, причем для полуограниченных сред требуется корректность формулировки для условий излучения на бесконечности. Краевые задачи в строгой математической постановке и единственность их решения были исследованы [1, 2, 4][1]. В [5] приведены тщательные разработки методов исследования гидроупругих задач различного типа, направленные на выявление особенностей волновых процессов. В публикуемой работе аналитически и численно исследовано распределение контактных напряжений на границе «жидкость — упругая среда».

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим упругое полупространство ($-\infty \leq x_1$, $x_2 \leq \infty$, $-\infty \leq x_3 \leq 0$), на поверхности которого расположен объем жидкости ограниченных размеров ($|x_1| \leq a$, $|x_2| \leq b$, $0 \leq x_3 \leq h$), где $h$ — высота. В некоторой удаленной от объема точке на поверхности упругой среды приложена сосредоточенная периодическая по времени сила $p_0$. Необходимо исследовать действие силы на распределение контактных напряжений.

Пусть положения точек определяются декартовыми координатами $x_1$, $x_2$, $x_3$, координатная плоскость $x_3 = 0$ совпадает с поверхностью полупространства, начало координат совмещено с центром основания объема жидкости.

Перемещения $\mathbf{U} = (u_1, u_2, u_3)$ точек упругой среды описываются дифференциальными уравнениями теории упругости (уравнениями Ламе):

$$(\lambda + \mu)\, \partial\theta/\partial x_i + \mu\Delta u_i = \rho\partial^2 u_i/(\partial t)^2 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

$$\theta = \operatorname{div} \mathbf{U}, \quad x_3 < 0$$

[1] См. также: *М. В. Чепиль.* Динамическая контактная задача для упругого полупространства при наличии ограниченного объема жидкости на его поверхности: Дис. канд. физ.-мат. наук: Ростов н/Д, 1991. 121 с.

при следующих граничных условиях:

$$\sigma_{33} = \lambda\theta + 2\mu\partial u_3/\partial x_3 = q_1(x_1, x_2)\, e^{-i\omega t}$$

$$\sigma_{13} = \mu(\partial u_1/\partial x_3 + \partial u_3/\partial x_1) = \tau_1(x_1, x_2)\, e^{-i\omega t}$$

$$\sigma_{23} = \mu(\partial u_2/\partial x_3 + \partial u_3/\partial x_2) = \tau_2(x_1\, x_2)\, e^{-i\omega t} \text{ при } x_3 = 0 \tag{1.2}$$

$$\mathbf{U} \to 0 \text{ при } x_3 \to -\infty$$

$$q_1(x_1, x_2)\, e^{-i\omega t} = \begin{cases} p_0 = -P_0\delta(x_1 - x_{10}, x_2 - x_{20})\, e^{-i\omega t}, & (x_{10}, x_{20}) = \Sigma_2 \\ q(x_1, x_2)\, e^{-i\omega t}, & |x_1| \le a,\ |x_2| \le b \\ 0, \ (x_1, x_2) \in \Sigma\colon & |x_1| > a \cup x_1 \ne x_{10},\ |x_2| > b \cup x_2 \ne x_{20} \end{cases} \tag{1.3}$$

Здесь $\rho$, $\lambda$, $\mu$ — плотность и коэффициенты Ламе упругой среды; $q_1$, $\tau_1$, $\tau_2$ — нормальная и касательные составляющие вектора поверхностных напряжений; $\sigma_{i3}$ $(i = 1, 2, 3)$ — компоненты вектора напряжений среды; $q(x_1, x_2)$ — неизвестное контактное давление, $\delta(x_1 - x_{10}, x_2 - x_{20})$ — дельта-функция Дирака.

