МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1995

УДК 531.384

© 1995 г. В. Я. ЯРОЩУК

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ИНВАРИАНТ В ЗАДАЧЕ О КАЧЕНИИ БЕЗ СКОЛЬЖЕНИЯ ЭЛЛИПСОИДА СО СПЕЦИАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ МАСС ПО НЕПОДВИЖНОЙ ПЛОСКОСТИ

Предложена методика отыскания интегрального инварианта в задаче о качении без проскальзывания твердого тела по неподвижной поверхности. Метод применим при некоторых ограничениях на подвижную и неподвижную поверхности. Для эллипсоида со специальным распределением масс на плоскости найден интегральный инвариант.

Рассмотрим задачу о качении без проскальзывания твердого тела по неподвижной поверхности, когда точка контакта единственна и принадлежит двумерной поверхности. Допускается, что на систему действуют силы, зависящие только от ее положения.

Определение. Система дифференциальных уравнений $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$ обладает интегральным инвариантом, если существует функция $M(\mathbf{x})$, называемая плотностью интегрального инварианта, для которой выполняется условие [1] $d \ln M(\mathbf{x})/dt = -\operatorname{div} \mathbf{X}$.

Примем следующие обозначения: $\mathbf{G}$ — центр масс твердого тела, $\mathbf{G}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ — главные оси инерции, $\mathbf{Q}$ — точка контакта, $\mathbf{a} = G\mathbf{Q} = \Sigma a_i \mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$, $\boldsymbol{\omega} = \Sigma \omega_i \mathbf{e}_i$ — угловая скорость твердого тела, I, A — матрицы тензоров инерции в точках $\mathbf{G}, \mathbf{Q}$. Масса тела считается равной единице. Тогда $\mathbf{K} = A\boldsymbol{\omega} = I\boldsymbol{\omega} + [\mathbf{a}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{a}]]$ — кинетический момент относительно точки контакта $\mathbf{Q}$.

Если на тело действуют силы, зависящие только от положения системы, они не влияют на функцию $N = \Sigma \partial\dot{\omega}_i/\partial\omega_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Уравнения качения по инерции в проекциях на оси имеют вид [2]:

$$\dot{\mathbf{K}} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{K}] = [\dot{\mathbf{a}}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{a}]] \tag{1}$$

В общем случае к ним присоединяются уравнения для $\dot{\mathbf{a}}$ и кинематические уравнения Эйлера.

Записи вида $\partial\mathbf{x}/\partial\mathbf{y}$ и $\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}$, где $\mathbf{x} = \Sigma x_i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{y} = \Sigma y_i \mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$, будут обозначать матрицы, элементы которых с индексами (i, j) равны $\partial x_i/\partial y_j$ и $x_i y_j$ соответственно. Для произвольной матрицы T размером 3×3, через $h(T)$ обозначим сумму ее главных миноров второго порядка; B — транспонированная к $\partial\dot{\mathbf{a}}/\partial\boldsymbol{\omega}$ матрица.

Теорема. Для функции N при выполнении условий $h(B) \neq 0$, $\operatorname{Tr} B = 0$, $\mathbf{n}B = 0$, $B\mathbf{n} = 0$, $\mathbf{n} \neq 0$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности в точке $\mathbf{Q}$, справедлива формула

$$N = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \ln(\det A) + (\mathbf{n}, A\mathbf{n})(\det A)^{-1}(-(\mathbf{a}, A\dot{\mathbf{a}}) +$$

$$+ (\mathbf{n}, A\mathbf{n})^{-1}(\dot{\mathbf{a}}, A\mathbf{n})(\mathbf{n}, A\mathbf{a})) + (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n})((\mathbf{n}, \mathbf{a}) \operatorname{Tr} A^{-1}B - (\mathbf{n}, A^{-1}B\mathbf{a})) \tag{2}$$

Доказательство. Как показано в [3], функцию N можно привести к следующему виду:

$$N = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln(\det A) + (\omega, \mathbf{a})\operatorname{Tr} A^{-1}B - (\omega, A^{-1}B\mathbf{a}) \tag{3}$$

Рассмотрим произвольную матрицу H размером 3×3, ранг которой равен двум. Обозначим через β, γ ее левый и правый ненулевые аннуляторы: $\beta H = 0$, $H\gamma = 0$, $P(H) = H^2 - HrH$.

Лемма 1. Для описанной матрицы H справедливо $h(H) = 0$ тогда и только тогда, когда $(\beta, \gamma) = 0$.

