МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1995

УДК 531.36

© 1995 г. Л. Д. АКУЛЕНКО

АНАЛИЗ СИСТЕМЫ СО СЛОЖНЫМ МЕХАНИЗМОМ ВОЗБУЖДЕНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Исследуется двухмассовая колебательная система, находящаяся на вертикально вибрирующем основании. Система состоит из нелинейного осциллятора, совершающего перемещения вдоль горизонтальной оси, и соединенного с ним плоского математического маятника. Исследуется механизм возбуждения колебаний маятника (параметрический резонанс) и передача их к несущему твердому телу. Изучаются резонансные эффекты, обусловленные соизмеримостью частот колебаний основания, осциллятора и маятника. Установлено также, что в первом приближении высокочастотные вибрации основания не приводят к неограниченному (экспоненциальному) росту амплитуды колебаний маятника и осциллятора. Определен характер качественного поведения усредненной системы в широком диапазоне изменения геометрических и инерционных параметров.

1. Постановка задачи. Рассматривается двухмассовая колебательная система, подверженная кинематическому воздействию. Несущее тело массы M может перемещаться вдоль горизонтальной оси X. Оно упругим образом связано с основанием (осью Y). Основание совершает заданные движения $Y_0(t)$ вдоль оси Y, например колебательного характера. Связь тела и основания предполагается двусторонней удерживающей. К телу M присоединен плоский математический маятник массы m и длины l. Его положение характеризуется углом Φ отклонения от вертикали.

На движение системы могут оказывать воздействие возмущающие факторы различной физической природы (диссипация, наклоны направляющей, внешние силы и моменты сил и т. п.). Элементарную работу δA этих воздействий представим в виде $\delta A = P\delta X + N\delta\Phi$, где δX, $\delta\Phi$ — виртуальные перемещения. Сила P и момент сил N могут зависеть от времени t и фазовых переменных X, $X^\cdot$; Φ, $\Phi^\cdot$.

Вычислим суммарную кинетическую энергию K системы

$$K = K_M + K_m, \quad K_M = \tfrac{1}{2}M\,(X^{\cdot 2} + Y_0^{\cdot 2}) \tag{1.1}$$

$$K_m = \tfrac{1}{2}m\,[X^{\cdot 2} + Y_0^{\cdot 2} + l^2\Phi^{\cdot 2} + 2l\Phi^\cdot(X^\cdot\cos\Phi + Y_0^\cdot\sin\Phi)]$$

В более общем случае плоского физического маятника к выражению K_m нужно добавить величину $\tfrac{1}{2}J\Phi^{\cdot 2}$, где J — момент инерции относительно центра масс; тогда l — «плечо» маятника. Во избежание излишних загромождений далее рассматривается математический маятник ($J = 0$). Для полной потенциальной энергии Π системы имеем представление

$$\Pi = \Pi_M + \Pi_m, \quad \Pi_M = MgY_0(t) + U(X) \tag{1.2}$$

$$\Pi_m = mg\,[Y_0(t) - l\cos\Phi]$$

где g — ускорение сил тяготения. Считается, что потенциальная энергия U упругой связи тела M и основания имеет вид

$$U(X) = \tfrac{1}{2}k\,(X - X_0)^2 + V(X), \quad V = O((X - X_0)^3)$$

Здесь k — коэффициент упругости в случае малых колебаний, X_0 — координата положения равновесия, далее $X_0 = 0$; V — возмущение.

На основе (1.1), (1.2) и выражения для виртуальной работы δA уравнения движения Лагранжа второго рода записываются следующим образом:

$$(M + m) X^{\cdot\cdot} + ml\Phi^{\cdot\cdot}\cos\Phi = P - U'(X) + ml\Phi^{\cdot 2}\sin\Phi$$

$$ml(X^{\cdot\cdot}\cos\Phi + l\Phi^{\cdot\cdot}) = N - ml(g + Y_0^{\cdot\cdot})\sin\Phi \qquad (1.3)$$

Для заданных конкретных выражений Y_0, U, P, N и начальных значений X^0, $X^{\cdot 0}$, Φ^0, $\Phi^{\cdot 0}$ искомых фазовых переменных система уравнений (1.3) может быть исследована численными методами. Исходя из интуитивных и эвристических представлений удается установить наличие механических качественных особенностей движения. Например, в системе может иметь место параметрический резонанс [1—5] — раскачка маятника вследствие вертикальных колебаний точки подвеса. При определенных условиях параметрическое возбуждение маятника приведет к существенному изменению амплитуды колебаний несущего тела в горизонтальном направлении. Анализ указанного сложного механизма возбуждения и передачи параметрических колебаний проводится ниже.

Данное исследование предпринято с целью конечномодовой интерпретации интересного гидродинамического явления — параметрического возбуждения горизонтальных колебаний сосуда со стратифицированной жидкостью [6]. Сосуд находится на колеблющемся вертикально основании и связан с ним упругой связью. Для описания движения сосуда применялась линеаризованная модель, описываемая во времени интегродифференциальным уравнением типа Вольтерры с весьма сложным выражением для ядра интегрального оператора. Ядро выражается посредством функционального ряда, содержащего счетное число функций Матье. Эти функции — коэффициенты ряда Фурье — отвечают спектру собственных колебаний стратифицированной жидкости в сосуде. При определенном способе масштабирования и введения малого параметра система (1.3) является адекватной конечномерной моделью указанной системы с распределенными параметрами, хорошо описывающей ее поведение на асимптотически большом интервале времени.

