

УДК 533.6.013.42

© 1995 г. В. В. БОЛОТИН, А. А. ГРИШКО, А. П. ПЕТРОВСКИЙ

## О ВЛИЯНИИ ДЕМПФИРУЮЩИХ СИЛ НА ПОСЛЕКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СУЩЕСТВЕННО НЕПОТЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Исследовано поведение существенно непотенциальных механических систем при явлениях неустойчивости типа флаттера. Проанализировано влияние демпфирующих сил на послекритическое поведение систем, в том числе в областях, далеких от границ устойчивости. Поскольку условия устойчивости систем рассматриваемого типа зависят от соотношения между парциальными коэффициентами демпфирования, то основное внимание уделено анализу влияния этих соотношений на амплитуды и спектральный состав установившихся колебаний в областях флаттера. Основным средством исследования служит вычислительный эксперимент при изменении параметров системы в широких пределах. Это дает возможность обнаружить некоторые особенности послекритического поведения флаттерных систем, в частности, бифуркацию предельных циклов при значительном удалении от границ областей неустойчивости.

1. Известно [1, 2], что в существенно непотенциальных механических системах демпфирующие силы могут проявлять себя как стабилизирующий, так и дестабилизирующий фактор. Наиболее ранний пример — неустойчивое поведение идеально сбалансированных роторов с заданной угловой скоростью вращения как результат влияния сил внутреннего трения. Большое число примеров дают механические системы, нагруженные следящими (точнее позиционными, но непотенциальными) силами. Рассматривая двойной маятник, нагруженный на конце следящей силой, Циглер [3] обнаружил, что критическое значение силы, вычисленное с учетом исчезающе малого демпфирования, оказалось существенно ниже аналогичного значения, вычисленного в предположении, что демпфирующие силы равны нулю. Этот и аналогичные примеры дали в дальнейшем основание говорить о «парадоксе дестабилизации». Однако в действительности, как это часто случается с парадоксами, имеет место не парадокс, а неадекватная интерпретация результатов или, что почти тоже самое, интерпретация результатов, получаемых с использованием неадекватных моделей [1, 2]. Линейные модели, рассматриваемые обычно в литературе по устойчивости механических систем, являются результатом линеаризации соответствующих нелинейных моделей. Действительно, все механические модели, начиная с двойного маятника Циглера [3], по существу своему нелинейны. Поэтому при анализе устойчивости необходимо следить за тем, выполнены ли условия теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению. В сущности, парадоксы дестабилизации вызваны нарушением этих условий. Поэтому в [1, 2, 4] параметры, найденные без учета демпфирующих сил, были названы квазикритическими (в отличие от истинных критических параметров, отвечающих границам областей неустойчивости).

Чтобы пояснить ситуацию, достаточно рассмотреть поведение характеристических показателей линейной системы на комплексной плоскости при изменении некоторого параметра системы  $\mu$ , например параметра следящей силы. При  $\mu = 0$  все показатели лежат в левой полуплоскости. С ростом  $\mu$  показатели перемещаются по плоскости, а при некотором  $\mu = \mu_{cr}$  по крайней

мере одна пара комплексно сопряженных показателей выходит на мнимую ось, а при дальнейшем увеличении  $\mu$  переходит на правую полуплоскость. Очевидно, что  $\mu = \mu_{cr}$  отвечает границе устойчивости, т. е.  $\mu_{cr}$  является критическим значением. Если принять, что демпфирование в системе отсутствует, то при  $0 \leq \mu \leq \mu_{ps}$ , где  $\mu_{ps}$  — некоторое характерное значение параметра, все показатели находятся на мнимой оси, а при  $\mu \geq \mu_{ps}$  пара показателей выходит на правую полуплоскость. Многие авторы связывают этот выход с наступлением неустойчивости, придавая значению  $\mu_{ps}$  смысл критического параметра. Но поскольку весь анализ в сущности относится к линеаризованной модели некоторой нелинейной физической системы, то следует осторожно относиться к физической интерпретации результатов, полученных на основе линеаризуемых моделей. Действительно, нахождение всех характеристических показателей на мнимой оси еще не означает устойчивости соответствующей нелинейной системы. Это — типичный сомнительный (по Ляпунову) случай, когда линеаризованные уравнения не дают ответа на вопрос об устойчивости нелинейной системы. Достаточно ввести в систему сколь-нибудь малую, но полную диссипацию, чтобы численные результаты существенно изменились. Неопределенность тогда полностью устраняется, причем критический параметр  $\mu_{cr}$ , вычисленный с учетом исчезающе малого демпфирования, связан с квазикритическим параметром соотношением  $\mu_{cr} \leq \mu_{ps}$ . Этим разрешается так называемый «парадокс дестабилизации» [1, 4]. В дальнейшем, чтобы подчеркнуть неадекватный характер вычислений, выполненный без учета демпфирования, будем называть значение  $\mu_{ps}$  «псевдокритическим», что уже отражено в его обозначении.

