

УДК 531.36

© 1995 г. А. П. МАРКЕЕВ

## О РЕЗОНАНСЕ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В БЛИЗКОЙ К ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЕ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Исследуются нелинейные колебания  $2\pi$ -периодической по  $t$  гамильтоновой системы с одной степенью свободы в малой конечной окрестности ее положения равновесия при наличии малых диссипативных сил, задаваемых функцией Релея. При отсутствии диссипации система близка к интегрируемой, функция Гамильтона аналитична, линеаризованная система устойчива, а ее характеристические показатели  $\pm i\nu$  — чисто мнимые, причем величина  $3\nu$  мало отличается от целого числа (резонанс третьего порядка).

Основное внимание уделяется существованию и устойчивости  $6\pi$ -периодических движений. При помощи нескольких замен переменных исследование сводится к рассмотрению системы двух автономных дифференциальных уравнений, зависящей от двух безразмерных параметров задачи: один характеризует величину резонансной «расстройку», а другой — величину диссипативных сил. Установлена зависимость числа периодических движений и их устойчивости от этих параметров.

**1. Постановка задачи.** Изучается движение системы с одной степенью свободы, функция Лагранжа  $L$  которой  $2\pi$ -периодична по независимой переменной  $t$ , содержит параметр  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ) и представляется рядом вида

$$L = L^{(0)}(q, \dot{q}) + \varepsilon L^{(1)}(q, \dot{q}, t) + \varepsilon^2 L^{(2)}(q, \dot{q}, t) + \dots$$

сходящимися при достаточно малых  $\varepsilon$ . На систему действуют малые диссипативные силы, задаваемые функцией Релея  $\Phi = 1/2\varepsilon^2 k \dot{q}^2$  ( $k > 0$  — const). Пусть  $q(t) \equiv 0$  является решением уравнения движения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} \quad (1.1)$$

а функция  $L$  аналитична относительно  $q, \dot{q}$  при достаточно малых  $|q|, |\dot{q}|$ . Без ограничения общности можно считать, что в рядах для функций  $L^{(j)}$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ) отсутствуют формы первых степеней относительно  $q, \dot{q}$ .

Считаем, что при  $\varepsilon = 0$  решение  $q(t) \equiv 0$  устойчиво по Ляпунову и это обнаруживается уже из анализа линеаризованного уравнения (1.1). Тогда, если  $L^{(0)}$  записывается в виде  $L^{(0)} = 1/2 a_2(q) \dot{q}^2 + a_0(q)$ , то при малых  $|q|$ :

$$a_2(q) = a_2(0) + a_2'(0)q + 1/2 a_2''(0)q^2 + \dots$$

$$\dots a_0(q) = a_0(0) + 1/2 a_0''(0)q^2 + \dots (a_2(0) > 0, \quad a_0''(0) < 0)$$

Частота  $\omega_0$  малых линейных колебаний определяется равенством  $\omega_0^2 = -a_0''(0)/a_2(0)$ .

Если утроенная частота  $\omega_0$  равняется целому числу (резонанс третьего порядка), то, при отсутствии диссипации ( $k = 0$ ), устойчивое при  $\varepsilon = 0$  равновесие  $q = 0$  становится, как правило, неустойчивым при сколь угодно малом, но отличном от нуля значении  $\varepsilon$  [1].

Цель данной работы состоит в исследовании нелинейных колебаний изучаемой системы в случае, близком к резонансу ( $3\omega_0$  мало отличается от целого числа) и при наличии малой диссипации ( $k \neq 0$ ).

2. Преобразование уравнения движения. Для проведения исследования удобно записать уравнение второго порядка (1.1) в виде системы двух уравнений первого порядка так, чтобы при отсутствии диссипации эта система имела форму уравнений Гамильтона.

Вводя обычным образом обобщенный импульс

$$p = \partial L / \partial \dot{q} = a_2(q) \dot{q} + \varepsilon \partial L^{(1)} / \partial \dot{q} + \varepsilon^2 \partial L^{(2)} / \partial \dot{q} + \dots$$

получим уравнения движения в виде системы

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} - \varepsilon^2 k \left( \frac{p}{a_2(q)} + O(\varepsilon) \right) \quad (2.1)$$

$$H = H^{(0)}(q, p) + \varepsilon H^{(1)}(q, p, t) + \varepsilon^2 H^{(2)}(q, p, t) + O(\varepsilon^3) \quad (2.2)$$

Функции  $H^{(j)}$  в (2.2) аналитичны при достаточно малых  $|q|, |p|$  и их разложение в ряды начинаются с членов не ниже второй степени относительно  $q, p$ ; коэффициенты рядов для функций  $H^{(j)}$  ( $j \geq 2$ )  $2\pi$ -периодичны по  $t$ .

