МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1995

УДК 531.383

 А. А. КИРЕЕНКОВ

ВЛИЯНИЕ ТЕРМОУПРУГОГО ПОВЕДЕНИЯ МАТЕРИАЛА НА ДИНАМИКУ ВОЛНОВОГО ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПА (ВТГ)

Исследуется влияние термоупругого поведения материала на динамические свойства ВТГ [1, 2]. Получены уравнения движения тонкого, растяжимого и изотермически нерастяжимого колец, а также уравнения баланса тепла в них. Исследована динамика изотермически нерастяжимого кольца при отсутствии внешних источников тепла. Методами [2, 3] изучены инфинитезимальные эволюции стоячих волн. Показано, что термоупругие свойства материала можно не учитывать при разработке ВТГ, при отсутствии внешнего разогрева резонатора.

1. Модель ВТГ. В качестве модели волнового твердотельного гироскопа [1, 2, 4] рассматривается тонкое, упругое, растяжимое кольцо, осевая линия которого в недеформированном состоянии представляет собой окружность. Предполагается, что кольцо совершает изгибные колебания в своей плоскости и вращается с угловой скоростью $\Omega = \Omega(t)$, перпендикулярной плоскости кольца, которая считается медленной функцией времени.

Упругие свойства материала кольца описываются моделью твердого тела Кельвина — Фойхта, обобщенного на случай термоупругих напряжений [5]:

$$\sigma = E(\varepsilon - \alpha T) + \xi\dot{\varepsilon} \tag{1.1}$$

где σ — напряжения, возникающие в кольце, ε — окружная деформация, E — модуль Юнга, α — коэффициент линейного расширения, а ξ — коэффициент демпфирования. Причем в последнем слагаемом в (1.1) пренебрегается произведением $\xi\alpha T$, так как ξ и α считаются малыми параметрами, а рассмотрение задачи предполагается производить в линейном приближении.

При расчете кольца будем предполагать, что оно удовлетворяет гипотезе Эйлера — Бернулли о плоских сечениях [6], согласно которой, сечения плоские и перпендикулярные до нагружения (независимо от того, какими факторами оно вызывается) остаются плоскими и перпендикулярными и после нагружения, причем влиянием поперечной нагрузки можно пренебречь и, следовательно, считать, что коэффициент Пуассона равен нулю. Кроме того будем считать, что поперечное сечение, проведенное перпендикулярно к осевой линии не зависит от места сечения и является прямоугольником, имеющим стороны b и h.

При рассмотрении тепловых свойств кольца будем предполагать, что на всей поверхности кольца происходит теплообмен путем лучеиспускания по закону Стефана — Больцмана [5]:

$$\begin{aligned} &-\lambda \partial U/\partial n\,(n = \pm b/2) = \pm s\sigma_0 (U^4 - U_c^4) \\ &-\lambda \partial U/\partial l\,(l = \pm h/2) = \pm s\sigma_0 (U^4 - U_c^4) \end{aligned} \tag{1.2}$$

где λ — коэффициент теплопроводности, σ_0 — постоянная Стефана — Больцмана, s — степень черноты поверхности кольца, U — абсолютная температура кольца, а U_c — абсолютная температура поверхности тепловоспринимающего тела. Кроме того будем пренебрегать зависимостью температуры от толщины кольца, в силу того, что кольцо считается тонким.

2. Вывод уравнений движения кольцевого резонатора с учетом термоупругого поведения материала. *2.1. Деформация и напряжения тонкого растяжимого кольца.* Рассмотрим сначала геометрическую задачу: по заданным перемещениям сечения недеформированного кольца, как функции времени t и окружного угла φ, определим деформированное состояние, не вдаваясь в причины, которыми оно вызывается.