Линейные задачи, рассматриваемые без учета демпфирующих сил, технически значительно проще, чем аналогичные задачи с учетом демпфирования. По-видимому, это послужило причиной того, что продолжает расти число публикаций, в которых демпфирующие силы не учитываются, т. е. в которых определяются «псевдокритические» значения параметров. Более того, высказываются предположения, что в нелинейных задачах «псевдокритические» значения могут приобретать определяющую роль. Перечисленные обстоятельства послужили одним из поводов для выполнения описываемого ниже исследования.

Примером существенно непотенциальной механической системы служит тонкая упругая цилиндрическая панель, обтекаемая потоком газа, невозмущенная скорость  $U$  которого направлена вдоль образующей панели [1, 5—8]. Рассмотрим для упрощения плоскую панель в условиях цилиндрического изгиба. При больших сверхзвуковых скоростях давление на возмущенную поверхность панели можно выразить через функцию нормального прогиба  $w(x, t)$  следующим образом:

$$p = p_0 \left[ 1 + \frac{k-1}{2} M (w_t + U w_x) \right] \quad (1.1)$$

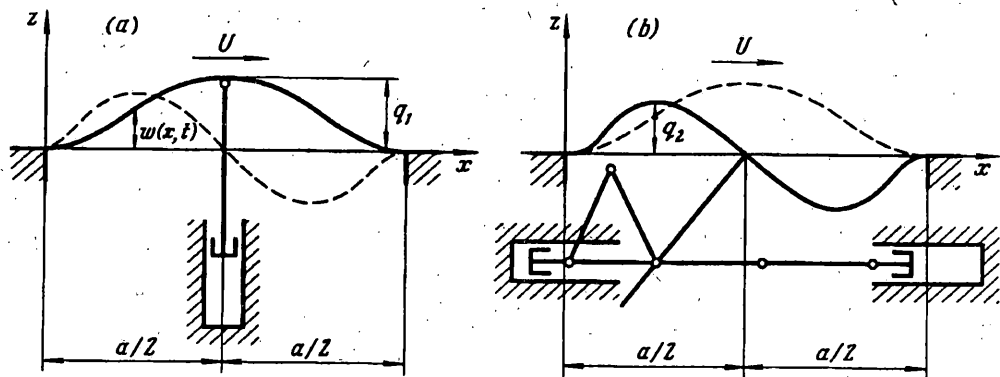
Здесь  $p_0$  — невозмущенное давление,  $M$  — число Маха,  $k$  — показатель политропы, координата  $x$  отсчитывается вдоль потока  $w_t \equiv \partial w / \partial t$ ,  $w_x \equiv \partial w / \partial x$ .

Если концы панели заземлены от продольных смещений, то основным нелинейным фактором, влияющим на амплитуды колебаний панели в закритической области, будет продольная сила, которая возникает из-за сопротивления панели деформации ее срединной поверхности. Эта сила, отнесенная к единице длины поперек потока, с точностью до квадратичных членов составляет

$$N = N_0 + \frac{Eh}{2(1-\nu^2)a} \int_0^a w_x^2 dx \quad (1.2)$$

где  $N_0$  — начальное значение силы (положительное при растяжении),  $a$  и  $h$  — длина панели по потоку и ее толщина соответственно,  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Уравнение возмущенных колебаний панели принимает вид