Система (2.1) имеет решение  $q = p = 0$ . При  $k = 0$  линеаризованная система (2.1) устойчива, а ее характеристические показатели  $\pm iv$  — чисто мнимые, если только  $\varepsilon$  — достаточно малая величина. При этом величина  $v = v(\varepsilon)$  аналитична по  $\varepsilon$  и  $v(0) = \omega_0$ .

При помощи вещественной  $2\pi$ -периодической по  $t$  канонической замены переменных  $q, p \rightarrow q_*, p_*$  квадратичную по  $q, p$  часть гамильтониана (2.2) можно привести к нормальной форме  $1/2v(q_*^2 + p_*^2)$ , члены третьей степени в разложении  $H^{(0)}(q, p)$  в ряд уничтожить, а члены четвертой степени привести к нормальной форме  $1/4c(q_*^2 + p_*^2)^2$ , где  $c$  — постоянная, определяемая в процессе нормализации [1]. Считаем, что  $c \neq 0$ . После такого выбора переменных  $q_*, p_*$  сделаем еще каноническую замену переменных:  $x = \varepsilon^{-1}q_*, y = \varepsilon^{-1}p_*$ . Тогда уравнения движения примут вид

$$dx/dt = \partial H / \partial y + O(\varepsilon^3), \quad dy/dt = -\partial H / \partial x - \varepsilon^2 \delta (y + O(\varepsilon)) \quad (2.3)$$

$$\delta = k/a_2(0)$$

$$H = 1/2v(x^2 + y^2) + \varepsilon^2 [H_3^{(1)}(x, y, t) + 1/4c(x^2 + y^2)^2] + O(\varepsilon^3) \quad (2.4)$$

Величины, обозначенные в (2.3), (2.4) через  $O(\varepsilon)$  и  $O(\varepsilon^3)$ , обращаются в нуль при  $x = y = 0$ , причем  $O(\varepsilon^3)$  в (2.4) — это ряд по степеням  $x, y$ , начинающийся с членов не ниже третьей степени. Функция  $H_3^{(1)}$  в (2.4) — это совокупность членов третьей степени в разложении функции  $H^{(1)}(x, y, t)$  из (2.2) в ряд по степеням  $x, y$ .

Следующее преобразование  $x, y \rightarrow \xi, \eta$  обусловлено характером исследуемого резонанса. Так как рассматриваемый резонанс имеет третий порядок, то величина  $3v$  мало отличается от целого числа  $N$ . Положим  $N - 3v = \varepsilon^2 3\alpha$ . При помощи нелинейной,  $2\pi$ -периодической по  $t$ , вещественной канонической замены переменных  $x, y \rightarrow \xi, \eta$  типа преобразования Биркгофа [2] упростим члены третьей степени  $H_3^{(1)}$  в (2.4). Эта замена переменных отличается от тождественной на величины порядка  $\varepsilon^2$ . Новый гамильтониан  $\Gamma$  станет таким [1]:

$$\Gamma = 1/2v(\xi^2 + \eta^2) + \varepsilon^2 [1/4c(\xi^2 + \eta^2)^2 + (\kappa_1 \sin Nt + \kappa_2 \cos Nt)(\eta^3 - 3\eta\xi^2) + (\kappa_1 \cos Nt - \kappa_2 \sin Nt)(\xi^3 - 3\xi\eta^2)] + O(\varepsilon^3)$$

где  $\kappa_1, \kappa_2$  — постоянные; будем предполагать, что  $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 \neq 0$ .

