МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1995

/ПММ. 1°

УДК 531.383:539.3

© 1995 г. Ю. Г. МАРТЫНЕНКО, В. В. ПОДАЛКОВ

О НУТАЦИЯХ ТВЕРДОГО ТЕЛА В НЕКОНТАКТНОМ ПОДВЕСЕ

Найдены количественные оценки переходного процесса, приводящего вязкоупругое твердое тело шаровой формы в неконтактном подвесе к стационарному вращению вокруг оси наибольшего момента инерции. Постоянная времени переходного процесса выражена через логарифмический декремент затухания первой формы свободных колебаний тела.

В настоящее время неконтактные подвесы достаточно широко применяются во многих областях современной техники, в частности, в наиболее точном современном гироскопе используется неконтактный электростатический подвес. Одно из предложений дальнейшего повышения точности этого гироскопа заключается в использовании так называемых «двойных вращений», при которых ротор совершает регулярную прецессию Эйлера — Пуансо, когда ось динамической симметрии ротора движется по конусу вокруг вектора кинетического момента ротора [1]. При таком движении происходит осреднение возмущающих моментов, вызванных наличием нечетных гармоник в форме ротора, а частности, уход, вызванный осевым дебалансом ротора, уменьшается в $1/\cos\vartheta$ раз (ϑ — угол нутации между вектором кинетического момента и динамической осью симметрии ротора). Однако в случае регулярной прецессии мгновенная ось вращения меняет свое положение относительно ротора, а ротор подвергается периодической нагрузке центробежными силами, которые вызывают соответствующую деформацию ротора. Силы трения в материале ротора неизбежно приведут к диссипации механической энергии, и, следовательно, к уменьшению угла между наименьшей осью эллипсоида инерции и вектором кинетического момента. При этом ротор, вращающийся вокруг центра масс, при отсутствии внешних сил приходит в стационарное вращение вокруг главной оси инерции с наибольшим моментом инерции [2, 3]. Это явление получило свое теоретическое объяснение еще во время запуска первых космических аппаратов [4] и с тех пор широко используется при пассивном демпфировании нутационных колебаний космических аппаратов.

В публикуемой статье основное внимание уделяется нахождению количественных оценок переходного процесса, приводящего к стационарному вращению вокруг оси наибольшего момента инерции. Определены деформации вязкоупругого шара, совершающего в неконтактном подвесе движение, близкое к регулярной прецессии Эйлера — Пуансо. Найдено решение уравнения для угла нутации ротора и определена постоянная времени процесса демпфирования нутационных колебаний ротора. Из проведенного исследования вытекает вывод о нереализуемости регулярных прецессий ротора электростатического гироскопа без приложения к ротору каких-либо специальных дополнительных моментов. Это обстоятельство может оказаться существенным и для других технических устройств, использующих твердое тело, левитирующее в вакууме в неконтактном подвесе (например, центрифуг).

1. Рассмотрим твердое тело (ротор), подвешенное в вакууме в неконтактном подвесе и представляющее собой сплошной шар радиуса R, внутри которого в экваториальной области имеется узкая кольцевая область, изготовленная из материала с более высокой плотностью. Введем правый ортогональный трехгранник $x_1x_2x_3$ с началом в центре масс недеформированного ротора и осью x_3, направленной по оси симметрии центрального эллипсоида инерции ротора. Обозначим через I_i — моменты инерции ротора относительно осей x_i ($i = 1, 2, 3$). Если считать ротор абсолютно твердым, то при отсутствии внешних сил он будет совершать

регулярную прецессию Эйлера — Пуансо, при которой вектор кинетического момента тела $\mathbf{L}$ неподвижен в инерциальном пространстве, а ось симметрии ротора x_3 описывает конус вокруг вектора $\mathbf{L}$. Проекции вектора угловой скорости ротора $\boldsymbol{\omega}$ на оси трехгранника $x_1x_2x_3$ будут

$$\omega_{x1} = a\cos\nu t, \quad \omega_{x2} = a\sin\nu t, \quad \omega_{x3} = b \tag{1.1}$$

$$\nu = b\,(I_3 - I_1)/I_1, \quad |\omega|^2 = a^2 + b^2 \tag{1.2}$$

где a и b — проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на оси x_1, x_3 в начальный момент времени. При этом угол нутации между вектором кинетического момента $\mathbf{L}$ ротора и его осью симметрии определяется соотношением

$$\cos\vartheta = I_3 b/L, \quad L^2 = (I_1 a)^2 + (I_3 b)^2 \tag{1.3}$$

Движение (1.1)—(1.3) примем в качестве порождающего решения задачи, а влияние упругости ротора в соответствии с идеями метода возмущения будем рассматривать как малое возмущение эйлерова движения.

