МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1995

УДК 539.3

© 1995 г. С. М. АЙЗИКОВИЧ, И. С. ТРУБЧИК

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ ФОРМЫ ОСАДКИ ПОВЕРХНОСТИ НЕОДНОРОДНОГО ПО ГЛУБИНЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ ВНЕДРЕНИИ В НЕГО КРУГОВОГО ШТАМПА

Во многих смешанных задачах решение можно получить только приближенно. В приложениях результатов возникает необходимость использовать это приближенное решение для определения других характеристик задачи. Так, например, в задаче о вдавливании штампа в неоднородное основание требуется определить осадку поверхности вне штампа. Так как решение самого интегрального уравнения этой задачи находится только приближенно, возникает вопрос о погрешности величины осадки основания определяемой с использованием этого асимптотического решения.

Известны классические результаты по определению осадки поверхности однородного полупространства, вне штампа [1]. В [2] приведены формулы для значений осадок поверхности однородного полупространства в случае осесимметричного штампа произвольной формы в плане.

В публикуемой работе впервые получены аналитические формулы, позволяющие определить осадку поверхности неоднородного по глубине слоя, сцепленного с упругим однородным полупространством при внедрении в него кругового штампа. Закон изменения по глубине коэффициентов Ляме в слое произволен. Устанавливается, что полученные аналитические формулы являются асимптотически точными при $\lambda \to 0$ и $\lambda \to \infty$(где $\lambda = H/a$ — геометрический параметр задачи, H — толщина неоднородного слоя, a — радиус штампа). Приводятся численные примеры.

1. Задача об определении контактных давлений под круговым штампом сводится к решению парного интегрального уравнения следующего вида [3]:

$$\int_0^\infty T(\alpha) L(\lambda\alpha) J_0(\alpha r)\, d\alpha = \Theta(0) f(r), \quad 0 \le r \le 1 \tag{1.1}$$

$$\int_0^\infty T(\alpha) J_0(\alpha r)\, \alpha d\alpha = 0, \quad r > 1; \qquad T(\alpha) = \int_0^1 \tau(\rho) J_0(\alpha\rho)\, \rho d\rho$$

При выполнении условий

$$\min_{y \in (-H;\, 0)} \Theta(y) \ge c_1 > 0, \quad \max_{y \in (-H;\, 0)} \Theta(y) \le c < \infty$$

$$\Theta(y) = 2\mathrm{M}(y)\, [\Lambda(y) + \mathrm{M}(y)]\, [\Lambda(y) + 2\mathrm{M}(y)]^{-1}$$

где $\mathrm{M}(y)$ и $\Lambda(y)$ — коэффициенты Ляме неоднородного слоя, y — расстояние от поверхности среды. Трансформанта ядра $L(\alpha)$ обладает следующими свойствами [3—5] (B, D — постоянные):

$$L(\alpha) = A + B\,|\alpha| + o(\alpha^2), \quad \alpha \to 0 \tag{1.2}$$

$$L(\alpha) = 1 + D\,|\alpha|^{-1} + o(\alpha^{-2}), \quad \alpha \to \infty; \quad A = \Theta(0)\, \Theta^{-1}(H)$$

На основании теоремы 1.1 из [3] $L(\lambda\alpha)$ допускает аппроксимацию выражениями вида

$$L(\lambda\alpha) = L_N(\lambda\alpha) + L_M^{\Sigma}(\lambda\alpha)$$

$$L_N(\lambda\alpha) = \prod_{i=1}^{N} \frac{\alpha^2 + A_i^2\lambda^{-2}}{\alpha^2 + B_i^2\lambda^{-2}}, \quad L_M^{\Sigma}(\lambda\alpha) = |\alpha| \sum_{k=1}^{M} \frac{C_k\lambda^{-1}}{\alpha^2 + D_k^2\lambda^{-1}}$$

где A_i, B_i $(i = 1, \ldots, N)$, C_k, D_k $(k = 1, \ldots, M)$ — некоторые постоянные.

Определение 1. Функция $L(\alpha)$ принадлежит классу Π_N (классу Σ_M), если $L(\alpha) = L_N(\alpha)$ $(L(\alpha) = L_M^{\Sigma}(\alpha))$.

Определение 2. Функция $L(\alpha)$ принадлежит классу $S_{N,M}$, если она имеет вид $L(\alpha) = L_N(\alpha) + L_M^{\Sigma}(\alpha)$.

