

УДК 531.383

© 1995 г. С. И. ГУБАРЕНКО, В. Г. КУЗЬМЕНКО

АЛГОРИТМЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ КОМПЕНСАЦИИ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ДРЕЙФОВ НЕКОНТАКТНОГО ГИРОСКОПА

Рассматривается неконтактный гироскоп (НГ), помещенный в двухстепенный гиросtabilизатор (ГС), основание которого неподвижно по отношению к Земле. Следящие системы ГС поддерживают неизменной ориентацию ротора гироскопа в кожухе.

Модель уходов НГ определяется консервативными и неконсервативными возмущающими моментами [1—2]. Качественный анализ движения НГ относительно Земли проводился в [1—4]. В публикуемой статье изучено движение НГ относительно инерциального пространства. С помощью метода осреднения получены приближенные решения уравнений движения НГ. Построены траектории движения вектора кинетического момента гироскопа в инерциальном пространстве. Полученные расчетные формулы могут быть использованы для аналитической компенсации систематических дрейфов неконтактных гироскопов в составе систем управления и навигации.

1. Постановка задачи. Центр масс гироскопа C неподвижен относительно Земли и находится в точке с широтой φ . Введем правую ортогональную систему координат $C\xi$: ось $C\xi_3$ параллельна Оси Мира, плоскость $C\xi_1\xi_2$ параллельна плоскости экватора. Угловая скорость трехгранника ξ относительно инерциального пространства равна нулю.

Эллипсоид инерции ротора для точки C является эллипсоидом вращения; введем единичный вектор e_3 , направленный по оси динамической симметрии ротора. Введем также единичный вектор g , направленный по вектору силы тяжести. Определим единичные векторы e_1, e_2 равенствами

$$e_1 = [e_3, g]/\sin \gamma, \quad e_2 = [e_3, e_1] \quad (1.1)$$

где γ — угол между векторами $(-g)$ и e_3 .

Единичный вектор k направим по вектору кинетического момента ротора. Задачу о движении НГ будем решать в прецессионной постановке, поэтому считаем, что вектор k совпадает с вектором e_3 ($k = e_3$). Кроме того предполагаем, что в рабочем режиме кинетический момент ротора остается постоянным. Положение вектора k относительно системы координат $C\xi$ определим с помощью двух углов ρ, σ : ρ — угол между k и осью $C\xi_3$, σ — угол между проекцией k на плоскость $C\xi_1\xi_2$ и осью $C\xi_1$.

Возмущающий момент m , действующий на ротор в неконтактном подвесе, согласно [1, 2] представим в виде суммы консервативной и неконсервативной составляющих

$$m = (m_{11} \sin \gamma - m_{12} \sin 2\gamma) e_1 + (m_{21} \sin \gamma - m_{22} \sin 2\gamma) e_2 \quad (1.2)$$

Параметры дрейфов m_{11}, m_{12} характеризуют осевой дебаланс ротора и его эллипсоидальность; параметры m_{21}, m_{22} определяют неконсервативную часть возмущающего момента. Считаем, что корпусные возмущающие моменты отсутствуют вследствие, например, работы системы автокомпенсации [5].

Отметим, что возмущающий момент m в виде (1.2) ортогонален вектору кинетического момента ротора и не приводит к изменению его модуля.

Таким образом, задача об угловом движении НГ сводится к исследованию движения оси ротора k под действием возмущающего момента m .

2. Уравнения движения НГ. Введем переменные $\mu = \cos \rho$, $\nu = \sin \rho$. Согласно сказанному в п. 1, прецессионные уравнения движения гироскопа в проекциях на оси трехгранника ξ имеют вид

$$\mu' = m_{3\xi}, \quad \sigma' = (-m_{1\xi} \sin \sigma + m_{2\xi} \cos \sigma)/\nu \quad (2.1)$$

$m_{i\xi}$ ($i = 1, 2, 3$) — проекции вектора m на оси ξ_i , штрихом обозначено дифференцирование по безразмерному времени $\tau = Ut$ (U — угловая скорость вращения Земли). Уравнения (2.1) представлены в нормализованном виде, при этом размерный M и безразмерный m возмущающие моменты связаны соотношением $m = M/(I\Omega U)$ (I — осевой момент инерции ротора, Ω — угловая скорость вращения ротора).