Доказательство. Так как $\operatorname{rang} H = 2$, матрица H представима в виде

$$H = \mathbf{z}_1 \oplus \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_3 \oplus \mathbf{z}_4 \tag{4}$$

$$(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4 \in R^3), \quad (\mathbf{z}_1, \beta) = 0, \quad (\mathbf{z}_3, \beta) = 0$$

$$(\mathbf{z}_2, \gamma) = 0, \quad (\mathbf{z}_4, \gamma) = 0 \quad [\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3] = c_1\beta$$

$$[\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4] = c_2\gamma, \quad c_1 \neq 0, \quad c_2 \neq 0.$$

Используя верную для любых двух матриц T_1, T_2 размером 3×3, формулу

$$h(T_1 + T_2) = h(T_1) + h(T_2) + \operatorname{Tr} T_1 \cdot \operatorname{Tr} T_2 - \operatorname{Tr} T_1T_2 \tag{5}$$

из (4) получим

$$h(H) = ([\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4], [\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3]) = c_1c_2(\beta, \gamma) \tag{6}$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Для той же матрицы H при условии $h(H) \neq 0$ выполняется тождество

$$P(H) = -h(H)E + h(H)(\beta, \gamma)^{-1}\gamma \oplus \beta \tag{7}$$

Доказательство. В силу теоремы Гамильтона — Кэли [4] верно равенство $H \cdot P(H) + H \cdot h(H) = H^3 - H^2 \operatorname{Tr} H + Hh(H) = 0$. Поэтому строки матрицы $P(H) + h(H)E$ пропорциональны вектору β, а столбцы — вектору γ:

$$P(H) + h(H)E = c\gamma \oplus \beta \tag{8}$$

где c — коэффициент пропорциональности.

Умножая (8) на вектор β слева и на γ справа, имеем

$$c(\beta, \gamma)^2 = (\beta, P(H)\gamma) + h(H)(\beta, \gamma) = h(H)(\beta, \gamma)$$

Откуда получаем $c = h(H)(\beta, \gamma)^{-1}$. Лемма 2 доказана.

Так как $h(B) \neq 0$, то $\operatorname{rang} B = 2$ и для матрицы B справедлива лемма 2. Из (7) и условия $\operatorname{Tr} B = 0$ имеем

$$E = -(h(B))^{-1}B^2 + \mathbf{n} \oplus \mathbf{n} \tag{9}$$

Из формул (3) и (9) следует

$$N = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln(\det A) + (h(B))^{-1}(\omega, B^2A^{-1}B\mathbf{a}) -$$

$$- (h(B))^{-1}(\omega, B^2\mathbf{a})\operatorname{Tr} A^{-1}B + (\omega, \mathbf{n})(\mathbf{n}, \mathbf{a})\operatorname{Tr} A^{-1}B -$$

$$- (\omega, \mathbf{n})(\mathbf{n}, A^{-1}B\mathbf{a}) \tag{10}$$

Поскольку $\dot{\mathbf{a}} = \omega B$ и $\operatorname{Tr} A^{-1}B = \operatorname{Tr} BA^{-1}$, второе и третье слагаемые в правой части равенства (10) преобразуем следующим образом:

$$(h(B))^{-1}(\omega, B^2A^{-1}BA^{-1}A\mathbf{a}) - (h(B))^{-1}(\omega, B^2A^{-1}A\mathbf{a}) \times$$

$$\times \operatorname{Tr} A^{-1}B = (h(B))^{-1}(\dot{\mathbf{a}}, P(BA^{-1})A\mathbf{a}) \tag{11}$$

Заметим, что $\operatorname{rang} BA^{-1} = \operatorname{rang} B = 2$, а левый и правый аннуляторы матрицы BA^{-1} равны $\mathbf{n}$ и $A\mathbf{n}$. Очевидно, что $(\mathbf{n}, A\mathbf{n}) \neq 0$, пока $\mathbf{n} \neq 0$ и поэтому $h(BA^{-1}) \neq 0$. Для матрицы BA^{-1} справедлива лемма 2:

$$P(BA^{-1}) = -h(BA^{-1})E + h(BA^{-1})(\mathbf{n}, A\mathbf{n})^{-1} A\mathbf{n} \oplus \mathbf{n} \tag{12}$$

Сопоставляя (10), (11) и (12), приходим к результату

$$N = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln(\det A) + h(BA^{-1})(h(B))^{-1}((\mathbf{n}, A\mathbf{n})^{-1} \times$$

$$\times (\dot{\mathbf{a}}, A\mathbf{n})(\mathbf{a}, \mathbf{n}) - (\dot{\mathbf{a}}, A\mathbf{a})) + (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n})((\mathbf{n}, \mathbf{a}) \operatorname{Tr} A^{-1}B - (\mathbf{n}, A^{-1}B\mathbf{a})) \tag{13}$$

Лемма 3.