Уравнения движения в новых переменных примут вид

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} + O(\varepsilon^3), \quad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} - \varepsilon^2 \delta \eta + O(\varepsilon^3)$$

В полярных канонически сопряженных переменных  $\varphi, r$ , вводимых равенствами  $\xi = (2r)^{1/2} \sin \varphi, \eta = (2r)^{1/2} \cos \varphi$  уравнения движения станут такими

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \Gamma}{\partial r} + \varepsilon^2 \delta \sin \varphi \cos \varphi + O(\varepsilon^3), \quad \frac{dr}{dt} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi} - \varepsilon^2 \delta r (1 + \cos 2\varphi) + O(\varepsilon^3) \quad (2.5)$$

$$\Gamma = vr + \varepsilon^2 [cr^2 + \kappa r^{3/2} \cos(3\varphi - Nt + \varphi_0)] + O(\varepsilon^3)$$

$$\kappa = 2^{3/2} (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)^{1/2}, \quad \sin \varphi_0 = \kappa_1 (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)^{-1/2}, \quad \cos \varphi_0 = \kappa_2 (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)^{-1/2}$$

Если теперь вместо переменных  $\varphi, r$  ввести переменные  $\varphi_*, r_*$  при помощи равенств  $\varphi_* = \varphi + \varepsilon^2 \delta (4v)^{-1} \cos 2\varphi, r_* = r + \varepsilon^2 \delta (2v)^{-1} r \sin 2\varphi$ , то главная ( $\sim \varepsilon^2$ ) часть диссипативных членов в уравнениях (2.5) упростится: в первом уравнении она будет исключена, а во втором примет вид  $-\varepsilon^2 \delta r_*$ . Переходя затем во вращающуюся систему координат при помощи замены переменных  $\varphi_*, r_* \rightarrow \psi, R$ , задаваемой равенствами  $\varphi_* = \psi + 1/3 (Nt - \varphi_0), r_* = R$ , получим уравнения движения в виде

$$\frac{d\psi}{dt} = \partial F / \partial R + O(\varepsilon^3), \quad dR/dt = -\partial F / \partial \psi - \varepsilon^2 \delta R + O(\varepsilon^3) \quad (2.6)$$

$$F = \varepsilon^2 (-\alpha R + cR^2 + \kappa R^{3/2} \cos 3\psi) + O(\varepsilon^3)$$

Правые части уравнений (2.6) бл-периодичны по  $t$ , причем зависимость от  $t$  проявляется при учете членов выше второй степени по  $\varepsilon$ .

И, наконец, для удобства дальнейшего анализа целесообразно сделать еще одно каноническое преобразование

$$R = \kappa^2 c^{-2} \rho, \quad \psi = s(\theta - \pi/6) + \pi/6 \quad (s = \text{sign } c)$$

и ввести новую независимую переменную  $\tau = \varepsilon^2 \kappa^2 |c|^{-1} t$ . В новых переменных уравнения движения принимают такой вид:

$$d\theta/d\tau = \partial \gamma / \partial \rho + O(\varepsilon), \quad d\rho/d\tau = -\partial \gamma / \partial \theta - \chi \rho + O(\varepsilon) \quad (2.7)$$

$$\gamma = \gamma_0(\theta, \rho) + O(\varepsilon), \quad \gamma_0 = \rho^2 + \rho^{3/2} \cos 3\theta - \mu \rho \quad (2.8)$$

$$\mu = c\alpha/\kappa^2, \quad \chi = |c| \delta/\kappa^2$$

**3. Фазовые траектории невозмущенной системы.** Если в правых частях уравнений (2.7) пренебречь величинами порядка  $\varepsilon$  и выше, то получим уравнения движения «невозмущенной» системы

$$d\theta/d\tau = 2\rho + 3/2 \rho^{1/2} \cos 3\theta - \mu, \quad d\rho/d\tau = 3\rho^{3/2} \sin 3\theta - \chi \rho \quad (3.1)$$

В канонически сопряженных переменных  $x_1, x_2$ , определяемых равенствами  $x_1 = (2\rho)^{1/2} \cos \theta, x_2 = (2\rho)^{1/2} \sin \theta$ , уравнения (3.1) имеют вид

