МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1995

УДК 531.55

© 1995 г. И. В. НОВОЖИЛОВ

РАЗДЕЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ САМОЛЕТА

Известно, что движение самолета слагается из составляющих, сильно разнесенных по своим временным характеристикам. В расчетной практике давно используются разные системы уравнений для исследования траекторных движений самолета, динамических эволюций центра масс и углового движения относительно центра масс (см., например, [1—3]). Их обоснованию обычно служат качественные соображения — справедливые, но не дающие возможности количественно оценивать погрешности от делаемых пренебрежений. В [4—6] для обоснования используются методы разделения движений, однако, здесь рассматривается неполный спектр составляющих движения и частные классы летательных аппаратов.

Ниже делается оценка возможности использования упрощенных моделей движения самолета в более полной постановке.

Для уменьшения громоздкости выкладок дальнейшее изложение ведется для продольного движения самолета. Выводы без каких-либо ограничений переносятся на произвольное пространственное движение.

Запишем в традиционных для динамики самолета обозначениях уравнения продольного движения

$$MdV/dT = -Mg\sin\theta + P^T - \tfrac{1}{2}PV^2Sc_x$$

$$MVd\theta/dT = -Mg\cos\theta + P^T\alpha + \tfrac{1}{2}PV^2c_y^\alpha\alpha$$

$$dM/dT = -U,\quad dX/dT = V\cos\theta,\quad dY/dT = V\sin\theta,\quad dI_{zz}/dT = -W \tag{1}$$

$$I_{zz}\frac{d\Omega_z}{dT} = \frac{1}{2}PV^2Sb_A\left(m_z^\alpha\alpha + m_z^{\delta_b}\delta_b + m_z^{\omega_z}\frac{b_A}{V}\Omega_z + m_z^{\dot\alpha}\frac{b_A}{V}\frac{d\alpha}{dT}\right)$$

$$\frac{d\vartheta}{dT} = \Omega_z,\quad \vartheta = \theta + \alpha,\quad P = P(Y),\quad n_y = \frac{V}{g}\frac{d\theta}{dT}$$

Здесь W — скорость изменения момента инерции, U — секундный расход топлива, P^T — тяга, X, Y — координаты центра масс самолета, P — плотность воздуха, n_y — приращение нормальной перегрузки.

Уравнения (1) записаны в следующих предположениях: Земля плоская, не вращающаяся; конфигурация корпуса самолета фиксированная, ось двигателя совпадает с продольной осью; в выражениях аэродинамических коэффициентов оставлены линейные и квадратичные по углу атаки α члены. Перечисленные допущения не существенны с точки зрения разделения движений, но упрощают выкладки.

Исключим в (1) переменную $\alpha = \vartheta - \theta$, разрешим систему относительно $d\Omega_z/dT$, $d\vartheta/dT$, $d\theta/dT$, проведем нормализацию [6] полученной системы уравнений, перейдя к безразмерным аналогам величин из (1):

$$t = \frac{T}{T_*},\quad m = \frac{M}{M_*},\quad v = \frac{V}{V_*},\quad p = \frac{P^T}{P^T_*},\quad \rho = \frac{P}{P_*},\quad u = \frac{U}{U_*}$$

V_*	T_0	T_1	T_2	T_3	$\mu_1 = \frac{T_1}{T_3}$	$\mu_2 = \frac{T_2}{T_3}$	$\mu_3 = \frac{T_1}{T_2}$	$\varepsilon_1 = \frac{T_0}{T_1}$	$\varepsilon_2 = \frac{T_0}{T_2}$
100	$3\cdot10^{-2}$	0,5 – 2	10	$10^4 - 10^5$	$2\cdot10^{-4}$	10^{-3}	$2\cdot10^{-1}$	$6\cdot10^{-2}$	$3\cdot10^{-3}$
300	10^{-2}	0,5 – 2	30	$3\cdot(10^3 - 10^4)$	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	$2\cdot10^{-2}$	$3\cdot10^{-4}$
1000	$3\cdot10^{-3}$	0,5 – 2	100	$10^3 - 10^4$	$2\cdot10^{-3}$	10^{-1}	$2\cdot10^{-2}$	$6\cdot10^{-3}$	$3\cdot10^{-5}$

$$w = \frac{W}{W_*}, \quad x = \frac{X}{X_*}, \quad y = \frac{Y}{Y_*}, \quad i_{zz} = \frac{I_{zz}}{I_*}, \quad \omega_z = \frac{\Omega_z}{\Omega_*} \tag{2}$$