Определение 3. Абсолютно интегрируемая на отрезке [0, 1] функция $f(x)$ удовлетворяет условию M_0, если имеет место разложение Дини—Бесселя [6]:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_n J_0(\mu_j x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n\lambda_n| \le M_f^0(-1, 1) < \infty$$

где $M_f^0(-1, 1)$ — некоторая постоянная.

Если $f(x)$ — четная функция, удовлетворяющая условию M_0, а $L(\alpha)$ принадлежит классу Π_N, то, используя метод из [7], можно получить выражение для контактных давлений $\tau(r)$ под штампом

$$\tau_N^{\Pi}(r) = 2\,\Theta(0)\,\delta\pi^{-1}\,[L_N^{-1}(0)(1 - r^2)^{-1/2} + \sum_{i=1}^{N} C_i\Psi(r; A_i\lambda^{-1}) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} a_j L_N^{-1}(\lambda\mu_j)\, f(r; \mu_j)], \quad 0 \le r \le 1 \qquad (1.3)$$

$$\Psi(r; A) = \operatorname{ch} A\,(1 - r^2)^{-1/2} - A \int_{r_1}^{1} \operatorname{sh}(At)\,(t^2 - r^2)^{-1/2}\,dt$$

$$f(r; \varepsilon) = \cos\varepsilon\,(1 - r^2)^{-1/2} + \varepsilon \int_{r}^{r_1} \sin(\varepsilon t)\,(t^2 - r^2)^{-1/2}\,dt$$

Постоянные C_i определяются из следующей системы линейных алгебраических уравнений.

$$\sum_{i=1}^{N} C_i\alpha(B_k\lambda^{-1}; A_i\lambda^{-1}) + L_N^{-1}(0)\,\lambda B_k^{-1} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j\beta(B_k\lambda^{-1}; \mu_j) = 0 \quad (k = 1, \ldots, N)$$

$$\alpha(\varepsilon; \delta) = (\varepsilon \operatorname{ch}\delta + \delta \operatorname{sh}\delta)(\varepsilon^2 - \delta^2)^{-1}$$

$$\beta(\varepsilon; \delta) = (\varepsilon\cos\delta - \delta\sin\delta)\,L_N^{-1}(\lambda\delta)\,(\varepsilon^2 + \lambda^2\delta^2)^{-1}$$

В общем случае, когда функция $L(\alpha)$ обладает свойствами (1.2), т. е. принадлежит классу $S_{N,M}$, согласно теореме 4, 3 [3] решение вида (1.3) является асимптотически точным решением уравнения (1.1) при $\lambda \to 0$ и $\lambda \to \infty$.

2. Используя аналитическое решение (1.3) парного интегрального уравнения (1.1) для $L(\alpha)$ класса Π_N найдем выражение для $f(r)$, при $r \ge 1$ и $L(\alpha) \in \Pi_N$. Сделав ряд преобразований получим следующее аналитическое выражение (с учетом того, что $L(\alpha) \in \Pi_N$, будем обозначать его $f_N^{\Pi}(r)$):

$$f_N^{\Pi}(r) = 2\Theta(0)\,\delta\pi^{-1}\Big\{\arcsin\frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{N} D_n B_n\lambda^{-1} I_n(r)\Big[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_j\sin\mu_j}{L_N(\lambda\mu_j)(B_n^2\lambda^{-2} + \mu_j^2)} -$$

$$- \sum_{i=1}^{N} C_i \frac{A_i\lambda^{-1}\operatorname{sh} A_i\lambda^{-1}}{B_n^2\lambda^{-2} - A_i^2\lambda^{-2}}\Big] + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \int_0^1 \frac{\cos\mu_j t}{\sqrt{r^2 - t^2}}\,dt\Big\} \qquad (2.1)$$

$$I_n(r) = \int_1^r \frac{\exp[-B_n\lambda^{-1}(t - 1)]}{\sqrt{r^2 - t^2}}\,dt, \quad D_n = \Big(\frac{A_n^2}{B_n^2} - 1\Big)\prod_{i=1,n}^{N} \frac{-B_n^2 + A_i^2}{-B_n^2 + B_i^2}$$

Возникает вопрос об использовании формулы (2.1) для определения формы осадки поверхности неоднородного полупространства, т. е. в том случае когда трансформанта ядра $L(\alpha)$ обладает свойствами (1.2), и функция $L(\alpha)$ принадлежит классу функций $S_{N,M}$.