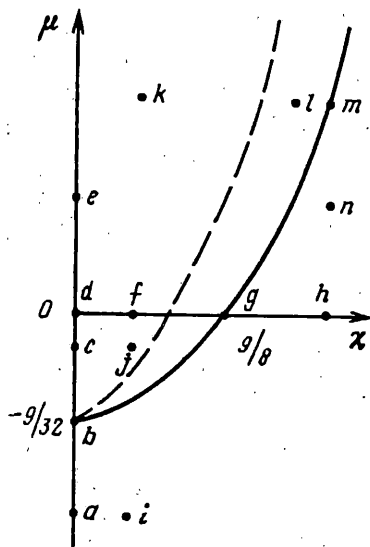
$$dx_1/d\tau = \partial H_0 / \partial x_2 - 1/2 \chi x_1, \quad dx_2/d\tau = -\partial H_0 / \partial x_1 - 1/2 \chi x_2 \quad (3.2)$$

$$H_0 = 1/2 \mu (x_1^2 + x_2^2) - \sqrt{2}/4 x_1 (x_1^2 - 3x_2^2) - 1/4 (x_1^2 + x_2^2)^2$$

Уравнения движения невозмущенной системы зависят от двух безразмерных параметров  $\mu$  и  $\chi$ . Параметр  $\mu$  характеризует близость изучаемой системы к резонансу, он может принимать значения любого знака; если  $\mu = 0$ , то имеет место точный резонанс  $3v = N$ . Параметр  $\chi$  — неотрицательная величина, он характеризует величину диссипативных сил; при  $\chi = 0$  диссипативные силы отсутствуют.

Исследуем фазовые траектории невозмущенной системы и перестройку ее фазового портрета при изменении параметров  $\chi, \mu$ .

Сразу отметим, что при наличии диссипации ( $\chi \neq 0$ ) периодическими движениями невозмущенной системы могут быть только ее положения равновесия.



Фиг. 1

В самом деле, дивергенция вектора, первая и вторая компоненты которого совпадают с правыми частями соответствующих уравнений системы (3.2), равна  $-\chi \neq 0$ , и, следовательно, согласно критерию Бендиксона [3], у системы (3.2) нет замкнутых фазовых траекторий (предельных циклов).

Положение равновесия  $x_1 = x_2 = 0$ , отвечающее решению  $q(t) = 0$  исходного уравнения (1.1), существует при любых  $\mu$  и  $\chi$ .

Пусть  $\rho_*$ ,  $\theta_*$  — значения переменных  $\rho$ ,  $\theta$ , отвечающие другим, отличным от начала координат, положениям равновесия. Они удовлетворяют системе уравнений

$$3\rho_*^{1/2} \sin 3\theta_* = \chi, \quad 3\rho_*^{1/2} \cos 3\theta_* = 2(\mu - 2\rho_*) \quad (3.3)$$

Отсюда следует, что величины  $\rho_*$  является корнем квадратного уравнения

$$16\rho_*^2 - (9 + 16\mu)\rho_* + 4\mu^2 + \chi^2 = 0 \quad (3.4)$$

Если выполняется условие

$$\mu > 29\chi^2 - 9/32 \quad (3.5)$$

то уравнение (3.4) имеет два вещественных положительных корня ( $\rho_1 > \rho_2$ ):

$$\rho_1 = (9 + 16\mu - d^{1/2})/32, \quad \rho_2 = (9 + 16\mu - d^{1/2})/32 \quad (3.6)$$

$$d = 81 + 288\mu - 64\chi^2$$

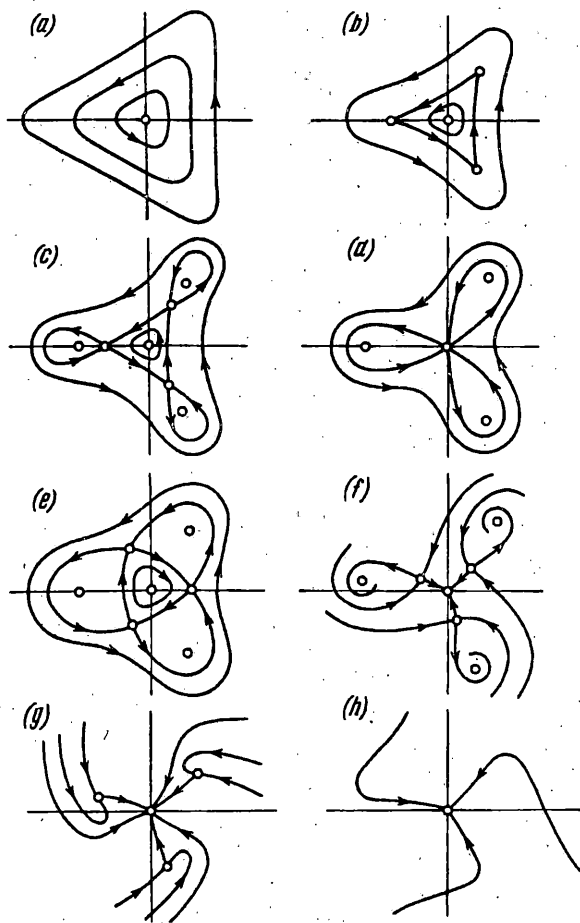
При известном  $\rho_* = \rho_1$  или  $\rho_2$  величина  $\theta_*$  определяется из (3.3) с точностью до величины, кратной  $2\pi/3$ .