Используя формулы (1.1), (1.2), представим уравнения углового движения НГ (2.1) в виде

$$\mu' = M_{11} + M_{12} + M_{21} + M_{22}, \quad \sigma' = \Sigma_{11} + \Sigma_{12} + \Sigma_{21} + \Sigma_{22} \quad (2.2)$$

$$M_{11} = -m_{11}\nu \cos \varphi \sin (\tau - \sigma) \quad (2.3)$$

$$M_{12} = m_{12} [\mu\nu \sin 2\varphi \sin (\tau - \sigma) + \nu^2 \cos^2 \varphi \sin 2(\tau - \sigma)]$$

$$M_{21} = m_{21} [\nu^2 \sin \varphi - \mu\nu \cos \varphi \cos (\tau - \sigma)]$$

$$M_{22} = m_{22} [\mu\nu^2 (1 - 3 \sin^2 \varphi) + \nu (2\mu^2 - 1) \sin 2\varphi \cos (\tau - \sigma) + \mu\nu^2 \cos^2 \varphi \cos 2(\tau - \sigma)]$$

$$\Sigma_{11} = m_{11} [\sin \varphi - (\mu/\nu) \cos \varphi \cos (\tau - \sigma)]$$

$$\Sigma_{12} = m_{12} [\mu (1 - 3 \sin^2 \varphi) + (2\mu^2 - 1) \sin 2\varphi \cos (\tau - \sigma)/\nu + \mu \cos^2 \varphi \cos 2(\tau - \sigma)]$$

$$\Sigma_{21} = m_{21} \cos \varphi \sin (\tau - \sigma)/\nu$$

$$\Sigma_{22} = -m_{22} [(\mu/\nu) \sin 2\varphi \sin (\tau - \sigma) + \cos^2 \varphi \sin 2(\tau - \sigma)]$$

3. Приближенные решения уравнений движения НГ. Алгоритм аналитической компенсации систематических уходов НГ. Для реальных гироскопов с неконтактным подвесом ротора характерные значения параметров дрейфа m имеют порядок 10^{-2} . Поэтому система уравнений (2.2), (2.3) представляет собой стандартную форму динамической одночастотной системы [6]. В правых частях (2.3) содержатся периодические функции с большими (по сравнению с m) частотами колебаний 1 и 2. В размерных переменных это соответствует суточным и полусуточным колебаниям. Поэтому для исследования системы уравнений (2.2), (2.3) можно применить метод осреднения [6].

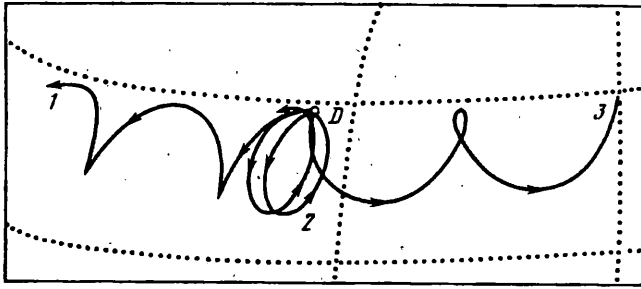
Уравнения первого приближения получаются осреднением правых частей (2.2) по времени τ

$$\bar{\mu}' = f(\bar{\mu}), \quad \bar{\mu}(0) = \mu_0, \quad f(\bar{\mu}) = (1 - \bar{\mu}^2) (f_{1\mu} - f_{2\mu}\bar{\mu}) \quad (3.1)$$