Фиг. 1

$$Dw_{xxxx} - Nw_{xx} + \rho h w_{tt} + B(w) = p - p_0 \quad (1.3)$$

Здесь  $D$  — цилиндрическая жесткость панели,  $\rho$  — плотность ее материала. Демпфирование в системе описывается членом  $B(w)$ , где  $B$  — диссипативный оператор над функцией прогиба  $w(x, t)$ . Подстановка в уравнение (1.3) разложения по подходящим формам  $\varphi_k(x)$ :

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^n q_k(t) \varphi_k(x) \quad (1.4)$$

приводит с учетом (1.1) и (1.2) к системе  $n$  обыкновенных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат  $q_k(t)$ . При этом каждой обобщенной координате соответствует парциальная собственная частота и парциальное демпфирование (хотя в общем случае имеет место связь между обобщенными координатами по демпфированию). В задачах панельного флаттера основные качественные результаты могут быть получены при удержании в (1.4) первых двух членов ряда, из которых первый описывает симметричную, второй — антисимметричную составляющие колебаний. Учет следующих членов, как правило, не вносит существенных изменений даже в количественные результаты. Одно из исключений составляет случай мембраны, когда в уравнении (1.3)  $D \rightarrow 0$  при  $N_0 > 0$  (см. так называемый мембранный парадокс [1]).

В дальнейшем интерес представляет распределение диссипации между степенями свободы. Это распределение зависит от свойств оператора  $B$  в уравнении (1.3). В случае диссипации пропорциональной нормальной составляющей скорости  $w_t$ , приходим к равному (или приблизительно равному) распределению демпфирования между степенями свободы. Принимая, что диссипация пропорциональна скорости деформации, приходим к уравнению (1.3) с диссипативным членом, пропорциональным  $w_{xxxx}$ . При этом, формы, которым отвечают высшие частоты, будут задемпфированы сильнее, чем основная форма колебаний.

Чтобы получить существенно неравномерную диссипацию по степеням свободы, необходимо рассмотреть конструкционное демпфирование. Некоторые случаи показаны на фиг. 1. При демпфировании по схеме  $a$  все симметричные формы будут задемпфированы намного сильнее, чем антисимметричные формы, на которые соответствующее конструкционное демпфирование не распространяется. В случае  $b$ , напротив, конструкция демпфирует антисимметричные формы колебаний. Примеры, показанные на фиг. 1, могут показаться искусственными. Более близкий к практике пример рассмотрен в [9]. К внутренней стороне панели при помощи вязкоупругой связи прикреплен дополнительный элемент, например, измерительный прибор. Это вносит изменения как в спектр собственных колебаний, так и в распределение демпфирования между степенями свободы. Именно этим объясняются anomальные свойства панели с присоединенным эле-

ментом, в частности, эффекты стабилизации и дестабилизации при монотонном изменении параметров присоединенного элемента [9].

2. В качестве модельного примера рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} q_1'' + \varepsilon_1 q_1' + \omega_1^2 [q_1 + \mu (b_{11} q_1 + b_{12} q_2)] + f_1(q_1, q_2) &= 0 \\ q_2'' + \varepsilon_2 q_2' + \omega_2^2 [q_2 + \mu (b_{21} q_1 + b_{22} q_2)] + f_2(q_1, q_2) &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — парциальные собственные частоты ( $\omega_2 > \omega_1$ ),  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  — парциальные коэффициенты демпфирования,  $\mu$  — коэффициент, характеризующий интенсивность внешних воздействий,  $f_1(q_1, q_2)$  и  $f_2(q_1, q_2)$  — нелинейные функции обобщенных координат. Дифференцирование по времени  $t$  обозначено штрихами. Матрица коэффициентов  $b_{jk}$ , симметричная при потенциальных силах, в дальнейшем предполагаем несимметричной. Малость нелинейных членов, равно как и малость демпфирования, не предполагается.