Движение точек объема жидкости (идеальной сжимаемой) описывается волновым уравнением относительно потенциала скоростей $\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{c^2}\partial^2\varphi/(\partial t)^2, \quad c^2 = \frac{1}{\rho_0\beta_s}, \quad 0 \le x_3 \le h \tag{1.4}$$

с граничными условиями

$$\rho_0\partial\varphi/\partial t = 0, \quad x_3 = h, \quad |x_1| \le a, \quad |x_2| \le b \tag{1.5}$$

$$\rho_0\partial\varphi/\partial t = q(x_1, x_2)\, e^{-i\omega t}, \quad x_3 = 0, \quad |x_1| \le a, \quad |x_2| \le b \tag{1.6}$$

$$\partial\varphi/\partial n_1 = 0, \quad |x_1| = a, \quad |x_2| \le b, \quad 0 \le x_3 \le h \tag{1.7}$$

$$\partial\varphi/\partial n_2 = 0, \quad |x_1| \le a, \quad |x_2| = b, \quad 0 \le x_3 \le h \tag{1.8}$$

$$\partial u_3/\partial t = -\partial\varphi/\partial x_3, \quad x_3 = 0, \quad |x_1| \le a, \quad |x_2| \le b \tag{1.9}$$

Здесь $\rho$ — плотность покоящейся жидкости, $\beta_s$ — адиабатическая сжимаемость жидкости, $c$ — скорость звука в жидкости, $n_1$, $n_2$ — внешние нормали к боковым стенкам $|x_1| = a$, $|x_2| = b$ соответственно.

Таким образом, исходная задача подразделена на две: для упругого полупространства и для объема жидкости.

После нахождения решения для каждой из подзадач с использованием условия равенства вертикальных составляющих скоростей для упругой среды и жидкости в области контакта (1.9) получено интегральное уравнение Фредгольма I рода относительно давления в области раздела упругой и акустической сред с учетом влияния нагрузки, приложенной на поверхности упругого полупространства:

$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} q(t_1, t_2)\,\{K_p(|x_1 - t_1|, |x_2 - t_2|) + K_s(|x_1 + t_1|, \tag{1.10}$$

$$|x_2 + t_2|)\}\, dt_1 dt_2 = 4\pi^2 P(x_1, x_2)$$

$$K_p(|x_1 - t_1|, |x_2 - t_2|) = \int_{-\infty}^{\infty}\int K_{12}(\lambda_1, \lambda_2)\exp[-i(\lambda_1|x_1 -$$

$$-t_1| + \lambda_2|x_2 - t_2|)]\, d\lambda_1 d\lambda_2$$

$$K_s(|x_1 + t_1|, |x_2 + t_2|) = \frac{1}{4}\sum_{k,m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int K_{11}(\lambda_1, \lambda_2)\exp[-i(\lambda_1|x_1 +$$

$$+ t_1| + \lambda_2 |x_2 + t_2|)] \exp [i2 (ka\lambda_1 + mb\lambda_2)] \, d\lambda_1 d\lambda_2$$

$$P(x_1, x_2) = \int\int_{\Sigma_2} \delta (t_1 - x_{10}, t_2 - x_{20}) K (t_1 - x_1, t_2 - x_2) \, dt_1 dt_2$$

**2. Переход к плоской задаче.** Решение уравнения (1.10) $q(t_1)$ принадлежит классу функций $I(p)$, где $p > 1$ [1, 3, 4]; $I(p)$ — пространство суммируемых функций со степенью $p$.

В соотношении (1.10) функция ядра $K_{11}(\lambda_1, \lambda_2)$ имеет нули, которые определяются решением уравнения

$$\operatorname{ch} \delta_{km} = 0 \Rightarrow \delta_{km} = \pm \tfrac{1}{2}\pi (2n + 1) i \ (n = 0, 1, \dots) \tag{2.1}$$

и полюса

$$\operatorname{sh} \delta_{km} = 0 \Rightarrow \delta_{km} = \pm i\pi n \ \ (n = 0, 1, \dots) \tag{2.2}$$

т. е. они равны [2]:

$$(\alpha^2 - k_0^2)^{1/2} = \pm i\pi n \Rightarrow \alpha = i (\pi^2 n^2 - k_0^2)^{1/2} \tag{2.3}$$

Далее перейдем к рассмотрению плоской задачи. В этом случае если при $k \neq 0$ вместо $\lambda_1$ подставить значения корней $\alpha$ (2.3), то будет замечено экспоненциальное убывание. Если же $k = 0$, то факт убывания отсутствует, поэтому указанный случай представляет интерес для исследования.