Введем безразмерный числовой параметр ε, неизвестные переменные x, φ и возмущающие факторы f, p, n следующим образом:

$$mM^{-1} = \varepsilon^2,\ Xl^{-1} = \varepsilon^2 x,\ \Phi = \varepsilon\varphi,\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0],\ \varepsilon_0 \ll 1$$

$$U'(Ml)^{-1} = \varepsilon^2\nu^2 x + \varepsilon^3 f(x),\ \nu^2 = kM^{-1},\ \varepsilon^3 f \equiv V(Ml)^{-1}$$

$$P(Ml)^{-1} = \varepsilon^3 p(t, x, x^{\cdot}, \varphi, \varphi^{\cdot}),\ N(ml^2)^{-1} = \varepsilon^2 n(t, x, x^{\cdot}, \varphi, \varphi^{\cdot}) \qquad (1.4)$$

В результате система (1.3) преобразуется к виду квазилинейной колебательной системы с переменными, в частности, периодическими коэффициентами

$$x^{\cdot\cdot} + \nu^2 x = \varepsilon\omega^2(t)\varphi + \varepsilon(p - f) \qquad (1.5)$$

$$\varphi^{\cdot\cdot} + \omega^2(t)\varphi = \varepsilon\nu^2 x + \varepsilon n,\ \omega^2(t) \equiv (g + Y_0^{\cdot\cdot}(t))\,l^{-1} > 0$$

Функции ω^2, p, n, f предполагаются удволетворяющими требуемым свойствам квазипериодичности по t (существования равномерного среднего) и гладкости относительно x, $x^{\cdot}$; φ, $\varphi^{\cdot}$ в некоторой ограниченной открытой области их изменения. Отметим, что в системе (1.5) отброшены члены $O(\varepsilon^2)$ и более высоких порядков по ε. Связь между подсистемами обусловлена введением масштабов согласно (1.4). При $\varepsilon = 0$ она распадается на две независимые колебательные подсистемы. Переменная x описывает простой гармонический осциллятор, а φ — параметрические возбуждаемую колебательную систему (при $\omega(t)$ периодической — уравнение типа Хилла [4]). Для $\varepsilon > 0$ анализ уравнений (1.5) может быть проведен методами теории возмущений (Ляпунова — Пуанкаре [2—5], разделения движений [1] и др.). Метод усреднения [1—4] позволяет наряду со стационарными колебаниями [2] также изучить переходные процессы в системе (1.5) с заданными начальными условиями.

Заметим, что другие способы введения малого параметра и масштабирования (см. *п.* 3) приведут к отличным от (1.5) системам и другим явлениям. Возьмем для примера следующие соотношения:

$$mM^{-1} = \varepsilon,\ Xl^{-1} = \varepsilon x,\ P\,(Ml)^{-1} = \varepsilon p,\ N\,(ml^2)^{-1} = \varepsilon n$$

где $\Phi = \varphi$ — произвольно, а p, n — 2π-периодические функции φ. Получим вращательно-колебательную систему вида [7]:

$$x^{\cdot\cdot} + \nu^2 x = \varepsilon F,\ \varphi^{\cdot\cdot} + \omega^2\,(t)\sin\varphi = \varepsilon\Psi$$

распадающуюся при $\varepsilon = 0$ на две независимые подсистемы.

Следует также отметить, что соотношения (1.4) приводят к одинаковым порядкам по ε величин энергий несущего тела и маятника. Это обстоятельство является основной причиной возможного существенного взаимодействия и перестройки движений подсистем на асимптотически большом интервале времени. Наряду с явлениями резонанса и параметрического резонанса в рассматриваемой системе могут осуществляться режимы стационарных колебаний и вращений [2—5], биения колебаний в подсистемах, аналогичные [8].

2. Асимптотический анализ параметрического возбуждения малых колебаний. Рассмотрим конкретные случаи системы (1.5), представляющие интерес в теоретическом и прикладном аспектах. Без ограничений общности в этих уравнениях можно положить $\nu = 1$. Такое упрощение достигается введением безразмерного аргумента $t' = \nu t$ и переобозначением функций ω, f, p, n, $Y_0^{\cdot\cdot}$.

2.1. Отсутствие вертикальных колебаний основания. Исследуем кратко поведение системы (1.5) в случае $\omega\,(t) \equiv \mathrm{const}$, т. е. $Y_0^{\cdot\cdot} \equiv 0$ или $Y_0^{\cdot\cdot} = \mathrm{const} \neq 0$. Тогда исходная колебательная система является квазилинейной с постоянными коэффициентами. Для ее изучения вводятся оскулирующие переменные типа Ван дер Поля [1—4, 6]:

$$x = a\cos t + b\sin t,\ x^{\cdot} = \partial x/\partial t,\ \varphi = \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t,\ \varphi^{\cdot} = \partial\varphi/\partial t \qquad (2.1)$$