Обозначим через $\mathbf{r}$ радиус-вектор, проведенный из центра масс в произвольную точку ротора. Тогда плотность сил инерции, приложенных к этой точке, определяется формулой $\mathbf{F} = -\rho\,\{[\dot{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{r}] + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}) - \omega^2\mathbf{r}\}$, где точкой обозначено дифференцирование по времени t, ρ — плотность материала ротора.

В трехграннике $x_1x_2x_3$ введем сферическую систему координат r, α, β с полярной осью x_3 $(0 < \alpha < \pi,\ 0 < \beta < 2\pi)$. Принимая во внимание (1.1) и проектируя вектор $\mathbf{F}$ на оси сферической системы координат, получим

$$\begin{aligned} F_r &= -\rho r\,[-(b^2 + a^2/2) + (b^2 - a^2/2)\cos^2\alpha + \\ &+ ab\sin 2\alpha\cos(\nu t - \beta) + 0.5a^2\sin^2\alpha\cos(2\nu t - 2\beta)] \\ F_\alpha &= -\rho r\,[-(b^2 - a^2/2)\sin\alpha\cos\alpha + \\ &+ a(\nu + b\cos 2\alpha)\cos(\nu t - \beta) + 0{,}5a^2\sin\alpha\cos\alpha\cos(2\nu t - 2\beta)] \\ F_\beta &= -\rho r\,[-a(b + \nu)\cos\alpha\sin(\nu t - \beta) + 0{,}5a^2\sin\alpha\sin(2\nu t - 2\beta)] \end{aligned} \tag{1.4}$$

Для реальных конструкций неконтактных гироскопов отношение $(I_3 - I_1)/I_1$ не превосходит 0,1, поэтому слагаемые с множителем ν, входящие в выражения для F_α, F_β в (1.4), оказываются малыми и ими можно пренебречь. Тогда непосредственным вычислением можно убедиться, что силы (1.4) потенциальны (P_2 — полином Лежандра):

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad}\Pi, \quad \Pi = -\tfrac{1}{3}\rho\omega^2 r^2\,[1 - P_2(\varkappa)] \tag{1.5}$$

$$\varkappa = [a^*\sin\alpha\cos(\beta - \nu t) + b^*\cos\alpha]$$

$$P_2(\varkappa) = (3\varkappa^2 - 1)/2, \quad a^* = a/\omega, \quad b^* = b/\omega$$

Так как период свободных упругих колебаний ротора оказывается много меньше периода обращения ротора вокруг центра масс, то вектор перемещений $\mathbf{u}$ (u_r, u_α, u_β) точек, вызванных наличием инерционных сил (1.5), можно найти как решение квазистационарной задачи пространственной теории упругости

$$\frac{2(1-\mu)}{(1-2\mu)}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u} - \frac{1}{G}\operatorname{grad}\Pi = 0 \tag{1.6}$$

$$\sigma_{ij}n_j|_{r=R} = 0 \tag{1.7}$$

где μ — коэффициент Пуассона, G — модуль сдвига, $\mathbf{n}$ (n_1, n_2, n_3) — нормаль к поверхности ротора, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений. В уравнении (1.6) опущены диссипативные силы, которые являются малыми по сравнению с инерционными силами (1.5). При решении краевой задачи (1.6), (1.7) будем пренебрегать изменением плотности в экваториальной плоскости ротора и ограничимся нахождением перемещений для однородного шара.