Согласно теореме 4.3 из [3] выражение (1.3) является асимптотически точным решением уравнения (1.1), для $L(\alpha)$ принадлежащих классу функций $S_{N,M}$ при $\lambda \to 0$ и $\lambda \to \infty$. Подставив это асимптотическое решение $\tau_N^{\Pi}(r)$ в (1.1) для $L(\alpha) \in S_{N,M}$, найдем приближенное выражение для осадки поверхности неоднородного полупространства вне штампа, $f_{N,M}(r)$ в общем случае, когда $L(\alpha) \in S_{N,M}$:

$$f_{N,M}(r) = \left(\Pi_N + \Sigma_M\right) \tau_N^{\Pi}(r), \quad r > 1$$

Здесь интегральный оператор, соответствующий функции $L(\alpha)$, принадлежащей классу A, обозначим через A.

Свойства решения интегрального уравнения для $L(\alpha) \in S_{N,M}$ установлены на конечном отрезке $r \in [0; 1]$, будут ли подобные свойства сохраняться для функции $f(r)$ определенной при $r \in (1; \infty)$? Т. е. будут ли асимптотические свойства сохраняться относительно определяемой приближенным способом правой части интегрального уравнения вне отрезка $[0; 1]$.

Не нарушая общности, считаем $M = 1$. В этом случае

$$\Sigma_1 \tau_N^{\Pi}(r) = \int_0^1 \tau_N^{\Pi}(\rho)\, \rho \left[\int_0^\infty \frac{C\lambda^{-1}\alpha}{\alpha^2 + D^2\lambda^{-2}} J_0(\alpha r)\, J_0(\alpha\rho)\, d\alpha\right] d\rho =$$

$$= C\lambda^{-1} K_0(rD\lambda^{-1}) \int_0^1 \tau_N^{\Pi}(\rho)\, J_0(\rho D\lambda^{-1})\, \rho d\rho, \quad r > 1$$

Используя асимптотические свойства цилиндрических функций мнимого аргумента

$$K_0(z) \sim -\ln(z), \quad I_0(z) \sim 1 \quad \text{при } z \to 0$$

$$K_0(z) \sim \sqrt{\Pi/2z}\, e^{-z}, \quad I_0(z) \sim e^z/\sqrt{2\pi z} \quad \text{при } z \to \infty$$

получим следующие оценки:

$$\max_{r>1} |\Sigma_1 \tau_N^{\Pi}(r)| \le M^* \exp[-D\lambda^{-1}\delta], \quad \lambda \to 0\ (\lambda < \lambda^*), \quad \delta = r - \rho > 0$$

$$\max_{r>1} |\Sigma_1 \tau_N^{\Pi}(r)| \le M^0 \lambda^{-1+\varepsilon}, \quad \lambda \to \infty\ (\lambda > \lambda^0), \quad \varepsilon > 0, \ \varepsilon \to 0$$

где постоянные M^* и M^0 не зависят от λ. Отсюда следует

Теорема. Выражение (2.1) является асимптотически точным представлением осадки поверхности неоднородного по глубине полупространства для $L(\alpha)$ класса $S_{N,M}$ при выполнении условий теоремы (4.3) из [3], при $0 < \lambda < \lambda^*$ и при $\lambda > \lambda^0$, где λ^* и λ^0 — некоторые фиксированные значения λ.

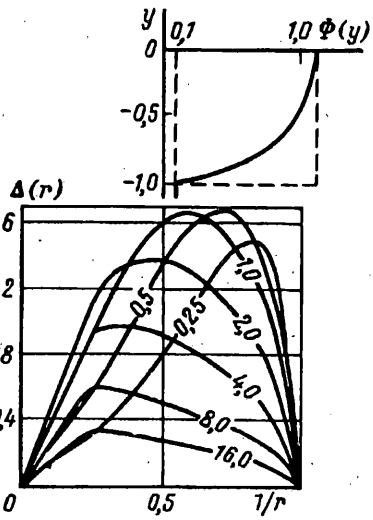
Таким образом доказано, что приближенные значения осадок поверхности полупространства являются асимптотически точными при $r \in (1; \infty)$ как при $\lambda \to 0$, так и при $\lambda \to \infty$.