В полученном уравнении (1.10) при $|\beta| \to \infty$ ($\lambda_1 \equiv \beta$):

$$K_{12}(\beta) = \gamma/(\Delta_1 \pi^2), \ K_{12}(\beta) \overset{|\beta|\to\infty}{\sim} 2(\nu - 1)/(3\pi^2)/|\beta|$$

$$K_{11}(\beta) = -\zeta/(4\pi^2 \Omega^4) \, \delta_0 \operatorname{ch} \delta_0 / \operatorname{sh} \delta_0 \tag{2.4}$$

$$K_{11}(\beta) \overset{|\beta|\to\infty}{\sim} \zeta/(4\pi^2\Omega^4) \, [|\beta| - 1/(2|\beta|)], \ \delta_0 \equiv \delta_{km}$$

Отличительной особенностью соотношения (1.10) является то обстоятельство, что ядро его зависит не только от разности, а также и от суммы аргументов. В этом случае единственность решения доказана на стр. 28.

**3. Сведение к задаче Римана.** К решению интегрального уравнения (1.10) применен метод, основанный на сведении к функциональным соотношениям и разрешаемых в свою очередь методом факторизации [4, 6]. На основании этого характер особенности и вид решения зависят от преобразования Фурье $F(\beta)$ правой части. Таким образом, с помощью интегрального преобразования Фурье рассматриваемое интегральное уравнение (1.10) сведено к функциональному соотношению, в правой части которого присутствуют функционалы от неизвестных смещений вне области контакта, что заставляет модифицировать метод Винера — Хопфа [6], а именно:

$$K_1(\beta) Q(\beta) + K_2(\beta) Q(-\beta) = F(\beta) + F_1^-(\beta) e^{-i\beta a} + F_2^+(\beta) e^{i\beta a} \tag{3.1}$$

где $Q(\beta)$, $Q(-\beta)$, $F(\beta)$ — преобразования Фурье от функции контактного давления и от правой части уравнения (1.10); $K_1(\beta)$, $K_2(\beta)$ — символы ядер $K_p$, $K_s$; $F_1^-(\beta)$, $F_2^+(\beta)$ — функционалы от неизвестных смещений вне области контакта слева и справа соответственно.

На основании известных теорем [6] функции $F_1^-(\beta)$, $F_2^+(\beta)$ являются аналитическими от комплексной переменной $\beta = \tau + ik$ в нижней и верхней полуплоскости соответственно. С учетом четности функций $K_1(\beta)$, $K_2(\beta)$ соотношение (3.1) сведено к системе функциональных матричных уравнений

$$K_1(\beta) Q(\beta) + K_2(\beta) Q(-\beta) = F(\beta) + F_1^-(\beta) e^{-i\beta a} + F_2^+(\beta) e^{i\beta a} \tag{3.2}$$

$$K_1(\beta)\,Q(-\beta)+K_2(\beta)\,Q(\beta)=F(-\beta)+F_1^-(-\beta)\,e^{i\beta a}+F_2^+(-\beta)\,e^{-i\beta a}$$