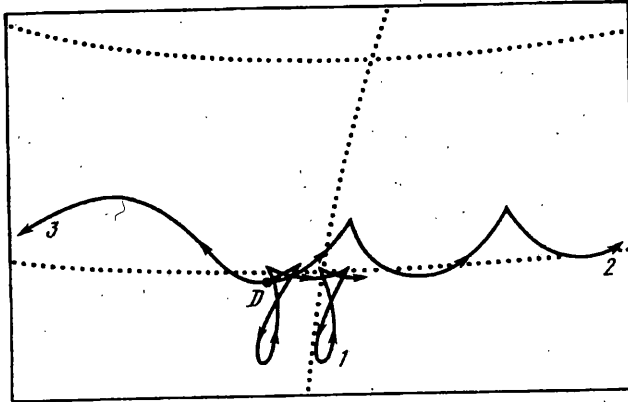
$$f_{1\mu} = m_{21} \sin \varphi, \quad f_{2\mu} = m_{22} (3 \sin^2 \varphi - 1)$$

$$\bar{\sigma}' = f_{1\sigma} - f_{2\sigma}\bar{\mu}, \quad \bar{\sigma}(0) = 0$$

$$f_{1\sigma} = m_{11} \sin \varphi, \quad f_{2\sigma} = m_{12} (3 \sin^2 \varphi - 1)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Здесь μ_0 — начальное значение μ , начальное значение угла σ полагается равным нулю, поскольку начальное положение невращающегося трехгранника ξ можно выбирать произвольным. Уравнение для $\bar{\mu}$ совпадает с уравнением (5.1) из [4], где исследовалось движение НГ относительно Земли. Видно, что движение вектора кинетического момента НГ по углу ρ зависит только от неконсервативных составляющих возмущающего момента. При этом возможны четыре качественно различных случая движения в зависимости от значений параметров $f_{1\mu}$, $f_{2\mu}$, μ_0 :

$|f_{1\mu}| > |f_{2\mu}|$, $f_{1\mu} > 0$ — ось НГ стремится к направлению на Северный Полюс Мира;

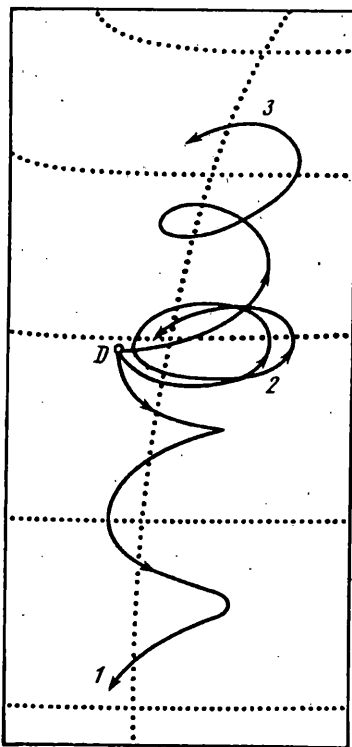
$|f_{1\mu}| > |f_{2\mu}|$, $f_{1\mu} < 0$ — ось НГ стремится к направлению на Южный Полюс Мира;

$|f_{1\mu}| < |f_{2\mu}|$, $f_{2\mu} > 0$ — ось НГ стремится к направлению, которое характеризуется параметром $\bar{\mu}_* = f_{1\mu}/f_{2\mu}$;

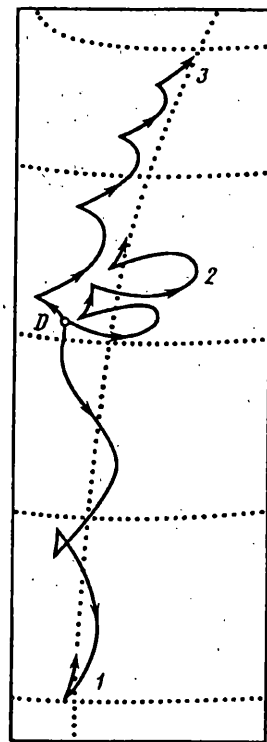
$|f_{1\mu}| < |f_{2\mu}|$, $f_{2\mu} < 0$ — ось НГ стремится к направлению на Северный Полюс Мира или Южный Полюс Мира соответственно для начальных значений $\mu_0 > \bar{\mu}_*$ или $\mu_0 < \bar{\mu}_*$.