Если неравенство (3.5) выполняется с обратным знаком, то уравнение (3.4) не имеет вещественных корней. Для бифуркационных значений параметров, лежащих в плоскости  $\chi, \mu$  на кривой, задаваемой уравнением

$$\mu = 29\chi^2 - 9/32 \quad (3.7)$$

уравнение (3.4) имеет два равных корня:  $\rho_* = \rho_1 = \rho_2 = 9/64 + \chi^2/9$ . Соответствующее значение  $\theta_* = \pi/3 - 1/3 \arcsin(\chi\rho_*^{-1/2}/3)$ .

Бифуркационная кривая показана на фиг. 1 сплошной линией. Неравенство (3.5) выполняется для значений параметров, отвечающих части плоскости  $\chi, \mu$ , лежащей левее и выше этой кривой.



Фиг. 2 (a—h)

На фиг. 2, *a—n* в плоскости  $x_1, x_2$  представлены фазовые портреты невозмущенной системы для различных значений параметров  $\chi, \mu$ . Эти значения параметров отвечают соответствующим точкам *a, ..., n* на фиг. 1. Фазовый портрет переходит в себя при повороте на угол  $2\pi/3$ .

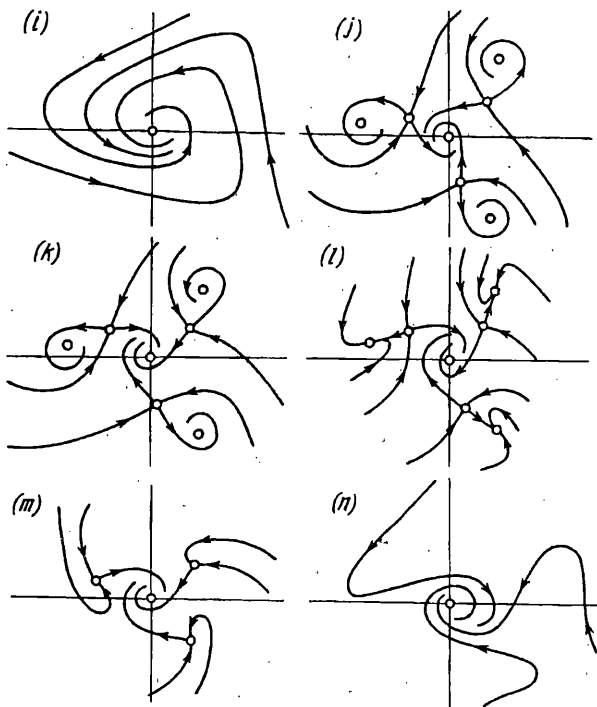
Найденные выше положения равновесия отвечают особым точкам фазовой плоскости невозмущенной системы. Исследуем их характер,

особая точка  $x_1 = x_2 = 0$ , существующая при любых допустимых значениях параметров  $\chi, \mu$ , является либо центром (при  $\mu \neq 0, \chi = 0$ ; фиг. 2, *a, b, c, e*), либо устойчивым узлом (при  $\mu = 0, \chi \neq 0$ ; фиг. 2, *f, g, h*), либо устойчивым фокусом (при  $\mu \neq 0, \chi \neq 0$ ; фиг. 2, *i—n*). Если же  $\mu = 0, \chi = 0$ , то  $x_1 = x_2 = 0$  — сложная особая точка, отвечающая двойному нулевому корню характеристического уравнения; окрестность особой точки состоит из шести седловых секторов (фиг. 2, *d*).