которая с помощью дальнейших преобразований в свою очередь может быть сведена к матрично-функциональному уравнению:

$$AX^+ + B_1X^- = \mathbf{F} \tag{3.3}$$

$$X^+(\beta)=\begin{Vmatrix} Q^+(\beta)\\ S^+(\beta)\\ F_1^+(\beta)\\ F_2^+(\beta)\end{Vmatrix},\quad X^-(\beta)=\begin{Vmatrix} Q^-(\beta)\\ S^-(\beta)\\ F_1^-(\beta)\\ F_2^-(\beta)\end{Vmatrix},\quad \mathbf{F}(\beta)=\begin{Vmatrix} F_+(\beta)\\ F_-(\beta)\\ F_+(-\beta)\\ F_-(-\beta)\end{Vmatrix} \tag{3.4}$$

$$A=\begin{Vmatrix} K_1 & K_2 & 0 & e^{-2i\beta a}\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ K_2 & K_1 & -e^{-2i\beta a} & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{Vmatrix},\quad B_1=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0\\ K_1 & K_2 & -e^{-2i\beta a} & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ K_2 & K_1 & 0 & -e^{-2i\beta a}\end{Vmatrix}$$

$$S^+(\beta)=Q(-\beta)\,e^{i\beta a},\quad S^-(\beta)=Q(-\beta)\,e^{-i\beta a}$$

Уравнение (3.3) может быть записано в ином виде:

$$GX^+ + X^- = B_1^{-1}\mathbf{F},\quad G=B_1^{-1}A \tag{3.5}$$

определяющим краевую задачу Римана для вектор-функций $X^+$, $X^-$, из которых затем отыскивается функция $Q(\beta)$ через $Q^+(\beta)$ либо через $Q^-(\beta)$ соответственно.

**4. Решение задачи Римана.** Решение этой задачи связано с возможностью представления матриц в факторизованном виде [1, 4, 6]. В данный же момент, допуская существование и истинность возможных представлений, отметим, что элементы и определители матриц с положительными знаками-индексами должны быть регулярны выше контура интегрирования $\sigma$ и непрерывны на нем (либо рассматривается верхняя полуплоскость, причем определители матриц должны быть отличны от нуля) [1, 4]. Аналогично для матриц с отрицательными знаками-индексами, причем рассматривается область ниже контура $\sigma$, либо нижняя полуплоскость. При этом элементы всех матриц в своих областях регулярности должны убывать. Контур интегрирования [4] выбирается в соответствии с принципом предельного поглощения, а именно: он совпадает с вещественной осью, обходя отрицательные полюса сверху, в положительные снизу. На основании изложенного получено, что

$$X^+(\beta)=G_+^{-1}\{G_-^{-1}B_1^{-1}\mathbf{F}\}^+ \tag{4.1}$$

$$X^-(\beta)=-G_-\{G_-^{-1}B_1^{-1}\mathbf{F}\}^- \tag{4.2}$$

Решение краевых задач Римана вида (4.1), (4.2) ищется в классе аналитических вектор-функций: убывающих в своих плоскостях регулярности с весом $\beta^\lambda$, $\lambda>0$ (класс $A(\lambda)$). Скобки со знаком плюс или минус означают интегралы по контурам $\tau_-$ ($\tau_+$), расположенным ниже (выше) вещественной оси или, что является более общим, ниже (выше) контура $\sigma$:

$$\{F\}^+\equiv F_+(\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tau_-}\frac{F(s)}{s-\alpha}\,ds,\quad \operatorname{Im}\alpha>\tau_-,\quad \alpha\in E_+ \tag{4.3}$$

$$\{F\}^-\equiv F_-(\alpha)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tau_+}\frac{F(s)}{s-\alpha}\,ds,\quad \operatorname{Im}\alpha<\tau_+,\quad \alpha\in E_-$$

Вектор-функции $X^+$ и $X^-$, определенные выражениями (4.3), являются регулярными соответственно в верхней и нижней полуплоскостях, убывают там и непрерывны на контуре $\sigma$. Факт непрерывности, регулярности, убывания рассматриваемых вектор-функций исследован в [2]. В отличие от краевых задач для изотропных сред наличие в ядре уравнения (1.10) члена, зависящего от суммы аргументов, нарушает свойство функциональной коммутативности при стремлении модуля аргумента на бесконечность для матриц в интегральных уравнениях, что усложняет математический аппарат.