Уравнение (3.1) для $\bar{\mu}$ может быть проинтегрировано в элементарных функциях, после чего интегрируется в квадратурах уравнение для $\bar{\sigma}$. Однако, при этом получаются достаточно громоздкие формулы. Поэтому считаем более целесообразным выполнять интегрирование уравнения (3.1) для $\bar{\mu}$ в бортовом вычислителе систем управления или навигации, где НГ используется в качестве чувствительного элемента. Параллельно выполняется и интегрирование уравнения для $\bar{\sigma}$.

Таким образом, уравнения первого приближения (3.1) можно использовать для прогнозирования движения и аналитической компенсации уходов НГ. Но уравнения (3.1) описывают лишь общую тенденцию изменения переменных μ , σ и не всегда дают удовлетворительную точность при прогнозировании движения



Фиг. 3



Фиг. 4

НГ. Чтобы проиллюстрировать сказанное, построим «портреты» различных параметров дрейфа m .

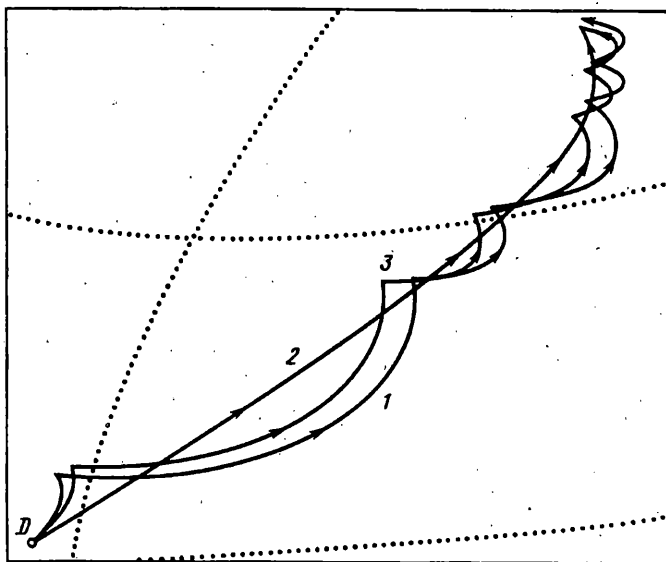
На фиг. 1—4 изображены траектории движения конца вектора кинетического момента НГ на сфере постоянного радиуса, равного модулю кинетического момента. Эти траектории получены в результате математического моделирования уравнений (2.2), (2.3) движения НГ. Для наглядности траектории кинетического момента построены отдельно для каждого из параметров дрейфа: $m_{11} = 0,1$ (фиг. 1), $m_{12} = 0,1$ (фиг. 2), $m_{21} = 0,1$ (фиг. 3), $m_{22} = 0,1$ (фиг. 4). Все траектории выходят из точки D , для которой угол $\rho = 50^\circ$; направление движения вектора кинетического момента НГ указано стрелками. На фиг. 1 траектории построены для широт $\varphi = -30^\circ$ (траектория 1), $\varphi = 0^\circ$ (траектория 2), $\varphi = 30^\circ$ (траектория 3); на фиг. 2: $\varphi = -30^\circ$ (1), 0° (2), 60° (3); на фиг. 3: $\varphi = -30^\circ$ (1), 0° (2), 30° (3); на фиг. 4: $\varphi = -60^\circ$ (1), -30° (2), 0° (3).