Обозначим через $w = w(t, \varphi)$ и $v = v(t, \varphi)$ перемещения, соответственно, в направлении внутренней нормали и касательной, и вычислим теперь деформацию как функцию переменных $\{w, v\}$ и их производных. Тогда согласно [7] волокно, отстоящее на расстояние l от осевой линии испытывает относительное удлинение

$$\varepsilon \cong \frac{v' - w}{R} + \frac{w'' + v'}{R^2} l \tag{2.1}$$

Подставляя (2.1) в (1.1) получаем напряжения, возникающие в тонком растяжимом кольце, с учетом температурных напряжений

$$\sigma = E\left(\frac{v' - w}{R} + \frac{w'' + v'}{R^2} l - \alpha T\right) + \xi\left(\frac{\dot v' - \dot w}{R} + \frac{\dot w'' + \dot v'}{R^2} l\right) \tag{2.2}$$

2.2. Потенциальная энергия, функция Лагранжа и диссипативная функция Релея тонкого, растяжимого кольца с учетом температурных напряжений. Согласно [6], энергия деформации единицы объема тонкого растяжимого кольца, с учетом (2.2) имеет вид

$$\Pi_0' = E\left(\frac{(v' - w)^2}{2R^2} + \frac{(w'' + v')^2}{2R^4} l^2 - \frac{\alpha^2 T^2}{2} + \frac{(w'' + v')(v' - w)}{R^3} l\right) \tag{2.3}$$

Для получения энергии деформации всего поперечного сечения необходимо произвести интегрирование по его площади [1]. При этом необходимо учитывать, что при изменении температуры все размеры тела испытывают линейное расширение

$$h = h(1 + \alpha T); \quad b = b(1 + \alpha T); \quad R = R(1 + \alpha T) \tag{2.4}$$

Произведя интегрирование равенства (2.3) и принимая во внимание формулы (2.4) имеем плотность потенциальной энергии деформации поперечного сечения тонкого растяжимого кольца с учетом температурных напряжений

$$\Pi' = \frac{ES}{2R^2}(v' - w)^2(1 + \alpha T)^2 + \frac{EI}{2R^4}(w'' + v')^2(1 + \alpha T)^4 +$$

$$+ \frac{1}{2} ESR\alpha^2 T^2 (1 + \alpha T) \tag{2.5}$$

$$S \equiv bh, \quad I \equiv bh^3/12 \tag{2.6}$$

где S, I — изотермические выражения для площади и момента инерции поперечного сечения кольца. Переходя к пределу при $\alpha \to 0$ приходим к обычному выражению для потенциальной энергии поперечного сечения тонкого растяжимого кольца, без учета температурных напряжений [1]:

$$\Pi' \to \frac{ES}{2R^2}(v' - w)^2 + \frac{EI}{2R^4}(w'' + v')^2$$

При вычислении кинетической энергии следует учитывать, что плотность материала имеет следующую зависимость от температуры

$$\rho = \rho_0/(1 + 3\alpha T) \tag{2.7}$$

Следовательно, плотность кинетической энергии тонкого растяжимого кольца [1] с учетом температурных напряжений имеет вид

$$K = \frac{\rho_0 SR(1 + \alpha T)^3}{2(1 + 3\alpha T)} ((\dot{v} - w\Omega + R\Omega)^2 + (\dot{w} + v\Omega)^2) \tag{2.8}$$

Будем считать, что $\alpha T << 1$ и в дальнейшем учитывать только линейные по этому параметру члены. Вычитая (2.5) из (2.8) и линеаризуя полученное равенство, приходим к выражению для плотности лагранжиана с учетом температурных напряжений, которое после нормировки множителем $\rho_0 SR$ имеет вид

$$L = ½ ((\dot{v} - \Omega w + \Omega R)^2 + (\dot{w} + \Omega v)^2) - \tag{2.9}$$

$$- ½ \varkappa^2 (w'' + v')^2 (1 + 5\alpha T) - ½ \delta^2 (v' - w)^2 (1 + 3\alpha T)$$

в котором введено обозначение

$$\varkappa^2 \equiv EI/(\rho_0 SR^4), \qquad \delta^2 \equiv E/(\rho_0 R^2) \tag{2.10}$$

Теперь, для того чтобы приступить непосредственно к выводу уравнений движения, осталось получить выражение для плотности диссипативной функции Релея.