Умножим рассматриваемую матрицу интегрального уравнения (1.10), слева и справа на матрицы специального вида, приходим к матрице диагонального вида, а затем возвращаемся к исходной, работая с обратными к соответствующим матрицами. Таким образом матрица $K(\beta)$ факторизована

$$K_-(\beta) = \begin{Vmatrix} [c_1/(2(B+i\beta))]^{1/2} - [c_2(B+i\beta)/2]^{1/2} & [c_1/(2(B+i\beta))]^{1/2} - [c_2(B+i\beta)/2]^{1/2} \\ [c_1/(2(B+i\beta))]^{1/2} + [c_2(B+i\beta)/2]^{1/2} & -[c_1/(2(B+i\beta))]^{1/2} - [c_2(B+i\beta)/2]^{1/2} \end{Vmatrix} \tag{4.4}$$

$$K_+(\beta) = \begin{Vmatrix} [c_1/(2(B-i\beta))]^{1/2} + [c_2(B-i\beta)/2]^{1/2} & [c_1/(2(B-i\beta))]^{1/2} - [c_2(B-i\beta)/2]^{1/2} \\ [c_1/(2(B-i\beta))]^{1/2} + [c_2(B-i\beta)/2]^{1/2} & -[c_1/(2(B-i\beta))]^{1/2} + [c_2(B-i\beta)/2]^{1/2} \end{Vmatrix}$$

$$K(\beta) = K_-(\beta)\,K_+(\beta), \quad c_1,\ c_2,\ B - \mathrm{const}$$

Дальнейшее исследование рассматриваемой краевой задачи сведено к проблеме факторизации матрицы-функции $G(\beta)$. Она осуществлена в несколько этапов по методике, изложенной в [2]. Ранее была проведена разработка указанного метода для матриц с экспонентами на диагонали [2] ($\det C = -1$):

$$G^1(\beta) = C \times G(\beta) \equiv \begin{Vmatrix} -e^{-2\beta a} & 0 \\ K(\beta) & e^{2\beta a} \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \tag{4.5}$$

где $C$ — матрица, позволяющая свести $G(\beta)$ к указанному виду. В представлении (4.5) для $G^1(\beta)$ выписана матрица, элементы которой являются блоками второго порядка.

Факторизация для матрицы $G(\beta)$ и выкладки, необходимые для нахождения решения в виде (4.1), здесь опущены (подразумевается: вычисление интегралов при помощи теории вычетов с деформацией контуров интегрирования и их замыканием в верхнюю (нижнюю) полуплоскость, причем рассмотренные матрицы в (4.1) обладают конечным числом полюсов, следовательно, конечной будет и полученная система алгебраических уравнений).

**5. Исследование решения.** В результате получены системы для определения функций $Q(\beta)$, $Q(-\beta)$, $F_1(\beta)$, $F_2(\beta)$ в различных случаях приложения нагрузки. В частности, когда нагрузка находится слева от объема жидкости в точке $x_0$, получено

$$p = -i\beta, \quad -p^* = i\beta_k, \quad |\beta| \to \infty$$

$$Q(p) = \frac{\pi p_k}{i}\{\exp[-p^*(x_0+a)]\,[-\exp[-3ap]/(c_2 i(p+$$

$$+p^*)(\varepsilon^2-p^2)^{1/2})((1-c_1/(2c_3+c_2(\varepsilon^2-p^2))) + (1+c_1/(2c_3+$$

$$+c_2(\varepsilon^2-p^2))(c_1^{1/2}+c_2^{1/2}+(B-p))/(c_1^{1/2}+c_2^{1/2}(B+p))(c_1^{1/2}-$$