Методика решения задачи (1.6), (1.7) подробно изложена в [5], поэтому сразу приведем окончательный результат

$$u_r = \frac{\rho\omega^2}{3G(7+5\mu)}\left[(1+\mu)r^3 - (3+2\mu)R^2 r\right] P_2(\varkappa)$$

$$u_\alpha = \frac{\rho\omega^2}{6G(7+5\mu)}\left[(2+\mu)r^3 - (3+2\mu)R^2 r\right]\frac{\partial P_2(\varkappa)}{\partial\alpha} \tag{1.8}$$

$$u_\beta = \frac{\rho\omega^2}{6G(7+5\mu)}\left[(2+\mu)r^3 - (3+2\mu)R^2 r\right]\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial P_2(\varkappa)}{\partial\beta}$$

Заметим, что в формулах (1.8) опущены постоянные во времени слагаемые, описывающие центральносимметричную деформацию ротора. Эти слагаемые не влияют на периодические деформации ротора и, следовательно, не приводят к диссипации энергии.

Дифференцируя формулу (1.8) по времени, находим компоненты относительной скорости точек ротора

$$\dot u_r = (\rho\nu/G)\,D(r)\left[ab\sin 2\alpha\sin(\nu t-\beta) + a^2\sin^2\alpha\sin(2\nu t - 2\beta)\right]$$

$$\dot u_\alpha = (\rho\nu/G)\,C(r)\left[ab\cos 2\alpha\sin(\nu t-\beta) + \frac{a^2}{2}\sin 2\alpha\sin(2\nu t - 2\beta)\right] \tag{1.9}$$

$$\dot u_\beta = (\rho\nu/G)\,C(r)\left[ab\cos\alpha\cos(\nu t-\beta) + a^2\sin\alpha\cos(2\nu t - 2\beta)\right]$$

$$D(r) = \frac{1}{2(7+5\mu)}\left[(1+\mu)r^3 - (3+2\mu)R^2 r\right]$$

$$C(r) = \frac{1}{2(7+5\mu)}\left[(2+\mu)r^3 - (3+2\mu)R^2 r\right]$$

Таким образом, твердое тело при угле нутации $\vartheta \neq 0$, $\vartheta \neq \pi/2$ испытывает циклическую нагрузку, которая приводит к рассеянию энергии. Для оценки потерь энергии предположим, что внутреннее трение в материале подчиняется гипотезе Кельвина — Фойгта, и введем диссипативную функцию Релея [6]:

$$\Phi = \tfrac{1}{2}\int\left[\lambda^*\dot\varepsilon^2 + 2G^*(\dot\varepsilon_{rr}^2 + \dot\varepsilon_{\alpha\alpha}^2 + \dot\varepsilon_{\beta\beta}^2) + G^*(\dot\varepsilon_{r\alpha}^2 + \dot\varepsilon_{r\beta}^2 + \dot\varepsilon_{\alpha\beta}^2)\right]dv \tag{1.10}$$

Здесь λ^*, G^* — коэффициенты вязкого трения в материале ротора, $\dot\varepsilon = \dot\varepsilon_{rr} + \dot\varepsilon_{\alpha\alpha} + \dot\varepsilon_{\beta\beta}$, $\dot\varepsilon_{rr}, \ldots, \dot\varepsilon_{\alpha\beta}$ — скорости деформации [6], интегрирование в (1.10) ведется по всему объему ротора. (Коэффициенты λ^*, G^* в дальнейшем считаются малыми в том смысле, что время затухания T_1 собственных упругих колебаний ротора много больше периода упругих колебаний ротора T_0. В то же время для корректности проводимых в дальнейшем построений будем считать, что T_1 много меньше характерного времени движения ротора относительно центра масс.)

Подставляя (1.9) в (1.10) и выполняя необходимые вычисления, находим диссипативную функцию Релея

$$\Phi = \frac{8\pi\nu^2\rho^2 R^7 F(\mu)}{15G^2}\,\frac{L^4\sin^2\vartheta}{I_1^2}\left(\frac{\sin^2\vartheta}{I_1^2} + \frac{\cos^2\vartheta}{I_3^2}\right) \tag{1.11}$$

$$F(\mu) = \frac{1}{R^7}\int_0^R\{\lambda^* A_1(r) + G^* A_2(r)\}dr,\quad A_1(r) = \left[\frac{dD}{dr} + \frac{2D}{r} - \frac{3C}{r}\right]^2$$

$$A_2(r) = 2\left(\frac{dD}{dr}\right)^2 + \frac{4D^2}{r^2} - \frac{12DC}{r^2} + \frac{15C^2}{r^2} + \frac{7}{4}\left[\frac{dC}{dr} + \frac{2D}{r} - \frac{C}{r}\right]^2$$