В соответствии с (2.2) диссипативная функция единицы объема тонкого растяжимого кольца имеет вид [8]:

$$D_0' = \xi \left(\frac{(\dot{v}' - \dot{w})^2}{2R^2} + \frac{(\dot{w}'' + \dot{v}')^2}{2R^4} l^2 + \frac{(\dot{v}' - \dot{w})(\dot{w}'' + \dot{v}')}{R^3} l \right) \tag{2.11}$$

Интегрируя равенство (2.11) по площади поперечного сечения и нормируя полученное выражение множителем $\rho_0 SR$ приходим к следующему выражению для плотности диссипативной функции Релея

$$D = ½ \delta_1 (\dot{v}' - \dot{w})^2 + ½ \xi_0 (\dot{w}'' + \dot{v}')^2 \tag{2.12}$$

в котором использовано обозначение

$$\delta_1 \equiv \xi/(\rho_0 R^2), \qquad \xi_0 \equiv \xi I/(\rho_0 SR^4) \tag{2.13}$$

2.3. Уравнения движения тонкого кольца с учетом температурных напряжений. В соответствии с принципом Гамильтона, уравнения движения тонкого растяжимого кольца в форме Лагранжа для непрерывных систем [8] имеют вид [1]:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{v}} + \frac{d}{d\varphi}\frac{\partial L}{\partial v'} - \frac{\partial L}{\partial v} - \frac{d}{d\varphi}\frac{\partial D}{\partial \dot{v}'} = 0 \tag{2.14}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{w}} - \frac{d^2}{d\varphi^2}\frac{\partial L}{\partial w''} - \frac{\partial L}{\partial w} + \frac{d^2}{d\varphi^2}\frac{\partial D}{\partial \dot{w}''} + \frac{\partial D}{\partial \dot{w}} = 0$$

Подставляя в уравнения (2.14) выражения для плотности лагранжиана (2.9) и диссипативной функции Релея (2.11) получаем уравнения движения упругого растяжимого кольца в перемещениях

$$\ddot{w} + 2\Omega\dot{v} + \varkappa^2 (w^{IV} + v''') + \xi_0 (\dot{w}^{IV} + \dot{v}''') - \delta^2 (v' - w) - \delta_1 (\dot{v}' - \dot{w}) +$$

$$+ 5\alpha\varkappa^2 \frac{d^2}{d\varphi^2} ((w'' + v') T) - 3\alpha\delta^2 (v' - w) T = 0 \tag{2.15}$$

$$\ddot{v} - 2\Omega\dot{w} - \varkappa^2 (w''' + v'') - \xi_0 (\dot{w}''' + \dot{v}'') - \delta^2 (v'' - w') - \delta_1 (\dot{v}'' - \dot{w}') -$$

$$-5\alpha\varkappa^2 \frac{d}{d\varphi} ((w'' + v') T) - 3\alpha\delta^2 \frac{d}{d\varphi} ((v' - w) T)) = 0$$

Пусть теперь имеем изотермически нерастяжимое кольцо. Как было отмечено в *п.* 1, это означает, что изменение длины осевой линии происходит только за счет изменения температуры. Это предположение приводит к видоизмененному условию нерастяжимости [1] в следующей локальной форме:

$$(R + v' - w)^2 + (v + w')^2 = R^2 (1 + \alpha T)^2 \tag{2.16}$$

Линеаризация равенства (2.16) дает связь между переменными w и v, описывающую в линейном приближении изотермическую нерастяжимость кольца

$$v' - w = \alpha RT \tag{2.17}$$

Вычтя из второго уравнения системы (2.15) первое, продифференцированное предварительно по φ, а затем снова продифференцировав полученное выражение по φ и исключив из него переменную v с помощью равенства (2.17), приходим к уравнению в частных производных шестого порядка, описывающему механические колебания тонкого изотермически нерастяжимого кольца под воздействием меняющегося во времени поля температуры относительно переменной w:

$$\begin{aligned}&\ddot{w} - \ddot{w}'' - 4\omega\dot{w}' - (w^{\mathrm{V}} + 2w^{\mathrm{IV}} + w'') - \zeta_0 (\dot{w}^{\mathrm{VI}} + 2\dot{w}^{\mathrm{IV}} + \dot{w}'') - \\ &-5\alpha (\partial^4/\partial\varphi^4 + \partial^2/\partial\varphi^2) ((w'' + w) T) - \\ &- \alpha (-R\ddot{T} + 2\omega R\dot{T}' + R (T^{\mathrm{IV}} + T'')) = 0\end{aligned} \tag{2.18}$$