$$-c_2^{1/2}(B+p))/(c_1^{1/2}-c_2^{1/2}(B-p))) + 2(B+p)^{1/2}\exp[ap]/(i(p+$$

$$+p^*)(c_1^{1/2}+c_2^{1/2}(B+p)))\,((B+p^*)^{1/2}/(c_1^{1/2}-c_2^{1/2}(B+$$

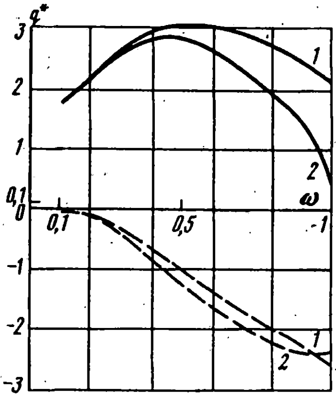
[2] См. также: *В. А. Бабешко, А. В. Смирнова, М. В. Чепиль.* Схема решения интегрального уравнения Фредгольма I рода одной гидроупругой задачи и исследование полученного решения. М., 1990. 32 с.— Деп. в ВИНИТИ. 31.10.90. № 5594-В90.

$$
\begin{gathered}
+ p^*)) - (B - p)^{1/2}/(c_1^{1/2} - c_2^{1/2}(B - p)))] + \exp[-p^*(x_0 - \\
- a)]\exp[-ap][1/(c_2 i(p + p^*)(\varepsilon^2 - p^2)^{1/2})((1 - \\
- c_1/(2c_3 + c_2(\varepsilon^2 - p^2))) + (1 + c_1/(2c_3 + c_2(\varepsilon^2 - p^2)))(c_1^{1/2} + \\
+ c_2^{1/2}(B - p))/(c_1^{1/2} + c_2^{1/2}(B + p))(c_1^{1/2} - c_2^{1/2}(B + p))/(c_1^{1/2} - \\
- c_2^{1/2}(B - p))) + (B^2 - p^2)^{1/2}/(i(p - p^*))(1/((c_1^{1/2} + \\
+ c_2^{1/2}(B - p))(c_1^{1/2} - c_2^{1/2}(B + p))) - 1/((c_1^{1/2} + c_2^{1/2}(B + \\
+ p))(c_1^{1/2} - c_2^{1/2}(B - p))))]\} \qquad (5.1)
\end{gathered}
$$