где a, b, α, β — неизвестные переменные. Производные $x^{\cdot}$, $\varphi^{\cdot}$ (фазовые скорости) определяются дифференцированием по явно входящему в (2.1) аргументу t. В результате для неизвестных переменных получается стандартная по Боголюбову система вида [1, 7]:

$$a^{\cdot} = -\,\varepsilon\,(\omega^2\varphi + p - f)\sin t,\ b^{\cdot} = \varepsilon\,(\omega^2\varphi + p - f)\cos t \qquad (2.2)$$

$$\alpha^{\cdot} = -\,\varepsilon\omega^{-1}\,(x + n)\sin\omega t,\ \beta^{\cdot} = \varepsilon\omega^{-1}\,(x + n)\cos\omega t$$

Здесь исходные быстрые переменные x, $x^{\cdot}$; φ, $\varphi^{\cdot}$ заменяются их выражениями через a, b, α, β, t согласно (2.1). Начальные значения медленных переменных определяются стандартным образом. Асимптотический анализ системы (2.2) проводится методом усреднения [1]. Отметим, что правые части уравнений оказываются сложными многочастотными функциями времени t. Частотный спектр включает частоты собственных колебаний 1 (т. е. ν) и ω, а также частоты внешних воздействий p, n. В усредненной по t системе могут существовать стационарные точки, определяющие квазистационарные колебания исходной системы (2.2) или (1.5).

Рассмотрим некоторые частные случаи. При условии отсутствия (главного) внутреннего резонанса ($\omega \neq 1$) и при следующей структуре средних, которые обозначаются угловыми скобками:

$$\langle p^{\sin}_{\cos} t\rangle \equiv p_{s,\,c}\,(a,\,b),\ \langle n^{\sin}_{\cos}\omega t\rangle \equiv n_{s,\,c}\,(\alpha,\,\beta) \qquad (2.3)$$

уравнения (2.2) для $(a,\,b)$ и $(\alpha,\,\beta)$ разделяются полностью в первом приближении по ε на асимптотически большом интервале времени $t \sim \varepsilon^{-1}$. Отметим, что $af_s - bf_c \equiv 0$, поскольку $f = f(x)$. В частности, если $p_{s,c} \equiv 0$, то $r^2 = a^2 + b^2 = \text{const}$ (интеграл энергии для осциллятора). Далее, если к тому же $f_{s,c} \equiv 0$, то a, $b = \text{const}$; аналогично α, $\beta = \text{const}$ при $n_{s,c} \equiv 0$. Системы для (a, b) и (α, β) исследуются методами фазовой плоскости или др. В системе (2.2) имеет место частичное разделение, если выполняется или первая или вторая группа тождеств (2.3).

Пусть теперь для определенности $p = p(x^\cdot)$, $n = n(\varphi^\cdot)$ — внешние воздействия, зависящие от скоростей, например сила и момент сил диссипативного типа: $p = -p^*(|x^\cdot|)\,x^\cdot$; $n = -n^*(|\varphi^\cdot|)\,\varphi^\cdot$, где функции p^*, n^* положительны. Тогда величины a, b, α, β убывают согласно уравнениям (штрихом обозначено дифференцирование по медленному времени $\tau = \varepsilon t$):

$$a' = -p_0(r)\,a + f_s(a, b), \quad b' = -p_0(r)\,b - f_c(a, b)$$

$$\alpha' = -n_0(\rho)\,\alpha, \quad \beta' = -n_0(\rho)\,\beta, \quad \rho = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} \qquad (2.4)$$

$$p_0(r) = \langle p^*(r\,|\sin t|)\sin^2 t\rangle = \langle p^*(r\,|\cos t|)\cos^2 t\rangle > 0$$

$$n_0(\rho) = \langle n^*(\rho\,|\sin \omega t|)\sin^2 \omega t\rangle = \langle n^*(\rho\,|\cos \omega t|)\cos^2 \omega t\rangle > 0$$

Из уравнений (2.4) сразу следует, что амплитуды r и ρ убывают: $r' = -p_0(r)\,r$, $\rho' = -n_0(\rho)\,\rho$. Линейная диссипация (вязкое трение), когда p^*, $n^* = \text{const}$, приводит к выражениям $p_0 = \tfrac{1}{2}p^* > 0$, $n_0 = \tfrac{1}{2}n^* > 0$ и экспоненциальному убыванию в медленном времени τ переменных a, b, r и α, β, ρ с показателями $-p_0$ и $-n_0$ соответственно. При наличии сухого трения $p = -\zeta x^\cdot |x^\cdot|^{-1}$, $n = -\varkappa\varphi^\cdot|\varphi^\cdot|^{-1}$ убывание переменных r, ρ происходит с постоянной скоростью: $r' = -2\zeta/\pi$, $\rho' = -2\varkappa/\pi$. Аналогичным образом может быть учтено влияние возмущающих факторов с другими физическими характеристиками. Существенной особенностью является отсутствие, как правило, взаимосвязи между переменными x и φ в первом приближении по ε на асимптотически большом интервале времени $t \sim \varepsilon^{-1}$.