Относительно угловых переменных θ, α, ϑ считаем, что они измеряются в радианной мере и принимают значения порядка единицы. При этом θ, α, ϑ не нуждаются в нормализации.

Зададимся характерными значениями M_*, V_*, $P_*^T, \ldots$ из (2). Выберем $M_*, V_*, P_*^T, P_*, U_*, W_*, I_*, X_*, Y_*$ равными максимальным значениям соответствующих величин для рассматриваемого типа самолета и режима полета. Будем считать характерные значения аэродинамических сил и тяги величинами порядка веса самолета. Тогда $P_* V_*^2 S/2 = P_*^T = M_* g$. Примем здесь $X_* = Y_* = L_*$. Значение Ω_* получим из грубой оценки, даваемой упрощенным уравнением

$$I_* d^2\vartheta/dT^2 = {}^1\!/_2 P_* V_*^2 S b_A m_z^\alpha \vartheta$$

При $m_z^\alpha \sim -1$ постоянная времени этого колебательного звена оценивается выражением

$$T_1^2 = \frac{I_*}{P_* V_*^2 S b_A/2} = \frac{M_* r_*^2}{M_* g b_A} = \frac{r_*^2}{g b_A} \tag{3}$$

где r_* — центральный радиус инерции. Тогда при $\vartheta_* \sim 1$ в качестве характерной угловой скорости можно принять $\Omega_* = 1/T_1$.

Поделим каждое уравнение нормализованной по (2) системы на комбинацию характерных величин, имеющую размерность этого уравнения. Получим

$$\frac{T_2}{T_*} m \frac{dv}{dt} = -m \sin\theta + p - \rho v^2 c_x$$

$$\frac{T_2}{T_*} mv \frac{d\vartheta}{dt} = -m\cos\theta + p\,(\vartheta - \theta) + \rho v^2 c_y^\alpha (\vartheta - \theta)$$

$$\frac{T_3}{T_*}\frac{dm}{dt} = -u, \quad \lambda \frac{T_3}{T_*}\frac{dx}{dt} = v\cos\theta, \quad \lambda\frac{T_3}{T_*}\frac{dy}{dt} = v\sin\theta \tag{4}$$

$$\frac{T_1}{T_*} i_{zz} \frac{d\omega_z}{dt} = \Big\{ m_z^\alpha (\vartheta - \theta) + m_z^{\delta_b}\delta_b + (m_z^{\omega_z} + m_z^{\dot\alpha}) \frac{T_0}{T_1}\omega_z -$$

$$- m_z^{\dot\alpha} \frac{T_0}{T_2}\frac{1}{mv}\left[-m\cos\theta + p\,(\vartheta - \theta) + \rho v^2 c_y^\alpha (\vartheta - \theta)\right]\Big\} \rho v^2$$

$$\frac{T_1}{T_*}\frac{d\vartheta}{dT} = \omega_z, \quad \varkappa \frac{T_3}{T_*}\frac{di_{zz}}{dt} = -w, \quad \vartheta = \theta + \alpha, \quad \rho = \rho\,(y)$$

$$n_y = (-m\cos\theta + p\alpha + \rho v^2 c_y^\alpha \alpha)/m$$

$$\lambda = (L_* U_*)/(V_* M_*) \sim 1, \quad \varkappa = (I_* U_*)/(W_* M_*) \sim 1$$

$$T_0 = b_A/V_*, \quad T_2 = V_*/g, \quad T_3 = L_*/V_* \tag{5}$$

где T_0, T_2, T_3 — парциальные постоянные времени системы.