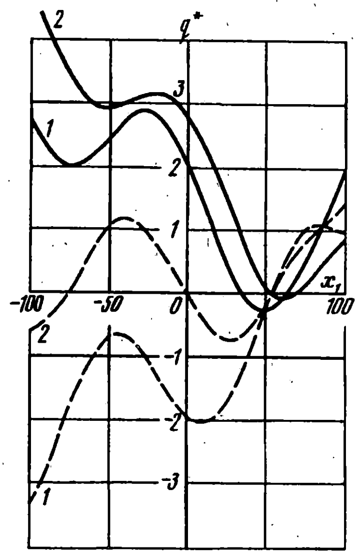
$$
\begin{gathered}
Q(-p) = \frac{\pi p_k}{i}\{\exp[-p^*(x_0 + a)][\exp[-3ap]/(c_2 i(p + p^*)(\varepsilon^2 - \\
- p^2)^{1/2})(-1 + c_1/(2c_3 + c_2(\varepsilon^2 - p^2))(c_1^{1/2} - c_2^{1/2}(B - p))/(c_1^{1/2} - \\
- c_2^{1/2}(B + p))(c_1^{1/2} + c_2^{1/2}(B + p))/(c_1^{1/2} + c_2^{1/2}(B - p)) + (1 + c_1/(2c_3 + \\
+ c_2(\varepsilon^2 - p^2)))) + 2(B + p)^{1/2}\exp[ap]/(c_1^{1/2} - c_2^{1/2}(B + p))((B - \\
- p)^{1/2}/(c_1^{1/2} + c_2^{1/2}(B - p)) - (B - p^*)^{1/2}/(c_1^{1/2} + c_2^{1/2}(B - p^*)))] + \\
+ \exp[-p^*(x_0 - a)]\exp[-ap][1/(c_2 i(p + p^*)(\varepsilon^2 - p^2)^{1/2})((1 - \\
- c_1/(2c_3 + c_2(\varepsilon^2 - p^2)))(c_1^{1/2} - c_2^{1/2}(B - p))/(c_1^{1/2} - c_2^{1/2}(B + \\
+ p))(c_1^{1/2} + c_2^{1/2}(B + p))/(c_1^{1/2} + c_2^{1/2}(B - p)) - (1 + c_1/(2c_3 + \\
+ c_2(\varepsilon^2 - p^2)))) + (B^2 - p^2)^{1/2}/(i(p - p^*))((c_1^{1/2} - c_2^{1/2}(B - \\
- p))(c_1^{1/2} + c_2^{1/2}(B + p)) + 1)/(c_1^{1/2} - c_2^{1/2}(B + p))/(c_1^{1/2} + \\
+ c_2^{1/2}(B - p)) - 2(B^2 - p^2)^{1/2}/(i(p - p^*)(c_1^{1/2} + c_2^{1/2}(B - \\
- p)))/(c_1^{1/2} - c_2^{1/2}(B + p))]\} \qquad (5.2)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
F_1(p) = \frac{\pi p_k}{i}\{\exp[-p^*(x_0 + a)]\exp[-pa]/(c_2(B^2 - p^2)^{1/2}(p + \\
+ p^*)i(\varepsilon^2 - p^2)^{1/2})((1 - c_1/(2c_3 + c_2(\varepsilon^2 - p^2)))(c_1^{1/2} - c_2^{1/2}(B - \\
- p))(c_1^{1/2} + c_2^{1/2}(B + p)) + (1 + c_1/(2c_3 + c_2(\varepsilon^2 - p^2)))(c_1^{1/2} + \\
+ c_2^{1/2}(B - p))(c_1^{1/2} - c_2^{1/2}(B + p))) - \exp[-p^*(x_0 - a)][1/(c_2(\varepsilon^2 - \\
- p^2)^{1/2}(B^2 - P^2)^{1/2} i(p + p^*))((1 - c_1/(2c_3 + c_2(\varepsilon^2 - p^2)))(c_1^{1/2} - \\
- c_2^{1/2}(B - p))(c_1^{1/2} + c_2^{1/2}(B + p)) + (1 + c_1/(2c_3 + c_2(\varepsilon^2 - p^2)))(c_1^{1/2} + \\
+ c_2^{1/2}(B - p))(c_1^{1/2} - c_2^{1/2}(B + p))) + 1/(i(p - p^*))((c_1^{1/2} - c_2^{1/2}(B - \\
- p))/(c_1^{1/2} + c_2^{1/2}(B - p))(c_1^{1/2} + c_2^{1/2}(B + p))/(c_1^{1/2} - c_2^{1/2}(B + p)) - 1)]\}, \qquad (5.3)
\end{gathered}
$$

$$
F_2(p) = \frac{\pi p_k}{i}\{\exp[-p^*(x_0 + a)]\exp[-3pa]/(c_2 i(B^2 - p^2)^{1/2}(\varepsilon^2 -
$$




Фиг. 1




Фиг. 2

$$- p^2)^{1/2} (p + p^*) ((1 - c_1/(2c_3 + c_2 (\varepsilon^2 - p^2))) (c_1^{1/2} - c_2^{1/2} (B -$$
$$- p)) (c_1^{1/2} + c_2^{1/2} (B + p)) - (1 + c_1/(2c_3 + c_2 (\varepsilon^2 - p^2))) (c_1^{1/2} +$$
$$+ c_2^{1/2} (B - p)) (c_1^{1/2} - c_2^{1/2} (B + p))) + \exp[-pa] \exp[-p^* (x_0 -$$
$$- a)] [-1/(ic_2 (B^2 - p^2)^{1/2} (\varepsilon^2 - p^2)^{1/2} (p + p^*)) ((1 - c_1/(2c_3 +$$
$$+ c_2 (\varepsilon^2 - p^2))) (c_1^{1/2} - c_2^{1/2} (B - p)) (c_1^{1/2} + c_2^{1/2} (B + p)) + (1 +$$
$$+ c_1/(2c_3 + c_2 (\varepsilon^2 - p^2))) (c_1^{1/2} + c_2^{1/2} (B - p)) (c_1^{1/2} - c_2^{1/2} (B + p))) +$$
$$+ 1/(i (p - p^*)) (1 - (c_1^{1/2} + c_2^{1/2} (B + p)) (c_1^{1/2} - c_2^{1/2} (B - p))/(c_1^{1/2} +$$
$$+ c_2^{1/2} (B - p))/(c_1^{1/2} - c_2^{1/2} (B + p)))]\} \qquad (5.4)$$