Характеристическое уравнение, отвечающее особым точкам, не совпадающим с началом координат, имеет вид

$$\lambda^2 + \chi\lambda + 3/4(16\rho_*^2 - 4\mu^2 - \chi^2) = 0 \quad (3.8)$$

При  $\rho_* = \rho_1$ , его можно преобразовать к виду  $\lambda^2 + \chi\lambda + 12\rho_1(\rho_1 - \rho_2) = 0$ , а при  $\rho_* = \rho_2$  — к виду  $\lambda^2 + \chi\lambda - 12\rho_2(\rho_1 - \rho_2) = 0$ . Отсюда следует, что внутри области (3.5) особые точки, отвечающие меньшему из корней уравнения (3.4)  $\rho_* = \rho_2 \neq 0$ , являются седлами.



Фиг. 2 (i—n)

Особые точки, отвечающие большему из корней уравнения (3.4)  $\rho_* = \rho_1$ , внутри области (3.5) будут либо устойчивыми фокусами, если  $0 < \chi^2 < 48\rho_1(\rho_1 - \rho_2)$ , либо устойчивыми узлами, если  $\chi^2 \geq 48\rho_1(\rho_1 - \rho_2)$ . Учитывая выражения (3.6), уравнение кривой, разделяющей указанные области с различным характером особых точек  $\rho_* = \rho_1, \theta_*$ , можно записать в виде

$$196\chi^4 + 9(64\mu^2 - 96\mu - 27)\chi^2 - 81\mu^2(9 + 32\mu) = 0 \quad (3.9)$$

Кривая (3.9) показана на фиг. 1 штриховой линией. Левее и выше этой кривой особые точки, для которых  $\rho_* = \rho_1$ , будут (при  $\chi > 0$ ) устойчивыми фокусами (фиг. 2, j, f, k). На самой кривой (3.9) и правее и ниже нее внутри области (3.5) эти особые точки являются (при  $\chi > 0$ ) устойчивыми узлами (фиг. 2, l).

Теперь рассмотрим характер особых точек, не совпадающих с началом координат, для значений параметров  $\chi, \mu$ , лежащих на бифуркационной кривой (3.7). Характеристическое уравнение (3.8) тогда принимает вид  $\lambda^2 + \chi\lambda = 0$ . Оно имеет либо два нулевых корня (при  $\chi = 0, \mu = -9/32$  — точка b на фиг. 1), либо один нулевой и один отрицательный корень (при  $\chi \neq 0$ ). Рассмотрим сначала последний случай.

Для выяснения характера особой точки сделаем в (3.1) замену  $\theta = \theta_* + u, \rho = \rho_* + v$ . Тогда, ограничиваясь членами не выше второй степени относительно  $u, v$  получим уравнения возмущенного движения в окрестности точки  $\rho = \rho_*, \theta = \theta_*$  в виде

$$\frac{du}{d\tau} = -\frac{3}{2}\chi u + \frac{2\chi^2}{9\rho_*}v + \frac{\partial G}{\partial v}, \quad \frac{dv}{d\tau} = -\frac{27\rho_*}{8}u + \frac{\chi}{2}v - \frac{\partial G}{\partial u} \quad (3.10)$$

$$G = \frac{3\chi\rho_*}{2}u^3 + \frac{81}{32}u^2v - \frac{3\chi}{8\rho_*}uv^2 + \frac{3}{128\rho_*^2}v^3$$

После линейной замены переменных  $u = 4\lambda(u_1 + v_1)$ ,  $v = 9\rho_*(3u_1 + v_1)$  система уравнений (3.10) примет форму, удобную для исследования устойчивости в критическом случае одного нулевого корня [4]:

$$du_1/d\tau = \partial H_3/\partial v_1, \quad dv_1/d\tau = -\lambda v_1 - \partial H_3/\partial u_1 \quad (3.11)$$

$$H_3 = -\frac{4\lambda^2}{3}(u_1 + v_1)^3 - \frac{81\lambda}{16}(u_1 + v_1)^2(3u_1 + v_1) + \\ + \frac{27\lambda}{16}(u_1 + v_1)(3u_1 + v_1)^2 - \frac{243}{1024\lambda}(3u_1 + v_1)^3$$