Ситуация кардинально изменяется, если имеет место внутренний резонанс $\omega = 1$ ($\omega = \nu$). Тогда в медленном времени $\tau = \varepsilon t$ усредненные уравнения (2.2) примут вид

$$a' = -\tfrac{1}{2}\beta - p_s + f_s, \quad b' = \tfrac{1}{2}\alpha + p_c - f_c$$

$$\alpha' = -\tfrac{1}{2}b - n_c, \quad \beta' = \tfrac{1}{2}a + n_c \qquad (2.5)$$

Таким образом, заведомо связанными оказываются переменные a и β, b и α, а тем самым и все переменные. Из (2.5) следует, что в системе (1.5) могут происходить «биения», т. е. периодическое чередование колебаний несущего тела и маятника [8]. Заметим, в частности, что при условиях $p_{s,c} \equiv 0$, $n_{s,c} \equiv 0$ имеет место интеграл энергии $r^2 + \rho^2 = \text{const}$. Пусть, кроме того, $f_{s,c} \equiv 0$; тогда с учетом начальных условий $a^0 = x^0$, $b^0 = x^{\cdot 0}$, $\alpha = \varphi^0$, $\beta^0 = \varphi^{\cdot 0}$ получим явные выражения для искомых оскулирующих переменных

$$a(\tau) = \Delta\cos(\tau/2 + \delta), \quad b(\tau) = \Gamma\sin(\tau/2 + \gamma)$$

$$\alpha(\tau) = \Gamma\cos(\tau/2 + \gamma), \quad \beta(\tau) = \Delta\sin(\tau/2 + \delta) \qquad (2.6)$$

$$\Delta = (x^{02} + \varphi^{\cdot 02})^{1/2}, \quad \cos\delta = x^0/\Delta, \quad \sin\delta = \varphi^{\cdot 0}/\Delta$$

$$\Gamma = (\varphi^{02} + x^{\cdot 02})^{1/2}, \quad \cos\gamma = \varphi^0/\Gamma, \quad \sin\gamma = x^{\cdot 0}/\Gamma$$

Из (2.6) следует, что указанный выше интеграл энергии может быть представлен в виде $r^2 + \rho^2 = \Delta^2 + \Gamma^2$. Картина биений колебаний по x и φ может быть описана следующим образом. При увеличении r от $r_{\min}$ до $r_{\max}$ происходит уменьшение ρ от $\rho_{\max}$ до $\rho_{\min}$, где указанные экстремальные значения r, ρ определяются согласно (2.6). Если $r^0 \neq 0$, $\rho^0 = 0$, что, например, отвечает начальному относительному равновесию маятника, то

$$r(\tau) = r^0 \,|\cos \tau/2|, \; \rho(\tau) = r^0 \,|\sin \tau/2| \tag{2.7}$$

$$x = r^0 \cos \tau/2 \cos (t - \xi), \; \varphi = r^0 \sin \tau/2 \sin (t - \xi)$$

$$x^{\boldsymbol{\cdot}} = \partial x/\partial t, \; \varphi^{\boldsymbol{\cdot}} = \partial\varphi/\partial t, \; \cos \xi = x^0/r^0, \; \sin \xi = x^{\boldsymbol{\cdot}\,0}/r^0$$

Совершенно аналогичные выражения получаются в случае $r^0 = 0$, $\rho^0 \neq 0$. В построенных выражениях (2.7) производится замена $r \rightleftarrows \rho$, $x \rightleftarrows \varphi$. Таким образом, на координатной плоскости (x, φ) траектория представляет приближенно (при фиксированном τ или $\varepsilon > 0$ достаточно малом) эллипс с полуосями $r^0 \,|\cos \tau/2|$ и $r^0 \,|\sin \tau/2|$ соответственно. Для значений $\tau = j\pi + \pi/2$ эллипс вырождается в окружность радиуса $r^0/\sqrt{2}$, а при $\tau = j\pi$ — в отрезки $[-r^0, r^0]$ вдоль оси x при j четном и вдоль оси φ при j нечетном $(j = 0, 1, 2, \ldots)$.

Наличие малой диссипации в системе приведет к биениям с уменьшающимися амплитудами. В частном случае линейной диссипации при $(p^* + n^*) \leq 1/2$ (докритическое значение) затухание происходит по экспоненте с показателем — $(p^* + n^*)/4$ (в медленном времени τ).

К автономной системе (2.5), обладающей определенными структурными свойствами, могут быть применены аналитические и качественные методы исследования. Характерные явления для случая неколеблющегося основания частично описаны выше. Аналогичные результаты имеют место при $Y_0^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}\, l^{-1} = \varepsilon h(t)$ и отсутствии параметрического резонанса (см. ниже). Представляет интерес анализ эволюции колебаний системы (1.5) или (2.2) при наличии вертикальных вибраций основания.

2.2. *Наличие вертикальных колебаний основания.* Сосредоточим теперь основное внимание на исследовании параметрически возбуждаемой системы (1.5). Предположим, что $\omega^2(t) = \omega_0^2(1 + \varepsilon h(\theta))$, $\theta = \Omega t$, ω_0, $\Omega = \mathrm{const}$, где h — 2π-периодическая функция фазы θ; в более общем случае h — квазипериодическая функция с частотным базисом $\{\Omega\}$. Как и выше, без ограничений общности будем полагать $\nu = 1$ $(\omega_0/\nu = \omega_0' \to \omega_0, \; \Omega/\nu = \Omega' \to \Omega)$. Для введенных согласно (2.1) оскулирующих переменных (a, b), (α, β) получим аналогичную (2.2) систему уравнений первого приближения

$$a^{\boldsymbol{\cdot}} = -\varepsilon(\omega_0^2\varphi + p - f)\sin t, \; b^{\boldsymbol{\cdot}} = \varepsilon(\omega_0^2\varphi + p - f)\cos t \tag{2.8}$$

$$\alpha^{\boldsymbol{\cdot}} = -\varepsilon\omega_0^{-1}(x - h\varphi + n)\sin \omega_0 t, \; \beta^{\boldsymbol{\cdot}} = \varepsilon\omega_0^{-1}(x - h\varphi + n)\cos \omega_0 t$$

Здесь для переменных x, $x^{\boldsymbol{\cdot}}$; φ, $\varphi^{\boldsymbol{\cdot}}$ подставляются выражения (2.1). К стандартной по Боголюбову системе (2.9) при определенных условиях применим метод усреднения по времени t. Возможны конкретные случаи, для которых допустимо достаточно полное исследование аналитическими качественными или численными методами на сколь угодно большом интервале времени $t \sim \varepsilon^{-1}$.