В таблице приведены порядки величин постоянных времени T_0, T_1, T_2, T_3 [с] и отношений между ними для трех типов самолетов с дозвуковой, околозвуковой и сверхзвуковой скоростями V_* $[M/c]$. При оценках по (3), (5) принималось $b_A \sim 3$ м, $r_* \sim 3 \div 10$ м, $L_* \sim 10^3 \div 10^4$ км. В графиках таблицы даются наибольшие из рассматриваемых диапазонов значения μ, ε, худшие для последующих оценок погрешностей приближения.

Выделяя для исследования самые медленные траекторные составляющие движения, происходящие на временах $T \sim T_3$, в (4) примем $T_* = T_3$ [6]. Система (4) перейдет в

$$\mu_2 m dv/dt = -m \sin\theta + p - \rho v^2 c_x$$

$$\mu_2 m v d\theta/dt = -m\cos\theta + p(\vartheta - \theta) + \rho v^2 c_4^\alpha (\vartheta - \theta)$$

$$dm/dt = -u, \quad \lambda dx/dt = v\cos\theta, \quad \lambda dy/dt = v\sin\theta \tag{6}$$

$$\mu_1 i_{zz} d\omega_z/dt = \Big\{ m_z^\alpha(\vartheta - \theta) + m_z^{\delta_b}\delta_b + (m_z^{\omega_z} + m_z^{\dot\alpha})\varepsilon_1\omega_z -$$

$$- m_z^{\dot\alpha}\varepsilon_2 \frac{1}{mv}\left[-m\cos\theta + p(\vartheta - \theta) + \rho v^2 c_y^\alpha(\vartheta - \theta)\right]\Big\}\rho v^2$$

$$\mu_1 d\vartheta/dt = \omega_z, \quad \varkappa di_{zz}/dt = -w, \quad \vartheta = \theta + \alpha, \quad \rho = \rho(y)$$

$$n_y = (-m\cos\theta + p\alpha + \rho v^2 c_y^\alpha \alpha)/m$$

Система (6) — сингулярно возмущенная по малым параметрам $\mu_1, \mu_2 \ll 1$. Получим из (6) невозмущенную, вырожденную, полагая $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$.

$$0 = -m\sin\theta + p - \rho v^2 c_x$$

$$0 = -m\cos\theta + p(\vartheta - \theta) + \rho v^2 c_y^\alpha(\vartheta - \theta)$$

$$0 = m_z^\alpha(\vartheta - \theta) + m_z^{\delta_b}\delta_b, \quad \omega_z = 0, \quad n_y = 0$$

$$dm/dt = -u, \quad \lambda dx/dt = v\cos\theta, \quad \lambda\frac{dy}{dt} = v\sin\theta, \quad \vartheta = \theta + \alpha \tag{7}$$

В размерных по (2) обозначениях система (7) совпадает с традиционной системой уравнений, описывающей квазистатические траекторные движения самолета.

В соответствии с теоремой Тихонова—Васильевой [6], погрешность приближенного по (7) решения на временных интервалах порядка $T_* = T_3$ будет величиной порядка μ_1 от вырождения в уравнениях углового движения и порядка μ_2 от вырождения в уравнениях движения центра масс. Из таблицы видно, что в первом случае погрешность будет величиной порядка долей процента для всех рассматриваемых классов самолетов, во втором — погрешность может достигать величины десятка процентов для сверхзвуковых самолетов ($V_* = 1000$ мс$^{-1}$) с относительно малыми дальностями полета ($L_* = 10^3$ км). Заметим, что слагаемые с множителями ε_1, ε_2 из (6) в (7) выпадают вне зависимости от величины этих множителей.

Основным условием, обеспечивающим выполнение оговоренных оценок погрешностей является своего рода асимптотическая устойчивость собственных движений системы по быстрым составляющим, развивающимся во временных масштабах T_1, T_2 [6]. Это условие выполняется для любого реального полета за счет управления автопилотом или летчиком.