3. Рассмотрим численные примеры. Считаем, что модуль Юнга верхнего неоднородного по глубине слоя изменяется по закону $E(y) = E_0\varphi(y)$, $-H \le y \le 0$ и коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}333$.

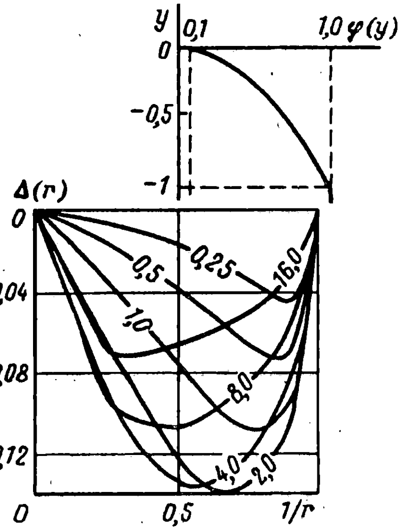
Рассмотрим следующие виды неоднородности:

Степенной закон, убывающий с глубиной

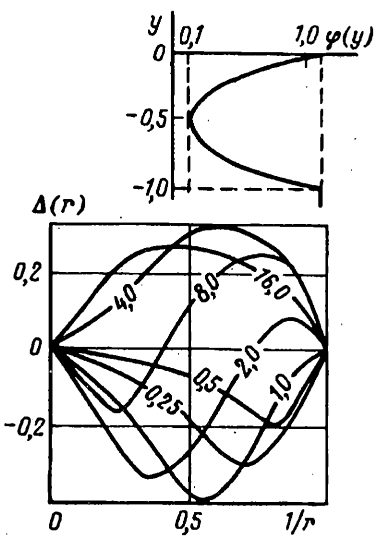
$$\varphi(y) = 1{,}1 - y^{2a_k}, \quad a_k = \frac{\ln(1{,}1 - k/10)}{2\ln 0{,}5} \quad (k = 4, 6, 9) \tag{3.1}$$



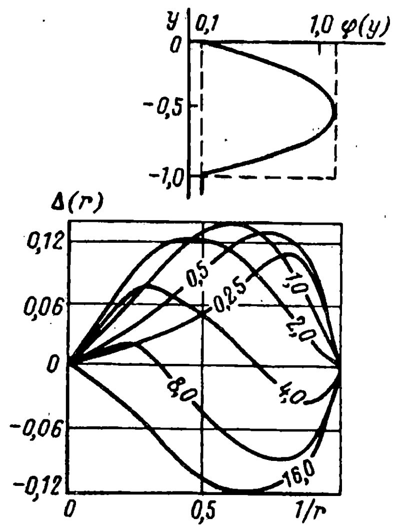
Фиг. 1



Фиг.2.



Фиг. 3



Фиг. 4

степенной закон, возрастающий с глубиной

$$\varphi(y) = 0{,}1 + y^{2a_k}, \quad a_k = \frac{\ln 0{,}1\,(k-1)}{2\ln 0{,}5} \quad (k = 2) \tag{3.2}$$