в котором введены безразмерные: время τ, угловая скорость ω, и коэффициент диссипации ζ_0 по формулам

$$\tau = \varkappa t, \qquad \omega = \Omega/\varkappa, \qquad \zeta_0 = \xi_0/\varkappa \tag{2.19}$$

Характерной чертой уравнений (2.18) и (2.15) является то, что они получены для температурного поля произвольной природы, которое может определяться как внутренними источниками тепла, так и внешними.

3. Уравнения баланса тепла в тонком упругом кольце. Сначала сделаем небольшое дополнение к модели ВТГ, описанной в п. 1. Будем предполагать, что отсутствует приток тепла извне и есть только внутренние источники тепла. Тогда после линеаризации граничного условия (1.2), выражающего закон испускания тепла с поверхности кольца, приходим к смешанной задаче для уравнения теплопроводности в кольце

$$c\rho_0\dot{U} = \lambda\Delta U + F (t, \varphi), \qquad U (0) = U_0 \tag{3.1}$$

с граничными условиями третьего рода [5]:

$$\begin{aligned}&-\lambda\frac{\partial U}{\partial n}\left(n = \pm\frac{b}{2}\right) = \pm\lambda_r (U - U_c) \\ &-\lambda\frac{\partial U}{\partial l}\left(l = \pm\frac{h}{2}\right) = \pm\lambda_r (U - U_c)\end{aligned} \tag{3.2}$$

выражающими теплообмен на поверхности кольца в виде закона Ньютона, где c — удельная теплоемкость материала кольца, $\lambda_r = 4s\sigma_0 U_c^3$ — коэффициент лучистого теплообмена, а Δ — оператор Лапласа. В рамках принятой модели следует считать, что температура является функцией только времени t и угловой переменной φ: $U = U (t, \varphi)$. В этом случае можно проинтегрировать уравнение (3.1) по площади поперечного сечения. Произведя интегрирование с учетом граничных условий (3.2), считая при этом, что температура окружающей среды равна начальной температуре резонатора, получаем

$$\dot{U} = \frac{\lambda}{c\rho_0 R^2} U'' - \frac{\lambda_r P}{c\rho_0 S} (U - U_0) + \frac{1}{c\rho_0 S}\int_S F dS \tag{3.3}$$

где через $P \equiv 2 (b + h)$ обозначен параметр поперечного сечения.

Сделаем предположение о том, что вся рассеиваемая в результате действия внутренней диссипации механическая энергия переходит в тепло. Следовательно, мощность диссипативных сил, равная удвоенной функции Релея (2.11), имеет значение удельной плотности внутренних источников тепла F в уравнении (3.3).

Выполним в уравнении (3.3) замену переменных, означающую переход от абсолютной температуры U к ее относительному увеличению T по формуле

$$U(t, \varphi) = U_0 + T(t, \varphi) \tag{3.4}$$

После выполнения замены (3.4) и интегрирования удвоенной функции (2.11) приходим к смешанной задаче для уравнения теплопроводности, характеризующей саморазогрев тонкого упругого растяжимого кольца

$$\dot{T} = \frac{\lambda}{c\rho_0 R^2} T'' - \frac{\lambda_т P}{c\rho_0 S} T + \frac{\delta_1}{c} (\dot{v}' - \dot{w})^2 + \frac{\xi_0}{c} (\dot{w}'' + \dot{v}')^2 \tag{3.5}$$

$$T(0) = 0, \quad T(\varphi = 0) = T(\varphi = 2\pi), \quad T'(\varphi = 0) = T'(\varphi = 2\pi)$$