Выделяя динамические составляющие движения центра масс, происходящие с характерными временами порядка T_2, в (4) примем $T_* = T_2$. Система (4) примет вид

$$
\begin{aligned}
&m dv/dt = -m \sin\theta + p - \rho v^2 c_x \\
&m v d\theta/dt = -m \cos\theta + p(\vartheta - \theta) + \rho v^2 c_y^\alpha (\vartheta - \theta) \\
&dm/dt = -\mu_2 u,\ \lambda dx/dt = \mu_2 v \cos\theta,\ \lambda dy/dt = \mu_2 v \sin\theta \\
&\mu_3 i_{zz} \frac{d\omega_z}{dt} = \Big\{ m_z^\alpha (\vartheta - \theta) + m_z^{\delta_b}\delta_b + (m_z^{\omega_z} + m_z^{\dot\alpha})\varepsilon_1\omega_z - \\
&\quad - m_z^{\dot\alpha}\varepsilon_2 \frac{1}{mv} [-m\cos\theta + p(\vartheta - \theta) + \rho v^2 c_y^\alpha (\vartheta - \theta)]\Big\} \rho v^2 \qquad (8) \\
&\mu_3 d\vartheta/dt = \omega_z,\ \varkappa di_{zz}/dt = -\mu_2 w,\ \vartheta = \theta + \alpha,\ \rho = \rho(y) \\
&n_y = (-m\cos\theta + p\alpha + \rho v^2 c_y^\alpha \alpha)/m
\end{aligned}
$$

Система (8) — регулярно возмущенная по малым параметрам μ_2, ε_2 и сингулярно возмущенная по μ_3. Запишем вырожденную для (8) по этим параметрам систему

$$
\begin{aligned}
&m dv/dt = -m \sin\theta + p - \rho v^2 c_x \\
&m v d\theta/dt = -m \cos\theta + p(\vartheta - \theta) + \rho v^2 c_y^\alpha (\vartheta - \theta) \\
&dm/dt = 0,\ dx/dt = 0,\ dy/dt = 0,\ di_{zz}/dt = 0 \qquad (9) \\
&0 = m_z^\alpha(\vartheta - \theta) + m_z^{\delta_b}\delta_b,\ \omega_z = 0,\ \vartheta = \theta + \alpha,\ \rho = \rho(y) \\
&n_y = (-m\cos\theta + p\alpha + \rho v^2 c_y^\alpha \alpha)/m
\end{aligned}
$$

Система (9) в исходных размерных переменных традиционно используется для описания фугоидных колебаний, маневров типа горки, мертвой петли и т. п.

Оценим в соответствии с таблицей погрешности перехода от (8) к (9). По теореме Тихонова—Васильевой погрешность от пренебрежения слагаемыми с μ_3 может, вообще говоря, достигать величин порядка единиц процентов для сверхзвуковых самолетов и величин порядка десятка процентов для дозвуковых и околозвуковых. Оценка погрешности по μ_3 принимает более благоприятный характер, если учесть, что $\omega_z = 0$ в силу уравнений (9) нулевого по μ_3 приближения и оценить асимптотику следующего по μ_3 приближения.

Регулярные возмущения в (8) по μ_2, ε_2 согласно теореме Пуанкаре на временных интервалах порядка T_2 приводят к погрешностям, не превышающим величин порядка единиц процентов для всех классов летательных аппаратов из таблицы, кроме сверхзвуковых малой дальности самолетов, для которых $\mu_2 = T_2/T_3 \sim 10^{-1}$. Как и ранее, слагаемое с множителем ε_1 из (8) в (9) выпадает в силу равенства $\omega_z = 0$ при любых значениях параметра.