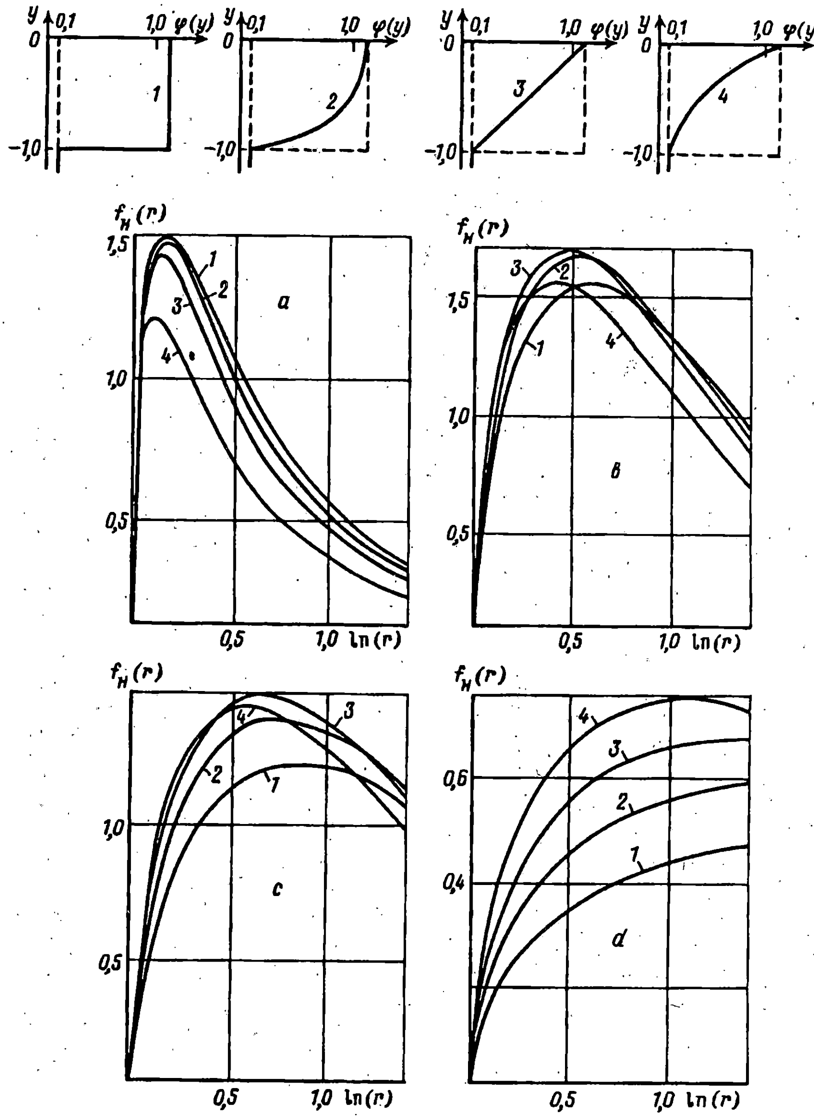
синусоидальный закон 1:

$$\varphi(y) = 1{,}1 + \sin(\pi y) \tag{3.3}$$

синусоидальный закон 2:

$$\varphi(y) = 0{,}1 - \sin(\pi y) \tag{3.4}$$

На фиг. 1—4 приведены графики величины $\Delta(r) = (2\pi^{-1}\Theta(0)\,\delta)^{-1} f_N^{\Pi}(r) - \arcsin(1/r)$, характеризующей изменение формы осадки поверхности неоднородного полупространства по сравнению с однородным, в зависимости от r^{-1}.



Фиг. 5

Фиг. 1 соответствует закону (3.1), $k = 9$, фиг. 2 соответствует закону (3.2), фиг. 3—(3.3), фиг. 4—(3.4). Номер на кривой соответствует значению λ.

Фиг. 5 иллюстрирует влияние на форму осадки поверхности вне штампа различных степеней неоднородности слоя при различных $\varphi(y)$. На каждой из фиг. 5, *a*, *b*, *c*, *d* приведены графики величины $\Delta(r)$ для четырех законов неоднородности. Кривая *1* соответствует двухслойному основанию, у которого значение модуля Юнга верхнего слоя в 10 раз больше модуля Юнга подстилающего полупространства. Кривые *2—4* соответствуют закону неоднородности вида (3.1), при $k = 9, 6, 4$, соответственно. Фиг. 5, *a* соответствует значению $\lambda = 1/4$, фиг. 5, *b* — $\lambda = 1$, фиг. 5, *c* — $\lambda = 2$, фиг. 5, *d* — $\lambda = 8$.

Авторы благодарят В. М. Александрова за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М. -Л.: Гостехиздат, 1949. С. 270.
2. *Моссаковский В. И., Качаловская Н. Е., Голикова С. С.* Контактные задачи математической теории упругости. Киев: Наук. думка, 1985. С. 175.
3. *Айзикович С. М.* Асимптотические решения контактных задач теории упругости для неоднородных по глубине сред//ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 1. С. 148—158.
4. *Приварников А. К.* Пространственная деформация многослойного основания//Устойчивость и прочность элементов конструкций. Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1973. С. 27—45.
5. *Айзикович С. М., Александров В. М.* О свойствах функции податливости, соответствующих слоистому и непрерывно-неоднородному полупространству//Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. № 1. С. 40—43.
6. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Дефференциальные уравнения математической физики. М.: Физматгиз, 1962. С. 767.
7. *Александров В. М.* О решении одного класса парных уравнений//Докл. АН СССР. 1973. Т. 210. № 1. С. 55—58.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
31.V.1993