Модельная задача, описываемая уравнениями (2.1), может быть использована как задача об устойчивости и послекритическом поведении многих механических систем при наличии следящих сил, начиная с двойного маятника и консольного стержня, нагруженного на свободном конце следящей силой. К аналогичным уравнениям приводят и многие задачи аэроупругости, в том числе задача о панельном флаттере. Ограничение числа степеней двумя не является существенным: явление неустойчивости в системах рассматриваемого вида, как правило, обусловлено парным взаимодействием степеней свободы. Пара степеней свободы, отвечающая за выход системы на границу неустойчивости, остается доминирующей и в послекритическом режиме, если система достаточно близка к этой границе. Это утверждение, строгая формулировка которого может быть построена в рамках теории центрального многообразия [10], остается применимым и к распределенным системам [11]. Во всяком случае, анализ уравнений (2.1) дает достаточно информации для качественных выводов о послекритическом поведении существенно непотенциальных механических систем в областях, удаленных от границ устойчивости.

Поскольку по условию  $\varepsilon_1 > 0$ ,  $\varepsilon_2 > 0$ , то при достаточно малых значениях параметра нагрузки  $\mu > 0$  решение  $q_1 = q_2 = 0$  уравнений (2.1) устойчиво. Критическое значение параметра  $\mu_{cr}$  вычисляем стандартным методом. Чтобы избежать громоздких формул, ограничимся случаем  $b_{11} = b_{22} = 0$ ,  $b_{12} = -b_{21} = 1$ , т. е. антисимметричной матрицей  $b_{jk}$ . Все характеристические показатели линейной системы лежат в левой полуплоскости при  $\mu < \mu_{cr}$ , где

$$\mu_{cr} = \frac{(\varepsilon_1 \varepsilon_2)^{1/2}}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \omega_1 \omega_2} [(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 + \varepsilon_1^2 \omega_1^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \varepsilon_2^2 \omega_2^2]^{1/2} \quad (2.2)$$

Соответствующее псевдокритическое значение  $\mu_{ps}$  составляет

$$\mu_{ps} = |\omega_2^2 - \omega_1^2| / (2\omega_1 \omega_2) \quad (2.3)$$

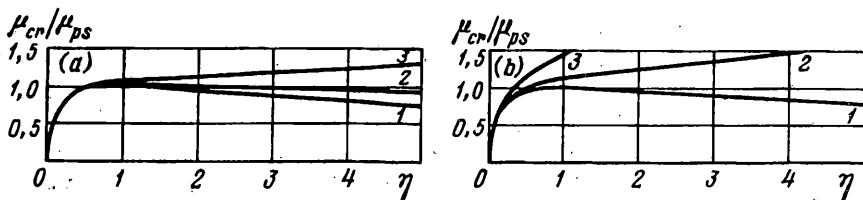
При  $\varepsilon_1 \ll \omega_1$ ,  $\varepsilon_2 \ll \omega_2$ , т. е. при малом демпфировании, отношение этих значений определим по формуле

$$\frac{\mu_{cr}}{\mu_{ps}} = \frac{2\eta^{1/2}}{1 + \eta} [1 + O(\beta_1^2, \beta_2^2)] \quad (2.4)$$

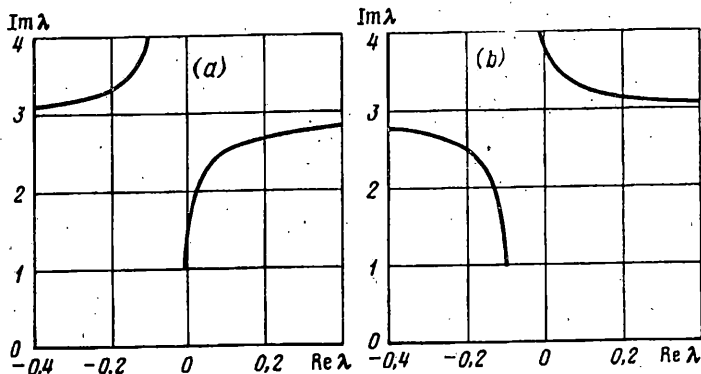
$$\eta = \varepsilon_2 / \varepsilon_1, \quad \beta_1 = \varepsilon_1 / \omega_1, \quad \beta_2 = \varepsilon_2 / \omega_2$$

В случае исчезающе малогó демпфирования равенство  $\mu_{cr} = \mu_{ps}$  достигается лишь при  $\eta = 1$ , т. е. при равных парциальных коэффициентах демпфирования. Таким образом,