В случае изотермически нерастяжимого кольца справедливо соотношение (2.17), с помощью которого исключается переменная v из (3.5) и смешанная задача, описывающая саморазогрев тонкого упругого изотермически нерастяжимого кольца, после введения безразмерных переменных (2.19), имеет вид

$$\dot{T} = \frac{\lambda}{c\varkappa\rho_0 R^2} T'' - \frac{\lambda_т P}{c\varkappa\rho_0 S} T + \frac{\zeta_0 \varkappa^2}{c} (\dot{w}'' + \dot{w})^2 \tag{3.6}$$

$$T(0) = 0, \quad T(\varphi = 0) = T(\varphi = 2\pi), \quad T'(\varphi = 0) = T'(\varphi = 2\pi)$$

Итак, уравнение (3.5) совместно с системой (2.15), и уравнение (3.6) совместно с уравнением (2.18), образуют замкнутые системы дифференциальных уравнений, характеризующие процессы взаимодействия полей деформации и температуры соответственно в растяжимом и изотермически нерастяжимом кольцах.

4. Исследование уравнений, характеризующих динамику изотермически нерастяжимого кольца. *4.1. Динамические свойства изотермически нерастяжимого кольца.* Исключим в уравнении (2.18) члены, содержащие производные температуры по времени с помощью (3.6). Тогда в линейном приближении система уравнений, описывающая взаимодействие полей деформации и температуры, имеет вид

$$\ddot{w} - \ddot{w}'' - (w^{VI} + 2w^{IV} + w'') = 4\omega\dot{w}' + \zeta_0 (\dot{w}^{VI} + 2\dot{w}^{IV} + \dot{w}'') +$$

$$+ \alpha R (T^{IV} + T'') + 5\alpha (\partial^4/\partial\varphi^4 + \partial^2/\partial\varphi^2)((w'' + w) T) \tag{4.1}$$

$$\dot{T} = \frac{\lambda}{c\varkappa\rho_0 R^2} T'' - \frac{\lambda_т P}{c\varkappa\rho_0 S} T + \frac{\zeta_0 \varkappa^2}{c} (\dot{w}'' + \dot{w})^2$$

В [1, 2, 4] было показано, что общее решение для линейного дифференциального оператора, стоящего в левой части первого уравнения системы (4.1) представляется рядом Фурье

$$w(\tau, \varphi) = \sum_{k=2}^{\infty} (q_1^k(\tau) \cos k\varphi + q_2^k(\tau) \sin k\varphi) \tag{4.2}$$

Так как оператор, стоящий в правой части первого уравнения (4.1), можно рассматривать как возмущение первого порядка малости, то и в этом случае будем искать общее решение в виде ряда (4.2). В соответствии с методом Фурье общее решение для оператора, характеризующего изменение поля температуры, тоже будем искать в виде тригонометрического ряда

$$T(\tau, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (T_c^n(\tau) \cos n\varphi + T_s^n(\tau) \sin n\varphi) \tag{4.3}$$

После подстановки рядов (4.2) и (4.3) в систему (4.1) приходим к выводу о том, что для того чтобы рассматривать случай влияния поля температуры на форму колебаний с каким-то избранным номером k, необходимо чтобы номера гармоник рядов (4.2) и (4.3) удовлетворяли следующим условиям:

$$n = 0, \quad n = 2k \tag{4.4}$$

Условия (4.4) показывают, что механические колебания по k-ой форме приводят к саморазогреву кольца, причем в ряде Фурье для температуры появляются гармоники с нулевым и удвоенным номерами. Следовательно, общее решение связанной задачи (4.1) имеет вид

$$w(\tau, \varphi) = \sum_{k=2}^{\infty} \left(q_1^k(\tau)\cos k\varphi + q_2^k(\tau)\sin k\varphi\right) \tag{4.5}$$

$$T(\tau, \varphi) = T_0 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(T_c^{2k}(\tau)\cos 2k\varphi + T_s^{2k}(\tau)\sin 2k\varphi\right)$$