Выделяя высокочастотные составляющие движения около центра масс с характерными временами порядка T_1, в (4) примем $T_* = T_1$. Тогда система (4) перейдет в слудующую:

$$
\begin{aligned}
&m dv/dt = \mu_3(-m \sin\theta + p - \rho v^2 c_x) \\
&m v d\theta/dt = \mu_3 [-m \cos\theta + p(\vartheta - \theta) + \rho v^2 c_y^\alpha (\vartheta - \theta)]
\end{aligned}
$$

$$\frac{dm}{dt} = -\mu_1 u,\ \lambda\frac{dx}{dt} = \mu_1 v\cos\theta,\ \lambda\frac{dy}{dt} = \mu_1 v\sin\theta,\ \varkappa\frac{di_{zz}}{dt} = -\mu_1 w \tag{10}$$

$$i_{zz}d\omega_z/dt = \Big\{ m_z^\alpha(\vartheta-\theta) + m_z^{\delta_b}\delta_b + (m_z^{\omega_z} + m_z^{\dot\alpha})\,\varepsilon_1\omega_z -$$

$$- m_z^{\dot\alpha}\frac{\varepsilon_2}{mv}\,[-m\cos\theta + p(\vartheta-\theta) + \rho v^2 c_y^\alpha(\vartheta-\theta)]\Big\}\rho v^2$$

$$d\vartheta/dt = \omega_z,\ \vartheta = \theta + \alpha,\ \rho + \rho(y)$$

$$n_y = (-m\cos\theta + p\alpha + \rho v^2 c_y^\alpha\alpha)/m$$

Система (10) регулярно возмущенная по $\mu_1, \mu_3, \varepsilon_2$. Запишем для нее вырожденную по этим малым параметрам систему

$$dv/dt = 0,\ d\theta/dt = 0,\ dm/dt = 0,\ dx/dt = 0,\ dy/dt = 0,\ di_{zz}/dt = 0$$

$$i_{zz}\frac{d\omega_{zz}}{dt} = \{m_z^\alpha(\vartheta-\theta) + m_z^{\delta_b}\delta_b + (m_z^{\omega_z} + m_z^{\dot\alpha})\,\varepsilon_1\omega_z\}\rho v^2$$

$$d\vartheta/dt = \omega_z,\ \vartheta = \theta + \alpha,\ \rho = \rho(y),\ n_y = (-m\cos\theta + p\alpha + \rho v^2 c_y^\alpha\alpha)/m$$

В силу этой системы медленные переменные m, x, y, i_{zz}, ρ могут приниматься постоянными с погрешностью порядка μ_1, малой для всех классов самолетов. Медленные переменные v, θ могут считаться постоянными с погрешностью μ_3 порядка единиц процентов для сверхзвуковых и десятка процентов для дозвуковых и околозвуковых самолетов.

Нормализация уравнений движения самолета и введение в них малых параметров, соответствующих различным классам движения, позволяют формализовать построение приближенных моделей движения, описывающих эти классы движения. Оценки погрешностей приближения, проведенные выше, в ряде случаев были не слишком благоприятными, достигая величин порядка десятка процентов. Несомненно, эти оценки будут улучшаться при конкретизации исходных данных по самолету и выделяемому режиму движения. В случае необходимости приближенные модели движения могут быть уточнены построением следующих приближений по малым параметрам задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Остославский И. В.* Аэродинамика самолета. М.: Государственное издательство оборонной промышленности, 1957. 550 с.
2. *Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В.* Аэродинамика самолета. Динамика продольного и бокового движения. М.: Машиностроение, 1979. 349 с.
3. *Бочкарев А. Ф. и др.* Аэромеханика самолета. М.: Машиностроение, 1985. 356 с.
4. *Кузьмак Г. Е.* Динамика неуправляемого движения летательных аппаратов при входе в атмосферу. М.: Наука, 1970. С. 348.
5. *Борзов В. И.* Задача о разделении движений в динамике полета. Изв. АН СССР. 1981. № 5. С. 3—11.
6. *Новожилов И. В.* Фракционный анализ. М.: Изд-во Московского университета, 1991. 190 с.

Москва

Поступила в редакцию
7.IV.1993