Во избежание излишних загромождений и для выявления сложного механизма возбуждения параметрических колебаний будем считать, что вклад возмущающих воздействий f, p, n в первом приближении несущественен, т. е. $f_{s,c} = p_{s,c} = n_{s,c} \equiv 0$. Тогда усредненная система (2.8) оказывается линейной

$$a' = -\omega_0^2 q\beta, \; \alpha' = -\omega_0^{-1}(qb - h_{cs}\alpha - h_{ss}\beta) \tag{2.9}$$

$$b' = \omega_0^2 q\alpha, \; \beta' = \omega_0^{-1}(qa - h_{cc}\alpha - h_{cs}\beta)$$

$$q = q(\omega_0) \equiv \langle \sin \omega_0 t \sin t \rangle = \langle \cos \omega_0 t \cos t \rangle$$

$q(\omega_0) = 0 \, (\omega_0 \neq 1), \; q(1) = 1/2, \; h_{cs} = \langle h(\theta) \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t \rangle$

$h_{ss} = \langle h(\theta) \sin^2 \omega_0 t \rangle = \langle h \rangle - h_{cc}, \; h_{cc} = \langle h(\theta) \cos^2 \omega_0 t \rangle$

Без ограничения общности полагаем $\langle h \rangle = 0$. Для системы (2.9) при $q = 0$ ($\omega_0 \neq 1$, внутренний резонанс отсутствует) получим представление

$a, b = \text{const}, \; \alpha' = h_{cs}\alpha - h_{cc}\beta, \; \beta' = -h_{cc}\alpha - h_{cs}\beta$

Здесь введен медленный аргумент $\sigma = \omega_0^{-1}\tau$. Для характеристических показателей в этом случае получаются выражения $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_{3,4} = \pm (h_{cc}^2 + h_{cs}^2)^{1/2}$. Отсюда следует, что если хотя бы одно из чисел h_{cc} или h_{cs} отлично от нуля, то при $h_{cc}x^{\cdot 0} \neq \omega_0 (h_{cs} + \lambda_3) x^0$, т. е. в ситуации общего положения имеет место экспоненциальное нарастание амплитуды колебаний маятника $\rho \sim \exp(\lambda_3\sigma)$ — параметрический резонанс [1—6]. Амплитуда и фаза колебаний осциллятора (несущего тела) практически остаются постоянными (в первом приближении по ε для $t \sim \varepsilon^{-1}$).

Пусть наряду с параметрическим резонансом (см. выше, $h_{cc}^2 + h_{cs}^2 \neq 0$) имеет также место (главный) внутренний резонанс: $\omega_0 = 1$, $q = 1/2$. Тогда разрешая соответствующее характеристическое уравнение, которое оказывается биквадратным, получим выражение

$$\lambda^2 = 1/2\,(h_{cc}^2 + h_{cs}^2 - 1/2) \pm 1/2\,[(h_{cc}^2 + h_{cs}^2 - 1/2)^2 - 1/4]^{1/2}$$

Итак, оба значения λ^2 положительны, если выражение в квадратной скобке (дискриминант) неотрицательно. В противном случае (дискриминант отрицателен) оба значения комплексно сопряженные. Отсюда заключаем, что во всех случаях среди корней $\lambda_{1,2,3,4}$ найдутся два с положительными вещественными частями порядка $(h_{cc}^2 + h_{cs}^2)^{1/2}$. В предельной ситуации $h_{cc} = h_{cs} = 0$, отвечающей отсутствию параметрического резонанса, все характеристические показатели чисто мнимые, элементарные делители простые и в системе происходят колебания, рассмотренные в *п. 2.1* («биения»).

3. Эволюция системы при высокочастотном параметрическом возбуждении. Геометрические и инерционные характеристики системы (1.3) считаются довольно произвольными. Рассматривается случай большой частоты Ω вибраций $Y_0(\theta)$, $\theta = \Omega t$ основания по сравнению с величинами ν и ω_0. Возмущения P, N могут также квазипериодически зависеть от быстрой фазы θ.