причем уравнения для определения коэффициентов Фурье в рядах (4.5) разделяются, как и в случаях не учитывающих термоупругое поведение материала [1, 2, 4] и образуют бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{\mathrm{q}} + \frac{k^6 - 2k^4 + k^2}{1 + k^2}\mathrm{q} = 4\omega\frac{k}{1 + k^2}J\dot{\mathrm{q}} - \frac{k^6 - 2k^4 + k^2}{1 + k^2}\left(\zeta_0\dot{\mathrm{q}} + 5\alpha T_0\mathrm{q} + \frac{5}{2}\alpha\hat{T}\mathrm{q}\right)$$

$$\dot{T}_0 = -\frac{\lambda_t P}{c\varkappa\rho_0 S}T_0 + \frac{\zeta_0\varkappa^2}{2c}\sum_{k=2}^{\infty}(1 - k^2)^2\left((\dot{q}_1^k)^2 + (\dot{q}_2^k)^2\right)$$

$$\dot{T}_c^{2k} = -\left(\frac{4k^2\lambda}{c\varkappa\rho_0 R^2} + \frac{\lambda_t P}{c\varkappa\rho_0 S}\right)T_c^{2k} + \frac{\zeta_0\varkappa^2}{2c}(1 - k^2)^2\left((\dot{q}_1^k)^2 - (\dot{q}_2^k)^2\right)$$

$$\dot{T}_s^{2k} = -\left(\frac{4k^2\lambda}{c\varkappa\rho_0 R^2} + \frac{\lambda_t P}{c\varkappa\rho_0 S}\right)T_s^{2k} + \frac{\zeta_0\varkappa^2}{c}(1 - k^2)^2\dot{q}_1^k\dot{q}_2^k$$

$$\hat{T} \equiv \left\|\begin{matrix} T_c & T_s \\ T_s & -T_c \end{matrix}\right\| \tag{4.6}$$

где q — вектор-столбец переменных $\{q_1^k, q_2^k\}$, J — симплектическая единица.

4.2. Эволюция основной формы колебаний изотермически нерастяжимого кольца. Хорошо известно, что наиболее ценной, с точки зрения практики, является вторая форма колебаний, которую принято называть основной формой колебаний кольцевого резонатора [1, 2]. Поэтому все дальнейшее рассмотрение будем производить именно для нее. Уравнения, описывающие динамику основной формы описываются системой (4.7) если в ней положить $k = 2$.

Итак, пусть каким-то образом возбуждена вторая форма колебаний. Введем в системе (4.6), считая $k = 2$, новый масштаб измерения «медленного» времени $\tau_1 = 6/\sqrt{5}\,\tau$.

Тогда, связанная система уравнений, описывающая динамику основной формы, с учетом термоупругого поведения материала будет иметь вид

$$\ddot{\mathrm{q}} + \mathrm{q} = -d\mathrm{q} + \gamma J\dot{\mathrm{q}} - 2\alpha_0 T_0\mathrm{q} - \alpha_0\hat{T}\mathrm{q}$$

$$\dot{T}_0 = -\alpha_t T_0 + \eta_0\left((\dot{q}_1)^2 + (\dot{q}_2)^2\right) \tag{4.7}$$

$$\dot{T}_c^4 = -(a + a_t)T_c^4 + \eta_0\left((\dot{q}_1)^2 - (\dot{q}_2)^2\right)$$

$$\dot{T}_s^4 = -(a + a_t)T_s^4 + 2\eta_0(\dot{q}_1)^2(\dot{q}_2)^2$$

а коэффициенты полученной системы (4.7) определяются по формулам

$$d \equiv \frac{6}{\sqrt{5}}\zeta_0, \quad \gamma \equiv \frac{4}{3\sqrt{5}}\omega, \quad \alpha_0 \equiv \frac{5}{2}\alpha$$

$$a \equiv \frac{8\sqrt{5}\,\lambda}{3c\varkappa\rho_0 R^2}, \quad a_t \equiv \frac{\sqrt{5}\,\lambda_t P}{6c\varkappa\rho_0 S}; \quad \eta_0 \equiv \frac{27\zeta_0\varkappa^2}{\sqrt{5}\,c}$$