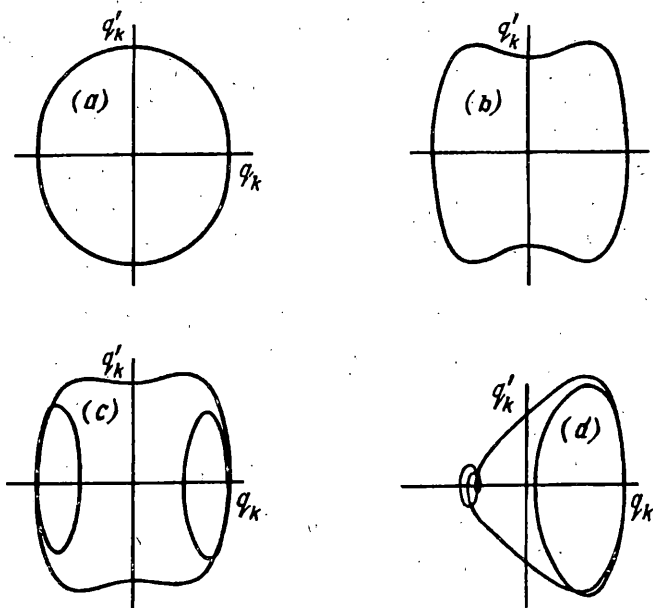
$$\lim_{\beta_1 \rightarrow 0, \beta_2 \rightarrow 0} \mu_{cr} / \mu_{ps} \leq 1 \quad (2.5)$$



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Этот факт давно известен [4]. Он проиллюстрирован на фиг. 2, где отношение  $\mu_{cr}/\mu_{ps}$  отложено в функции от  $\eta$  при различных значениях  $\beta_1$ . Фиг. 2, а построена при  $\omega_2/\omega_1 = 4$ . Если  $\beta_1 \leq 0,1$ , то все кривые практически сливаются в одну (кривую 1), соответствующую предельному случаю  $\beta_1 \rightarrow 0$ . Кривая 2 отвечает случаю  $\beta_1 = 0,5$ , кривая 3 — случаю  $\beta_1 = 1$ , т. е. весьма большому демпфированию.

Максимум отношения наблюдается вблизи  $\eta = 1$ , причем дестабилизация из-за неравномерного распределения демпфирования по степеням свободы имеет место даже в последнем случае. Картина несколько изменяется при сближении парциальных собственных частот. Так, если  $\omega_2/\omega_1 = 2$  (фиг. 2, б), то дестабилизация наблюдается лишь при достаточно малом демпфировании (кривая 1). При  $\beta_1 = 0,5$  и тем более при  $\beta_1 = 1$  все кривые существенно изменяются, так что дестабилизация имеет место только в том случае, если вторая обобщенная координата задемпфирована значительно слабее, чем первая (кривые 2 и 3 на фиг. 2, б).

3. Исследуем поведение устойчивых решений системы (2.1) при  $\mu > \mu_{cr}$ , уделив особое внимание влиянию соотношения между парциальными коэффициентами демпфирования. При этом в уравнениях (2.1) положим