$$|\beta| \sim (\beta^2 + \varepsilon^2)^{1/2}, \quad \varepsilon \xrightarrow{|\beta| \to \infty} 0$$

$$|\beta|^+ = (\beta + i\varepsilon)^{1/2}, \quad |\beta|^- = (\beta - i\varepsilon)^{1/2}$$

Полученные аналитические выражения на бесконечности убывают, т. е. имеют следующую асимптотическую оценку (для нагрузки слева от объема):

$$Q(\beta) \overset{|\beta| \to \infty}{\sim} k_1/\beta^2 + k_2/\beta^{3/2}, \quad Q(-\beta) \overset{|\beta| \to \infty}{\sim} k_3/\beta^2 + k_4/\beta^{3/2} \qquad (5.5)$$

$$F_1(\beta) \overset{|\beta| \to \infty}{\sim} k_5/\beta, \quad F_2(\beta) \overset{|\beta| \to \infty}{\sim} k_6/\beta^{1/2}, \quad k_i - \text{const} \ (i = 1, 2, \ldots, 6)$$

Таким образом, интеграл для нахождения контактных напряжений

$$q(t_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(\beta) \exp(-i\beta t_1) \, d\beta \qquad (5.6)$$

является сходящимся для любого $t_1 \in [-a, a]$, $x_3 = 0$.

Для вычисления $q(t_1)$ применена теория вычетов, а для вычисления интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} R \exp(-V^2) \, dV, \quad R \equiv R(V) \qquad (5.7)$$

входящих в полученные с помощью теории вычетов выражения, используются квадратурные формулы гауссова типа, имеющие наивысший порядок точности для данного числа узлов [7].

В качестве упругой среды рассмотрены бетон и грунты двух типов, в качестве жидкой среды — вода.

Под $q^*$ на фиг. 1, 2 подразумевается $q^* = (P/h^2)\ q$.

На фиг. 1 представлено поведение исследуемой функции при низких частотах ($\omega = 0{,}1 \div 1$) посередине объема ($x_1 = 0$), высота объема $h = 10$ м; полуширина объема $A^1 = 100$ м; в качестве упругой среды рассмотрен бетон; сплошной линией обозначена действительная часть функции $q^*$, штриховой — мнимая. Цифрой *1* отмечены кривые в случае, когда нагрузка приложена в точке $x_0 = -2A^1$; цифрой *2* — при $x_0 = -3A^1$. На фиг. 2 в указанных обозначениях представлена зависимость давления от координаты $x_1$ в области контакта при $w = 10$ Гц, $h = 20$ м, $A^1 = 100$ м; в качестве упругой среды рассмотрен грунт.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
2. *Бабешко В. А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.
3. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
4. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
5. *Сеймов В. М., Трофимчук А. Н., Савицкий О. А.* Колебания и волны в слоистых средах. Киев: Наук. думка, 1990. 224 с.
6. *Нобл Б.* Метод Винера — Хопфа. М.: Изд-во ин. лит-ры, 1962. 279 с.
7. *Крылов В. И., Шульгина Л. Т.* Справочная книга по численному интегрированию. М.: Наука, 1966. 372 с.



Краснодар, Ростов-на-Дону



Поступила в редакцию
2.III.1993