Из фиг. 1—4 видно, что уравнения первого приближения (3.1) не учитывают периодических изменений параметров μ , σ . Решением проблемы является построение уравнений второго приближения, что вызывает значительные трудности. Причем, опять приходим к нелинейным дифференциальным уравнениям, интегрирование которых едва ли возможно в квадратурах. Более перспективным и значительно более простым представляется построение так называемых «улучшенных первых приближений» [6, с. 86]. В этом случае необходимо к решениям уравнений (3.1) добавить слагаемые, учитывающие периодические изменения параметров μ , σ :

$$\mu = \bar{\mu} + u_{11} + u_{12} + u_{21} + u_{22}, \quad \sigma = \bar{\sigma} + v_{11} + v_{12} + v_{21} + v_{22} \quad (3.2)$$

$$u_j = \int_0^{\tau} [M_j(\tau') - \langle M_j(\tau') \rangle_{\tau'}] d\tau' \quad (i, j = 1, 2) \quad (3.3)$$

$$v_j = \int_0^{\tau} [\Sigma_j(\tau') - \langle \Sigma_j(\tau') \rangle_{\tau'}] d\tau'$$



Фиг. 5

где $\langle \dots \rangle_\tau$ — операция вычисления среднего по τ . Производя вычисления по формулам (3.3) с учетом (2.3), находим

$$u_{11} = -m_{11} \bar{v} \cos \varphi c_1(\tau, \bar{\sigma}), \quad \bar{v} = \sqrt{1 - \bar{\mu}^2} \quad (3.4)$$

$$u_{12} = m_{12} [\bar{\mu} \bar{v} \sin 2\varphi c_1(\tau, \bar{\sigma}) + \bar{v}^2 \cos^2 \varphi c_2(\tau, \bar{\sigma})]$$

$$u_{21} = -m_{21} \bar{\mu} \bar{v} \cos \varphi s_1(\tau, \bar{\sigma})$$

$$u_{22} = m_{22} [\bar{v} (2\bar{\mu}^2 - 1) \sin 2\varphi s_1(\tau, \bar{\sigma}) + \bar{\mu} \bar{v}^2 \cos^2 \varphi s_2(\tau, \bar{\sigma})]$$

$$v_{11} = -m_{11} (\bar{\mu}/\bar{v}) \cos \varphi s_1(\tau, \bar{\sigma})$$

$$v_{12} = m_{12} [(2\bar{\mu}^2 - 1) \sin 2\varphi s_1(\tau, \bar{\sigma})/\bar{v} + \bar{\mu} \cos^2 \varphi s_2(\tau, \bar{\sigma})]$$

$$v_{21} = m_{21} \cos \varphi c_1(\tau, \bar{\sigma})/\bar{v}$$

$$v_{22} = -m_{22} [(\bar{\mu}/\bar{v}) \sin 2\varphi c_1(\tau, \bar{\sigma}) + \cos^2 \varphi c_2(\tau, \bar{\sigma})]$$

$$c_1(\tau, \bar{\sigma}) = \cos \bar{\sigma} - \cos(\tau - \bar{\sigma}), \quad c_2(\tau, \bar{\sigma}) = [\cos 2\bar{\sigma} - \cos 2(\tau - \bar{\sigma})]/2$$

$$s_1(\tau, \bar{\sigma}) = \sin \bar{\sigma} + \sin(\tau - \bar{\sigma}), \quad s_2(\tau, \bar{\sigma}) = [\sin 2\bar{\sigma} + \sin 2(\tau - \bar{\sigma})]/2$$

Таким образом, совокупность формул (3.1), (3.2), (3.4) представляет собой алгоритм аналитической компенсации систематических дрейфов НГ.

На фиг. 5 показана траектория 1 движения вектора кинетического момента НГ, полученная в результате моделирования уравнений (2.2), (2.3) при $m_{11} = m_{12} = m_{21} = m_{22} = 0,1$, $\varphi = 30^\circ$, $\rho = 30^\circ$, время моделирования — трое суток. На этом же рисунке построены траектории 2 (первое приближение), 3 (улучшенное первое приближение), которые рассчитаны с помощью алгоритмов аналитической компенсации (3.1), (3.2), (3.4). Анализ фиг. 5 позволяет сделать вывод о правильности и эффективности разработанных алгоритмов аналитической компенсации систематических дрейфов НГ.