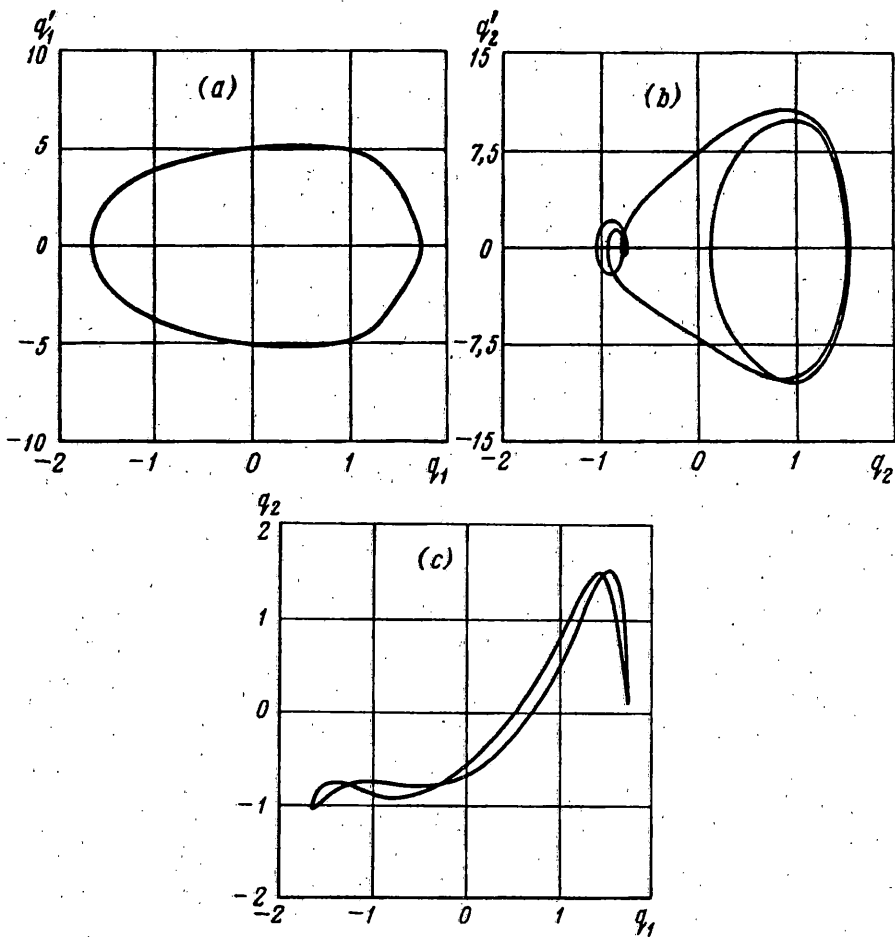
$$f_1 = \gamma_1 q_1 (q_1^2 + \chi q_2^2), \quad f_2 = \gamma_2 q_2 (q_1^2 + \chi q_2^2) \quad (3.1)$$

при  $\gamma_1 > 0$ ,  $\gamma_2 > 0$ ,  $\chi > 0$ . При достаточно малых  $\mu - \mu_{cr}$  устойчивые движения близки к гармоническим, а их амплитуды могут быть вычислены любым приближенным методом, использующим идею усреднения (методом Пуанкаре, гармонического баланса и т. п.). При  $\gamma_1 \sim \gamma_2 \sim \chi \sim 1$ , предельные амплитуды по обоим обобщенным координатам имеют порядок [1]:

$$A \sim h (\mu/\mu_{cr} - 1)^{1/2} \quad (3.2)$$

Если парциальные коэффициенты демпфирования отличаются на порядок, то будет различен и порядок амплитуд. Так, при  $\varepsilon_1 \ll \varepsilon_2$  находим, что  $A_1 \gg A_2$ , и наоборот. Существенная роль отношения  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  обнаруживается уже при применении аналитических методов. В частности, метод Пуанкаре применим к данной задаче при условии, что в качестве порождающего взято периодическое решение линейной задачи с сохранением диссипативных членов [1]. Что касается частот колебаний, то в области, близкой к границе устойчивости, они близки к частотам линейной системы при  $\mu = \mu_{cr}$ . Если  $\eta \gg 1$ , то частоты предельного цикла близки к  $\omega_1$ , если  $\eta \ll 1$ , то к  $\omega_2$ . При  $\eta = 1$ , т. е. при  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ , эта частота близка к значению  $\omega_0$ , где  $\omega_0^2 = (\omega_1^2 + \omega_2^2)/2$ . Этот качественный вывод можно было ожидать, рассматривая поведение характеристических показателей системы (2.1) для окрестности решения  $q_1 = q_2 = 0$  при монотонном увеличении  $\mu$ . На фиг. 3, а показано поведение этих показателей при  $\eta = 10$ , на фиг. 3, б — при  $\eta = 0,1$  (для наглядности масштаб вдоль действительной оси увеличен в 10 раз). В случае а показатель, покидающий левую полуплоскость при  $\mu > \mu_{cr}$ , отвечает частоте  $\omega_1$ . В случае б он отвечает частоте  $\omega_2$ .