2. Для оценки коэффициентов вязкого трения G^* и λ^*, входящих в (1.12), воспользуемся известным экспериментальным фактом, что модуль всестороннего сжатия слабо диссипирует, тогда

$$\lambda^* = -\tfrac{2}{3}G^* \tag{2.1}$$

Рассмотрим центральносимметричные собственные колебания шара при наличии внутреннего трения. В этом случае функция радиального перемещения $u = u\,(r,\ t)$ удовлетворяет уравнению Ламе

$$2\,\frac{1-\mu}{1-2\mu}\,\Lambda\,[Gu + G^\circ\dot{u}] - \rho\ddot{u} = 0 \tag{2.2}$$

$$\Lambda = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r^2},\quad G^\circ = \frac{2\,(1-2\mu)}{3\,(1-\mu)}\,G^*$$

и граничному условию

$$\sigma_{rr}|_{r=R} = 0 \tag{2.3}$$

Решение уравнения (2.2) имеет вид

$$u\,(r,\ t) = \left(\frac{R}{kr}\right)^{1/2} J_{3/2}\,(kr/R)\,\exp\,(i\chi t) \tag{2.4}$$

$$k^2 = \frac{R^2\,(1-2\mu)\,\rho\chi^2}{2\,(1-\mu)\,(G + G^\circ\chi i)} \tag{2.5}$$

$$J_{3/2}\,(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\left(\frac{\sin z}{z} - \cos z\right)$$

где $J_{3/2}\,(z)$ — функция Бесселя с половинным индексом, i — мнимая единица.

Выражая напряжение σ_{rr} через перемещение $u\,(r,\ t)$ [4], из граничного условия (2.3) получаем трансцендентное уравнение для определения параметра k:

$$\operatorname{tg} k = \frac{k}{1-\delta k^2};\quad \delta = \frac{(1-\mu)}{2\,(1-2\mu)} \tag{2.6}$$

Первый положительный корень уравнения (2.6) лежит в интервале $\pi/2 < k_1 < \pi$. В частности, при $\mu = 0{,}3$ и $\delta = 0{,}875$ корень $k_1 \approx 2{,}67$. Будем считать значение k_1 известным и из уравнения (2.4) найдем

$$\chi = \chi_1 + \frac{\chi_1^2}{2}\frac{G^\circ}{G}\,i,\quad \chi_1^2 = k_1^2\left(\frac{2G\,(1-\mu)}{\rho R^2\,(1-2\mu)}\right) \tag{2.7}$$

где χ_1 — первая собственная частота упругих колебаний ротора. При выводе формулы (2.7) было учтено, что $G^\circ \ll G/\chi$.

Если обозначить через η логарифмический декремент затухания колебаний ротора, то согласно (2.7) будем иметь $\eta = \pi G^\circ\chi_1/G$.

Поэтому в качестве оценки коэффициента вязкого трения можно использовать соотношение

$$G^* = \frac{3\eta R}{2\pi k_1}\left(\frac{\rho G\,(1-\mu)}{2\,(1-2\mu)}\right)^{1/2} \tag{2.8}$$

3. Кинетическая энергия динамически симметричного твердого тела движущегося относительно неподвижной точки определяется выражением

$$T = \frac{L^2}{2}\left(\frac{\sin^2\vartheta}{I_1} + \frac{\cos^2\vartheta}{I_3}\right) \tag{3.1}$$

поэтому в силу того, что момент внешних сил относительно центра масс твердого тела равен нулю ($L = \mathrm{const}$), после дифференцирования формулы (3.1) получим уравнение для угла нутации ϑ:

$$\vartheta = \frac{2I_1I_3\dot{T}}{(I_3 - I_1)\, L^2 \sin 2\vartheta}$$

Так как скорость убывания механической энергии равняется удвоенной диссипативной функции Релея Φ, то, принимая во внимание (1.11) и (1.2), после осреднения на одном периоде $2\pi/\nu$ приходим к следующему дифференциальному уравнению для угла нутации тела