Введем новый аргумент θ и переменные $Z(\theta) = X(t) L^{-1}$, $\Psi(\theta) = \Phi(t)$; получим систему уравнений (производные по θ вновь обозначены точками)

$$\begin{aligned} Z^{\cdot\cdot} &= (ML\Omega^2)^{-1} [P_* - L^{-1}V'(Z) + ml\Omega^2\Psi^{\cdot 2} \sin\Psi - \\ &- (l^{-1}N_* - m(g + \Omega^2 Y_0^{\cdot\cdot}(\theta)) \sin\Psi) \cos\Psi] (1 + \mu \sin^2\Psi)^{-1} \\ \Psi^{\cdot\cdot} &= (ml^2\Omega^2)^{-1} N_* - (l\Omega^2)^{-1} (g + \Omega^2 Y_0^{\cdot\cdot}(\theta)) \sin\Psi - \\ &- (Ml\Omega^2)^{-1} \cos\Psi\, [P_* - L^{-1}V'(Z) + ml\Omega^2\Psi^{\cdot 2} \sin\Psi - \\ &- (l^{-1}N_* - m(g + \Omega^2 Y_0^{\cdot\cdot}(\theta)) \sin\Psi) \cos\Psi] (1 + \mu \sin^2\Psi)^{-1} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь L — характерный масштаб изменения переменной X ($l/L = \xi \sim 1$), $\mu = m/M \sim 1$ — отношение масс маятника и несущего тела, потенциальная энергия осциллятора $V(Z) = U(X)$. Внешние воздействия P_*, N_* получаются обычным образом из P, N:

$$P_* = P_*(t, \theta, Z, Z^{\cdot}, \Psi, \Psi^{\cdot}, \Omega) \equiv P(t, \Omega t, X, X^{\cdot}, \Phi, \Phi^{\cdot}, \Omega)$$
$$N_* = N_*(t, \theta, Z, Z^{\cdot}, \Psi, \Psi^{\cdot}, \Omega) \equiv N(t, \Omega t, X, X^{\cdot}, \Phi, \Phi^{\cdot}, \Omega)$$

Переменная t является «медленной» по отношению к θ. Сделаем следующие допущения относительно величин членов правых частей уравнений (3.1):

$$(ML\Omega^2)^{-1} P_* \equiv \varepsilon p_1 (\sigma, \theta, LAMBDA, \Lambda^\cdot) + \varepsilon^2 p_2 (\sigma, \theta, \Lambda, \Lambda^\cdot, \Lambda^\cdot\varepsilon^{-1}, \varepsilon)$$

$$(ml\Omega^2)^{-1} N_* \equiv \varepsilon n_1 (\sigma, \theta, LAMBDA, \Lambda^\cdot) + \varepsilon^2 n_2 (\sigma, \theta, \Lambda, \Lambda^\cdot, \Lambda^\cdot\varepsilon^{-1}, \varepsilon)$$

$$(ML^2\Omega^2)^{-1} V' (Z) \equiv \varepsilon^2 q' (Z), \quad (l\Omega^2)^{-1} g = \varepsilon^2 G, \quad \sigma = \varepsilon\theta$$

$$lY_0^{\cdot\cdot} (\theta) \equiv \varepsilon h (\theta), \quad \Lambda = (Z, \Psi)^T, \quad 0 < \varepsilon << 1 \qquad (3.2)$$

Здесь функции $p_{1,2}$, $n_{1,2}$ определены для всех $\theta \geq 0$, ограничены и допускают равномерное среднее по θ. Относительно других аргументов они предполагаются достаточно гладкими при $\sigma \sim 1$, $\Lambda \sim 1$, $\Lambda \sim \varepsilon$, $\Lambda^\cdot\varepsilon^{-1} \sim 1$, $\varepsilon << 1$. Тогда система (3.1) представима в виде векторного уравнения относительно Λ:

$$\Lambda^{\cdot\cdot} = \varepsilon\Pi (\sigma, \theta, \Lambda, \Lambda^) + \varepsilon^2\Gamma (\sigma, \theta, \Lambda, \Lambda^\cdot, \Lambda^{50}.\varepsilon^{-1}, \varepsilon) \qquad (3.3)$$

$$\Lambda (0) = \Lambda^0 = (X^0 L^{-1}, \Phi^0)^T, \quad \Lambda^\cdot (0) = \Lambda^{\cdot 0} = (X^{\cdot 0} (L\Omega)^{-1}, \Phi^{\cdot 0}\Omega^{-1})^T$$

Элементы $\Pi_{Z,\Psi}$, $\Gamma_{Z,\Psi}$ вектор-функций Π, Γ обладают свойствами, описанными выше для $p_{1,2}$, $n_{1,2}$. Они получаются на основе введенных функций согласно (3.1), (3.2) в виде

$$\Pi_Z = [p_1 - \mu\xi (n_1 - h \sin\Psi) \cos\Psi] (1 + \mu \sin^2\Psi)^{-1}$$

$$\Pi_\Psi = n_1 - h \sin\Psi - [\xi^{-1}p_1 - \mu (n_1 - h \sin\Psi) \cos\Psi] \cos\Psi (1 + \mu \sin^2\Psi)^{-1}$$

$$\Gamma_Z = [p_2 \cdot q + \mu\xi (\Psi^{\varepsilon^{-1}})^2 \sin\Psi - \mu\xi (n_2 - \mu\xi G \sin\Psi) \times$$

$$\times \cos\Psi] (1 + \mu \sin^2\Psi)^{-1} \qquad (3.4)$$

$$\Gamma_\Psi = n_2 - G \sin\Psi - [\xi^{-1} (p_2 - q) + \mu (\Psi^\cdot\varepsilon^{-1})^2 \sin\Psi -$$

$$- \mu (n_2 - G \sin\Psi) \cos\Psi] \cos\Psi (1 + \mu \sin^2\Psi)^{-1}$$

Далее рассматривается векторное уравнение второго порядка (3.3), (3.4). Отметим, что начальные значения скорости $\Lambda^{\cdot 0}$ в быстром времени θ являются асимптотически малыми, т. е. порядка ε, поскольку $L\Omega \sim X^{\cdot 0}\varepsilon^{-1}$, $\Omega \sim \Phi^{\cdot 0}\varepsilon^{-1}$.