При  $v_1 = 0$  нелинейные члены в уравнениях (3.11) будут такими

$$\frac{\partial H_3}{\partial v_1} = -\left(\frac{6561}{1024\lambda} + \frac{81\lambda}{8} + 4\lambda^2\right)v_1^2, \quad \frac{\partial H_3}{\partial u_1} = -\left(\frac{19683}{1024\lambda} + 4\lambda^2\right)v_1^2$$

Отсюда следует [4, 5] неустойчивость равновесия  $\rho = \rho_*$ ,  $\theta = \theta_*$  в рассматриваемом критическом случае. На плоскости  $x_1, x_2$  этому положению равновесия отвечает сложная особая точка типа седло-узел. Она имеет один узловой и два седловых сектора (фиг. 2, *g, m*).

Фиг. 2, *l, m, n* иллюстрируют перестройку фазового портрета при переходе параметров  $\lambda, \mu$  через бифуркационную кривую (3.7). Устойчивый узел и седло, существующие на фиг. 2, *l*, на кривой (3.7) сливаются, образуя сложную особую точку седло-узел (фиг. 2, *m*). После перехода через бифуркационную кривую эта особая точка исчезает и у системы (3.2) остается одна особая точка  $x_1 = x_2 = 0$ , являющаяся устойчивым фокусом (фиг. 2, *n*).

Рассмотрим теперь точку  $\lambda = 0$ ,  $\mu = -9/32$  бифуркационной кривой. В этом случае особая точка, не совпадающая с началом координат, представляет собой вырожденный седло-узел (фиг. 2, *b*). Окрестность особой точки состоит из двух седловых секторов.

Фиг. 2, *a—e* показывают изменение фазового портрета гамильтоновой системы ( $\chi = 0$ ) при переходе через резонанс третьего порядка (см., также [6, 7]).

Фиг. 2, *e, f, g, h* иллюстрируют изменение фазового портрета в случае точного резонанса ( $\mu = 0$ ) при увеличении параметра диссипации  $\lambda$ .

**4. Периодические движения возмущенной системы.** Пусть величина  $\varepsilon$  мала, но отлична от нуля. Поведение возмущенной системы (2.7) несравненно более сложно нежели поведение невозмущенной системы (3.1). Рассмотрим только задачу о периодических движениях. Будем считать, что параметры  $\lambda, \mu$  не принадлежат бифуркационной кривой, причем  $\lambda > 0$ .

Как показано выше, для таких значений параметров корни характеристического уравнения линеаризованной в окрестности равновесия невозмущенной системы (3.1) имеют отличные от нуля вещественные части. Учитывая также, что члены порядка  $\varepsilon$  и выше в системе (2.7) имеют период бл относительно  $t$ , на основании теории Пуанкаре периодических движений квазилинейных систем [8], получаем, что исходная система, описываемая уравнением (1.1), имеет бл-периодические решения. Эти решения аналитичны по  $\varepsilon$  и при  $\varepsilon = 0$  переходят в особые точки невозмущенной системы (3.2). Отметим, что особые точки  $\rho_*, \theta_*$ , у которых равновесные значения  $\rho_* \neq 0$  одинаковы, а значения  $\theta_*$  отличаются на  $2\pi/3$ , соответствуют одному и тому же бл-периодическому по  $t$  движению исходной возмущенной системы.

Учитывая непрерывность характеристических показателей по  $\varepsilon$ , получаем, что при достаточно малых  $\varepsilon$  решение  $q(t) \equiv 0$  исходного уравнения (1.1) асимптотически устойчиво; бл-периодическое движение, отвечающее меньшему ( $\rho_* = \rho_2$ ) и большему ( $\rho_* = \rho_1$ ) из корней уравнения (3.4), неустойчиво и асимптотически устойчиво соответственно.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93—013—16257).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
2. *Биркгоф Дж. Д.* Динамические системы. М.— Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.
3. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.— Л.: Гостехиздат, 1949. 550 с.
4. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
5. *Баутин Н. Н., Леонович Е. А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976. 496 с.
6. *Чешанков Б. И.* О субгармонических колебаниях маятника//ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 2. С. 343—348.
7. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.
8. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.

Москва

Поступила в редакцию  
29.XI.1993