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{4\pi\,(I_3 - I_1)\, G^*\rho^2R^7L^4f(\mu)}{15I_3^3I_1^3G^2} \sin\vartheta\cos\vartheta \left(\frac{I_3^2\sin^2\vartheta}{I_1^2} + \cos^2\vartheta\right) \tag{3.2}$$

$$f(\mu) = \frac{4}{G^*}\,F(\mu) = \frac{3058\mu^2 + 6682\mu + 3309}{105\,(7 + 5\mu)^2} \tag{3.3}$$

Формула (3.3) была получена из (1.12) с учетом зависимости (2.1).

Если ввести безразмерное время по формуле

$$t = \tau t', \quad \tau = \frac{15I_1^3I_3^3G^{3/2}k_1}{4\pi\,(I_3 - I_1)\,\rho^{5/2}R^8L^4f(\mu)} \left(\frac{2\,(1 - \mu)}{(1 - 2\mu)}\right)^{1/2} \tag{3.4}$$

и обозначить через $s = I_3^2/I_1^2$, $z = \mathrm{tg}^2\vartheta$, то полученное уравнение можно преобразовать к виду

$$\frac{(1 + z)\,dz}{2z\,(1 + sz)} = -\,dt'$$

Следовательно, вековая эволюция угла нутации ϑ будет определяться уравнением

$$\mathrm{tg}^{2s}\vartheta\,(1 + s\,\mathrm{tg}^2\vartheta)^{s-1} = \mathrm{tg}^{2s}\vartheta^\circ\,(1 + s\,\mathrm{tg}^2\vartheta^\circ)^{s-1}\exp(-2st') \tag{3.5}$$

Подстановка параметра G^*, определяющего внутреннее трение (2.8), в постоянную времени (3.4) приводит к следующему окончательному результату

$$\tau = \frac{15I_1^3I_3^3G^{3/2}k_1}{4\eta\,(I_3 - I_1)\,\rho^2R^8L^4f(\mu)} \left(\frac{2\,(1 - \mu)}{1 - 2\mu}\right)^{1/2} \tag{3.6}$$

Аналогичный механизм демпфирования нутационных колебаний существует и для гироскопа с неконтактным подвесом, ротор которого представляет собой тонкую сферическую оболочку. Здесь можно воспользоваться результатами работы [7], где построено решение дифференциальных уравнений безмоментной теории оболочек в случае регулярной прецессии.

4. Рассмотрим электростатический гироскоп со сплошным бериллиевым ротором. Радиус ротора $R = 0{,}5$ см, механические характеристики: плотность $\rho = 1850$ кг/м^3, модуль сдвига $G = 1{,}15\cdot10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}03$, угловая скорость $\omega = 1{,}88\cdot10^4$ сек$^{-1}$, $I_1 = 0{,}9\cdot I_3$, кинетический момент $L = 1{,}87\cdot10^{-4}$ кг$\cdot$м^2 сек$^{-1}$, логарифмический декремент затухания $\eta = 0{,}01$. В этом случае из (3.6) для постоянной времени получаем $\tau = 146$ часов.

Для алюминиевого ротора таких же размеров постоянная времени оказывается равной 6 часов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-16256).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Денисов Г. Г., Урман Ю. М.* Прецессионные движения твердого тела под действием моментов, имеющих силовую функцию//Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 6. С. 5—14.
2. *Вильке В. Г.* Аналитические и качественные методы механики систем с бесконечным числом степеней свободы. М.: Изд-во МГУ, 1986. 192 с.
3. *Марков Ю. Г., Миняев И. С.* О динамических эффектах в механических системах со слабой диссипацией//Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 3. С. 13—21.
4. *Рейтер Г. С., Томсон У. Т.* Вращательное движение пассивных космических аппаратов//Проблемы ориентации искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1966. С. 336—350.
5. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970, 939 с.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
7. *Мартыненко Ю. Г., Омаров А. Ж., Подалков В. В.* Движение упругой сферической оболочки в неконтактном подвесе//Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 4. С. 25—30.

Москва

Поступила в редакцию
13.XII.1993