Исследуемая задача Коши может быть непосредственно приведена к стандартной форме с малым параметром $\sqrt{\varepsilon}$ и изучена на относительно коротком интеравле изменения $\theta \sim 1/\sqrt{\varepsilon}$. Такой подход неудовлетворителен в прикладном аспекте. При выполнении дополнительных условий, часто необременительных на практике, система (3.3), (3.4) приводится к стандартной форме с параметром ε, что позволяет изучить ее эволюцию на асимптотически большом интервале времени $\theta \sim \varepsilon^{-1}$ и учесть влияние членов $\varepsilon^2\Gamma$.

Сформулируем эти условия. Предположим, что выполняются следующие требования на средние по θ функций h, p_1, n_1 — коэффициентов при ε в первой степени

$$\langle h (\theta)\rangle = 0, \quad \langle p_1 (\sigma, \theta, \Lambda, 0)\rangle \equiv 0, \quad \langle n_1 (\sigma, \theta, \Lambda, 0)\rangle \equiv 0 \qquad (3.5)$$

Средние вновь обозначаются угловыми скобками. Механический смысл условий (3.5) достоточно ясен и не требует комментариев. В этом смысле функции q, p_2, n_2 предполагаются достаточно общими. От функций p_2, n_2 требуется существование равномерного среднего по θ; допускается их сингулярная зависимость от ε через аргумент $\Lambda^\cdot\varepsilon^{-1}$. Уместно заметить, что равенства (3.5) и начальные условия (3.3) обеспечивают выполнение оценки $\Lambda^\cdot \sim \varepsilon$ ($\Lambda^\cdot\varepsilon^{-1} \sim 1$) для $\theta \sim \varepsilon^{-1}$. Условия (3.5), как нетрудно установить, приводит к тождеству $\langle\Pi (\sigma, \theta, \Lambda, 0) \equiv 0$.

Осуществим замену переменных $(\Lambda, \Lambda^\cdot) \to (S, W)$ следующим образом:

$$\Lambda = S + \varepsilon\Pi^{**}(\sigma,\theta,S), \quad S \equiv (z, \psi)^T, \quad W = (v, \gamma)^T$$

$$\Lambda^\cdot = \varepsilon W + \varepsilon\,[\Pi^*(\sigma,\theta,S) - \Pi_0^*(\sigma,S)] \tag{3.6}$$

$$\Pi^*(\sigma,\theta,S) \equiv \int \Pi(\sigma,\theta,S,0)\,d\theta, \quad \Pi_0^*(\sigma,S) = \langle\Pi^*(\sigma,\theta,S)\rangle$$

$$\Pi^{**}(\sigma,\theta,S) \equiv S\,[\Pi^*(\sigma,\theta,S) - \Pi_0^*(\sigma,S)]\,d\theta$$

Для определенности будем проводить интегрирование по θ в (3.6) от 0 до θ. Можно установить, что Π^*, Π^{**} — квазипериодические функции θ, допускающие равномерное среднее и сохраняющие свойства гладкости по σ, S. Начальные значения S^0, W^0 будут величинами порядка единицы по отношению к ε.

Продифференцируем преобразование (3.6) в силу уравнений (3.3). Для новых неизвестных векторов S, W получим явную (с известной правой частью) систему в стандартной форме

$$S^\cdot = \varepsilon\,(I + \varepsilon\Pi_S^{**})^{-1}(W - \Pi_\sigma^{**}), \quad S(0) = S^0 \tag{3.7}$$

$$W^\cdot = \varepsilon\Pi_\Lambda^{(0)}\Pi^{**} + \varepsilon\Pi_{\Lambda^\cdot}^{(0)}(W + \Pi^* - \Pi_0^*) - \varepsilon(\Pi_S^* -$$

$$- \Pi_{0S}^*)\,W - \varepsilon\,(\Pi_\sigma^* - \Pi_{0\sigma}^*) + e) + \varepsilon\Gamma^{(0)} + \varepsilon^2 \ldots, \quad W(0) = W^0$$

$$\Pi^{(0)} \equiv \Pi(\sigma,\theta,S,0), \quad \Gamma^{(0)} \equiv \Gamma(\sigma,\theta,S,0,W + \Pi^* - \Pi_0^*, 0)$$