Первые два уравнения системы (4.7), описывающие динамику тонкого изотермически нерастяжимого кольца под воздействием меняющегося во времени поля температуры, вообще говоря произвольной природы, представляют частный случай квазилинейных резонансных систем, имеющих двухкратную собственную частоту (резонанс 1 : 1), рассмотренных в [3]. Для приведения ее к стандартной форме, к которой применим метод осреднения [1, 4], выполним замену переменных $\{q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2\} \to \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ по формулам [2, 3]:

$$\mathrm{q} = \| E\cos\tau_1 \; E\sin\tau_1 \| \,\mathrm{x}, \quad \dot{\mathrm{q}} = \| -E\sin\tau_1 \; E\cos\tau_1 \| \,\mathrm{x} \tag{4.8}$$

в которых через x обозначен вектор-столбец переменных x_i. Тогда стандартная форма первых двух уравнений системы (4.7) определяется следующим образом [2, 3]:

$$\dot{\mathrm{x}} = \left\| \begin{matrix} -E\sin\tau_1 \\ E\cos\tau_1 \end{matrix} \right\| Q \tag{4.9}$$

где Q — матрица правых частей первых двух уравнений системы (4.7):

$$Q \equiv -d\dot{\mathrm{q}} + \gamma J\dot{\mathrm{q}} - 2\alpha_0 T_0 \mathrm{q} - \alpha_0 \hat{T}\mathrm{q} \tag{4.10}$$

Последние три уравнения системы (4.7), описывающие динамику поля температуры уже находятся в стандартной форме. Следовательно, проведя осреднение правых частей системы (4.9), определенных на основе матрицы (4.10), по быстрой переменной, роль которой играет новое безразмерное время τ_1, получаем в первом приближении метода осреднения замкнутую систему дифференциальных уравнений для медленных переменных x, описывающую эволюцию и взаимодействие основной формы колебаний тонкого изотермически нерастяжимого кольца с полем температуры в нем

$$\begin{aligned}
\dot{\mathrm{x}} &= -\frac{1}{2}d\mathrm{x} + \frac{1}{2}\gamma \left\| \begin{matrix} J & 0 \\ 0 & J \end{matrix} \right\| \mathrm{x} + \alpha_0 T_0 \left\| \begin{matrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{matrix} \right\| \mathrm{x} + \frac{1}{2}\alpha_0 \left\| \begin{matrix} 0 & \hat{T} \\ -\hat{T} & 0 \end{matrix} \right\| \mathrm{x} \\
\dot{T}_0 &= -a_t T_0 + \frac{1}{2}\eta_0 \sum_{k=1}^{4} x_k^2 \\
\dot{T}_c^4 &= -(a + a_t)\, T_c^4 + 1/2\,\eta_0 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) \\
\dot{T}_s^4 &= -(a + a_t)\, T_s^4 + \eta_0 (x_1 x_2 + x_3 x_4)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

В соответствии с интерпретацией, данной в [2, 3], замена (4.8) при отсутствии возмущений (x = const) в конфигурационном пространстве переменных q определяет эллиптические траектории, среди которых, есть вырожденные — отрезки прямых, соответствующие стоячим волнам. В четырехмерном фазовом пространстве медленных переменных x стоячие волны определяют трехмерное многообразие — конус стоячих волн, задаваемый уравнением [2, 3]:

$$K = x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0 \tag{4.12}$$

В [2, 3] было показано, что прямолинейная форма колебаний может претерпевать одну из следующих эволюций: прецессия формы, изменение частоты и амплитуды колебаний, а также разрушение формы. Следуя [2, 3], введем векторы

$$\mathbf{e}_1 = \{x_4, -x_3, -x_2, x_1\}, \quad \mathbf{e}_2 = \{x_2, -x_1, x_4, -x_3\} \tag{4.13}$$

$$\mathbf{e}_3 = \{x_3, x_4, -x_1, -x_2\}, \quad \mathbf{e}_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