$$h(BA^{-1}) = h(B)(\mathbf{n}, A\mathbf{n})(\det A)^{-1} \tag{14}$$

Доказательство. Представим матрицу B в виде (4). Тогда

$$BA^{-1} = \mathbf{z}_1 \oplus \mathbf{z}_2 A^{-1} + \mathbf{z}_3 \oplus \mathbf{z}_4 A^{-1} \tag{15}$$

Из формул (5) и (15) следует

$$h(BA^{-1}) = ([\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3], [A^{-1}\mathbf{z}_2, A^{-1}\mathbf{z}_4]) = (\det A)^{-1} \times$$

$$\times ([\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3], A[\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4]) = (\det A)^{-1}(\boldsymbol{\beta}, A\boldsymbol{\gamma}) c_1 c_2 \tag{16}$$

Так как для матрицы B выполняются условия $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{n}$, $c_1 c_2 = h(B)/(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = h(B)$, то равенство (16) доказывает лемму 3.

Сравнивая выражения (13) и (14), получаем функцию N в виде (2). Теорема доказана.

Рассмотрим качение без скольжения по неподвижной плоскости эллипсоида с уравнением поверхности в осях $G\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$: $b_1^{-1}x^2 + b_2^{-1}y^2 + b_3^{-1}z^2 = 1$, где b_i — квадраты длин главных полуосей эллипсоида. Главные моменты инерции в точке G обозначим через I_1, I_2, I_3 и наложим на них следующие ограничения:

$$I_i = b_i + \mu \tag{17}$$

Вычислением проверяется, что условие (17) равносильно

$$A\mathbf{n} = (\mu + \mathbf{a}^2)\mathbf{n} \tag{18}$$

Движение описывается системой (1) и уравнениями Пуассона, из которых в [5] получены уравнения для $\dot{\mathbf{a}}$. Из них следует: $\mathbf{n}B = 0$, $B\mathbf{n} = 0$, $\operatorname{Tr} B = 0$, $\operatorname{Tr} A^{-1}B = 0$. А из уравнений для $\dot{\mathbf{a}}$ качения выпуклого твердого тела по плоскости [3] можно найти величину $h(B) = \frac{1}{2}(k_1^2 + k_2^2)$, где k_1, k_2 — главные кривизны поверхности эллипсоида в точке контакта Q.

Поэтому в этой задаче справедлива теорема. Рассмотрим формулу (2). Из условия (18) следует $(\dot{\mathbf{a}}, A\mathbf{n}) = (\mu + \mathbf{a}^2)(\dot{\mathbf{a}}, \mathbf{n}) = 0$, $(\mathbf{n}, A^{-1}B\mathbf{a}) = 0$.

Равенство $(\det A)^{-1}(\mathbf{n}, A\mathbf{n}) = (\det A)^{-1}(\mu + \mathbf{a}^2) = ((\mathbf{a}, I\mathbf{a}) + l)$, где $l = b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3 + \mu(\mu + b_1 + b_2 + b_3)$, проверяется прямым вычислением. Откуда с учетом того, что $\operatorname{Tr} A^{-1}B = 0$, получим

$$N = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln(\det A) - (\mu + \mathbf{a}^2)(\mathbf{a}, I\dot{\mathbf{a}})(\det A)^{-1} =$$

$$= -\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{\det A}{(\mu + \mathbf{a}^2)^{1/2}}\right).$$

Дивергенция системы в переменных $\omega_1, \omega_2, \omega_3, n_1, n_2, n_3$ (где $\mathbf{n} = \Sigma n_i \mathbf{e}_i$) равна функции N. После исключения избыточной переменной n_3, получим следующую плотность интегрального инварианта: $M = (\det A)(\mu + \mathbf{a}^2)^{-1/2} |n_3|^{-1}$.

Интегральный инвариант равен

$$\int_D (\det A)(\mu + \mathbf{a}^2)^{-1/2}\, d\omega dS$$

$$D \in R^3\{\omega\} \times S^2\{\mathbf{n}\}, \quad S^2\{\mathbf{n}\}: (\mathbf{n}, \mathbf{n}) = 1$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Козлов В. В.* К теории интегрирования уравнений неголономной механики//Успехи механики. 1985. Т. 8. Вып. 3. С. 85—107.
2. *Татаринов Я. В.* Слабо неголономное представление задачи о качении твердого тела и возможности усреднения по фазовым торам//Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 1. С. 25—33.
3. *Ярощук В. А.* Новые случаи существования интегрального инварианта в задаче о качении твердого тела без проскальзывания по неподвижной поверхности//Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика. 1992. № 6. С. 26—30.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.
5. *Маркеев А. П.* О качении эллипсоида по горизонтальной плоскости//Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 2. С. 53—62.

Москва

Поступила в редакцию
24.XI.1992