4. Решение второго приближения для некоторых частных случаев. Существуют ситуации, когда улучшенные первые приближения, построенные в предыдущем пункте, могут достаточно точно аппроксимировать решение исходных уравнений (2.2), (2.3) только на ограниченном интервале времени. В качестве

примера рассмотрим движение НГ, установленного на экваторе ($\varphi = 0$) и возмущаемого только осевым дебалансом ротора $m_{11} \neq 0$ ($m_{12} = m_{21} = m_{22} = 0$). В этом случае удастся построить уравнения второго приближения согласно общей схеме осреднения [6] и решить их. Эти решения имеют вид

$$\mu = \mu_0 + m_{11} v_0 (\cos \tau - 1), \quad v_0 = \sqrt{1 - \mu_0^2} \quad (4.1)$$

$$\sigma = -1/2 m_{11}^2 \tau - (\mu_0/v_0) m_{11} \sin \tau$$

Соответствующее улучшенное первое приближение согласно (3.1), (3.2), (3.4) таково

$$\mu = \mu_0 + m_{11} v_0 (\cos \tau - 1), \quad \sigma = -(\mu_0/v_0) m_{11} \sin \tau \quad (4.2)$$

Сравнение (4.1) с (4.2) позволяет сделать вывод, что улучшенное первое приближение не содержит линейно нарастающего слагаемого $-m_{11}^2 \tau/2$ и, поэтому, приемлемо лишь на ограниченном интервале времени. Например, для $m_{11} = 10^{-2}$ расхождение по углу σ между вторым и улучшенным первым приближениями достигнет одной угловой минуты в течение суток.

Аналогично, в случае, когда НГ установлен на экваторе ($\varphi = 0$) и возмущен только неконсервативным моментом $m_{21} \neq 0$ ($m_{11} = m_{12} = m_{22} = 0$), имеем следующее решение второго приближения:

$$\mu = \mu_0 (1 - m_{21} v_0 \sin \tau), \quad \sigma = 1/2 m_{21}^2 \tau + m_{21} (1 - \cos \tau)/v_0 \quad (4.3)$$

Улучшенное первое приближение не содержит линейно нарастающего слагаемого $m_{21}^2 \tau/2$ и, поэтому, применимо лишь на ограниченном интервале времени.

5. Выводы. Таким образом для аналитической компенсации систематических дрейфов НГ, обусловленных консервативными m_{11} , m_{12} и неконсервативными m_{21} , m_{22} возмущающими моментами, можно использовать улучшенное первое приближение (3.1), (3.2), (3.4); чтобы проверить корректность применения улучшенного первого приближения, необходимо проводить математическое моделирование алгоритмов аналитической компенсации систематических уходов НГ для реальных движений объекта, где НГ используется в качестве чувствительного элемента.

Отметим, что предложенная методика создания алгоритмов аналитической компенсации систематических дрейфов НГ применима и в случае, когда консервативные и неконсервативные составляющие дрейфов содержат большее количество гармоник по углу γ в формуле (1.2) (m_{13} , m_{14} , ...; m_{23} , m_{24} , ...).

Авторы признательны Ю. Г. Мартыненко и А. И. Кобрину за обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мартыненко Ю. Г. Движение твердого тела в электрических и магнитных полях. М.: Наука, 1988. 368 с.
2. Денисов Г. Г., Комаров В. Н. Неконсервативные моменты и их влияние на прецессию неконтактного гироскопа//Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 3. С. 15—23.
3. Линьков Р. В., Урман Ю. М. Уход неконтактного гироскопа в окрестности оси мира//Изв. вузов. Приборостроение. 1982. Т. 25. № 4. С. 56—59.
4. Губаренко С. И., Кузьменко В. Г. Периодические режимы движения неконтактного гироскопа//Изв. РАН. МТТ. 1993. № 2. С. 12—17.
5. Gusinsky V. Z., Ivanov A. A. Peculiarities of autocompensation of free gyro drifts at compulsory rotation of rotor suspension//2nd. Soviet — Chinese Sympos. of Inertial Technology. Saint Petersburg, 1992. P. 90—93.
6. Журавлев В. Ф., Климов Д. М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.