определяющие соответственно направления наискорейшего разрушения прямолинейной формы, прецессии формы, изменение частоты и амплитуды. Система векторов (4.13) образует базис инфинитезимальных эволюций, который вне конуса стоячих волн неортогонален [2, 3]. Следуя методу, разработанному в [2, 3], для выяснения локальной эволюции стоячей волны, вызываемой силами, стоящими в правой части первых двух уравнений системы (4.11), достаточно спроектировать эти силы на векторы базиса (4.13). Выполняя проектирование, с дополнительным делением проекций на $\|\mathbf{x}\|^2$, и используя выражение для определителя системы векторов (4.13) $\Delta = 4K^2 - \mathrm{x}^4$, вычисленное в [2, 3], получаем таблицу инфинитезимальных эволюций стоячих волн в изотермически нерастяжимом кольце под воздействием температурного поля

	D	Γ	T_0	$\hat{T}$
$\operatorname{dest} K$	0	0	0	$\frac{\alpha_0 \mathrm{x}^2}{2\sqrt{-\Delta}}(T_c^4 \sin 4\vartheta - T_s^4 \cos 4\vartheta)$
$\dot{\vartheta}$	0	$\frac{\Upsilon}{4}$	0	$\frac{\alpha_0 K}{2\sqrt{-\Delta}}(T_c^4 \cos 4\vartheta + T_s^4 \sin 4\vartheta)$
$\dot{\psi}$	0	0	$\alpha_0 T_0$	$\frac{\alpha_0 \mathrm{x}^2}{2\sqrt{-\Delta}}(T_c^4 \cos 4\vartheta + T_s^4 \sin 4\vartheta)$
$\ln r$	$-\frac{d}{2}$	0	0	$-\frac{\alpha_0 K}{\sqrt{-\Delta}}(T_c^4 \sin 4\vartheta - T_s^4 \cos 4\vartheta)$

Из приведенной таблицы видно, что нулевая гармоника температуры, которую можно рассматривать как действие потенциальных сил сферического типа [2, 3], вызывает только изменение частоты, а влияние четвертой гармоники, которое можно рассматривать как действие гиперболических сил потенциального типа [2, 3], может приводить к разрушению стоячей волны и к изменению амплитуды в случае чистой стоячей волны ($K = 0$). Кроме того, вне конуса стоячих волн эти силы могут вызывать прецессию волнового поля и изменение амплитуды колебаний. Следовательно, учет термоупругого поведения материала приводит к выводу о нарушении устойчивости стоячей волны. Поэтому при разработке прибора, в случае если рассмотренный эффект окажется велик, может потребоваться управление для поддержания формы и амплитуды прямолинейной формы колебаний. Величина эффекта будет зависеть от конкретных характеристик материала.

Известно, что ВТГ изготавливается из плавленного кварца и имеет следующие характеристики: диаметр — 58 мм, толщина — 1¾ мм, собственная частота колебаний — 2500 Гц, время затухания амплитуды в e раз — 1800 с, плотность материала — 2650 кг/м^3, удельная теплоемкость 740 Дж/кгК. Тогда для этих величин максимально возможен саморазогрев на $\approx 1 \times 10^{-8}$ К. Следовательно все указанные выше эффекты имеют порядок $10^{-11} \div 10^{-12}$ и, следовательно, влиянием саморазогрева можно пренебрегать.

Таким образом, при разработке ВТГ, в случае отсутствия внешних иточников тепла, можно не учитывать термоупругое поведение материала. Однако, если по каким-то причинам произошел разогрев резонатора, термоупругие свойства материала могут оказывать значительное влияние.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 125 с.
2. *Журавлев В. Ф.* Теоретические основы волнового твердотельного гироскопа (ВТГ)//Изв. РАН. МТТ. 1993. № 3. С. 6—19.
3. *Журавлев В. Ф.* Об управлении формой колебаний в резонансных системах//ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 5. С. 827—836.
4. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
5. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек. Киев: Наук. думка, 1978. 343 с.
6. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 517 с.
7. *Биргер И. А.* Стержни, пластинки, оболочки. М.: Физматлит, 1992. 392 с.
8. *Голдстейн Г.* Классическая механика. М.: Наука, 1975. 415 с.

Москва

Поступила в редакцию
27.XII.1993