Символами с индексами σ, S, Λ, $\Lambda^\cdot$ внизу обозначены частные производные вектор-функций по аргументу σ или компонентам указанных векторов S, Λ, $\Lambda^\cdot$. Получающиеся объекты суть векторы или матрицы. В системе (3.7) правые части есть известные функции от σ, θ, S, W; I — единичная 2×2-матрица; уравнение для W выписано с точностью до членов $O(\varepsilon^2)$. Далее эта система исследуется в первом приближении метода усреднения [1]. Отбрасывая члены $O(\varepsilon^2)$ и усредняя по явно входящему аргументу θ, получим задачу Коши с медленным аргументом $\sigma = \varepsilon\theta$ (штрих означает производную по σ):

$$S' = W - \Pi_{0\sigma}^{**}(\sigma,S), \quad \Pi_0^{**} \equiv \langle\Pi^{**}\rangle, \quad S(0) = S^0$$

$$W' = R(\sigma,S) + K(\sigma,S)\,W + \Gamma_0(\sigma,S,W), \quad W(0) = W^0$$

$$R(\sigma,S) \equiv \langle\Pi_\Lambda^{(0)}\Pi^{**}\rangle + \langle\Pi_{\Lambda^\cdot}^{(0)}(\Pi^* - \Pi_0^*)\rangle \tag{3.8}$$

$$K(\sigma,S) \equiv \langle\Pi_{\Lambda^\cdot}^{(0)}\rangle, \quad \Gamma_0 \equiv \langle\Gamma^{(0)}\rangle, \quad \sigma \sim 1$$

Система (3.8) может оказаться существенно проще для исследования аналитическими, качественными или численными методами. В случае стационарной системы (3.8), когда явная зависимость от σ отсутствует, применимы качественные методы, связанные с условиями существования и определением устойчивости стационарных точек.

Элементарными операциями система (3.8) приводится к виду векторного уравнения второго порядка

$$S'' = (K - \Pi_{0\sigma S}^{**})\,S' + R + K\Pi_{0\sigma}^{**} - \Pi_{0\sigma}^{**}{}^{\prime} + \Gamma_0$$

$$S(0) = S^0, \quad S'(0) = W^0 - \Pi_{0\sigma}^{**}(0, S^0) \tag{3.9}$$

Коэффициент при S' можно трактовать как «матрицу диссипации», последующие три слагаемые как «позиционные силы», а Γ_0 — «обобщенные силы», зависящее от всех аргументов σ, S, S'. Рассмотрим конкретные случаи функций $p_{1,2}$, $n_{1,2}$. Пусть $p_1 = n_1 \equiv 0$, а возмущения «второго порядка» p_2, n_2 соответственно. Тогда введенные в (3.8) вектор-функции равны

$$\Pi_{0\sigma}^{**} \equiv 0, \quad R = R(\psi) = \langle hh^{**}\rangle\,(rr', \rho\rho')^T \tag{3.10}$$

$$r = r(\psi) \equiv \mu\xi\sin\psi\cos\psi\,(1 + \mu\sin^2\psi)^{-1}, \quad r' = dr/d\psi$$

$$\rho = \rho(\psi) \equiv (\mu\xi)^{-1}(1 + \mu\cos\psi)\, r(\psi), \quad \rho' = d\rho/d\psi$$

$$\Gamma_0 = (\Gamma_{0v}, \Gamma_{0\gamma})^T, \quad \Gamma_{0v} = [-\pi_v v - q(z) + \mu\xi(v^2 +$$

$$+\rho(\psi)\rho'(\psi)\langle(h^* - h_0^*)^2\rangle) + \mu\xi(\pi_\gamma\gamma - \mu\xi G\sin\psi)\cos\psi](1 + \mu\sin^2\psi)^{-1}$$

$$\Gamma_{0\gamma} = -\pi_\gamma\gamma - G\sin\psi - [-\xi^{-1}(\pi_v v + q(z)) + \mu(v^2 +$$

$$+\rho(\psi)\rho'(\psi)\langle(h^* - h_0^*)^2\rangle)\sin\psi +$$

$$+\mu(\pi_\gamma\gamma - G\sin\psi)\cos\psi]\cos\psi(1 + \mu\sin^2\psi)^{-1}$$

$$\Gamma_0 = \Gamma_0(z, \psi, v, \gamma) \equiv \Gamma_0(z, \psi + 2\pi, v, \gamma)$$

Исследование системы (3.8), (3.10) при производных начальных условиях можно привести численными методами для $\sigma \sim 1$. Нетрудно установить, что стационарные точки $\gamma = v = z = 0$, $\psi = 0, \pi$ определяют нижнее или верхнее положение равновесия маятника; осциллятор не смещен. Нижнее положение $\psi = 0$ заведомо является асимптотическим устойчивым, что обосновывает применимость метода усреднения для всех $\sigma \geq 0$. Если верхнее положение $\psi = \pi$ также оказывается асимптотическим устойчивым [1], то в системе появляются дополнительные «боковые» неустойчивые стационарные точки. Полное исследование проводится при помощи первого метода Ляпунова [2]. Таким образом, параметрическая неустойчивость (раскачка) и связанный с нею неограниченный экспоненциальный рост амплитуды колебаний в рассмотренной системе с высокочастотной вибрацией основания в первом приближении по ε не наблюдаются.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (94-01-01368) и Международного научного фонда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
2. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
3. *Хейл Дж.* Колебания в нелинейных системах. М.: Мир, 1966. 230 с.
4. *Чезари Л.* Асимтотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964. 477 с.
5. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987. 328 с.
6. *Акуленко Л. Д., Нестеров С. В.* Параметрическое возбуждение колебаний тела с полостью, заполненной стратифицированной жидкостью//Изв. АН. МТТ. 1994. № 3. С. 53—60.
7. *Акуленко Л. Д.* Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 365 с.
8. *Акуленко Л. Д., Нестеров С. В.* Колебания твердого тела с полостью, содержащей тяжелую неоднородную жидкость//Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 1. С. 27—36.

Москва

Поступила в редакцию
28.IV.1993