Вычислительные эксперименты показали, что при дальнейшем продвижении в область неустойчивости нулевого решения свойства предельного цикла существенно зависят от отношения  $\eta = \varepsilon_2/\varepsilon_1$ . Типичные проекции устойчивого предельного цикла в четырехмерном фазовом пространстве на одну из фазовых плоскостей ( $k = 1, 2$ ) показаны на фиг. 4, а — d. Здесь в зависимости от значений  $\mu - \mu_{cr}$  и  $\eta$  проекция предельного цикла на одну из плоскостей может иметь вид овала (а), гантелеобразную форму (б), форму овала с «ушами» (с). В решениях появляются третьи, а затем и более высокие гармоники. При достаточно больших  $\mu - \mu_{cr}$  обнаруживаются устойчивые асимметричные циклы типа показанного на фиг. 4, d. Точнее, имеет место симметрия этих циклов по отношению к отражению  $q_k \rightarrow -q_k$ . Поскольку исходная система (2.1) с нелинейными функциями (3.1) симметрична по отношению к преобразованиям  $q_1 \rightarrow -q_1$ ,  $q_2 \rightarrow -q_2$ , то следует ожидать существования зеркально симметричных устойчивых предельных циклов. Действительно, если цикл типа фиг. 4, d реализуется при начальных значениях  $q_k(0)$ ,  $q_k'(0)$ , то замена  $q_k(0)$  на  $-q_k(0)$  приводит к колебаниям, которые с ростом  $t$  приближаются к циклу типа, который зеркально симметричен изображенному на фиг. 4, d (и наоборот). Отметим, что если проекция предельного



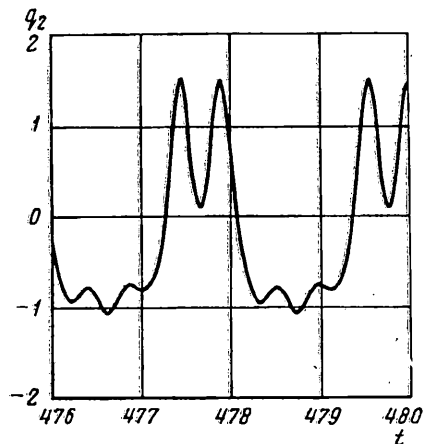
Фиг. 5

цикла на одну из фазовых плоскостей имеет вид *c* или *d*, то проекция на другую плоскость, как правило, имеет вид *a* или *b*.

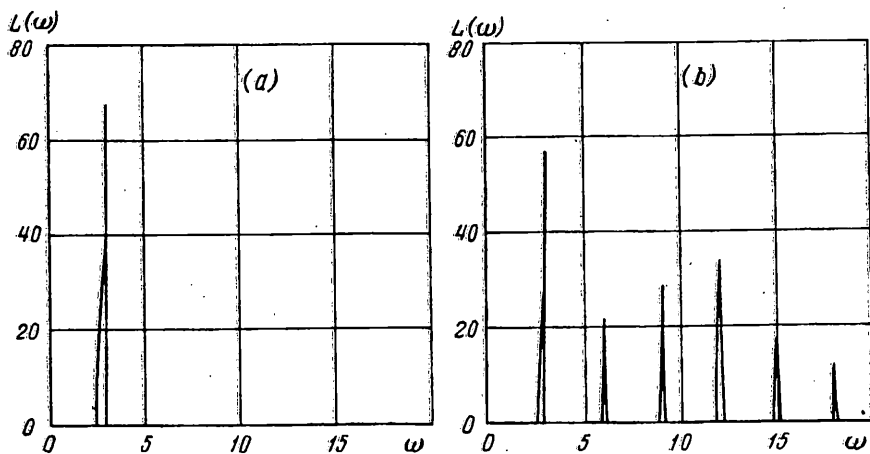
Наличие двух устойчивых предельных циклов не является неожиданным в силу достаточно высокой размерности фазового пространства. Более неожиданным представляется то, что траектории этих циклов охватывают единственное устойчивое положение равновесия и имеют асимметричную форму. Сходные колебания наблюдались в аналогичной системе, соответствующей выпукленной панели [8]. Но в последнем случае система имела два устойчивых положения равновесия в отсутствие потока, так что результат представляется физически (интуитивно) ожидаемым.

Итак, при некотором  $\mu = \mu_{bf} > \mu_{cr}$  происходит бифуркация устойчивого предельного цикла с рождением двух устойчивых асимметричных циклов. При этом переход от циклов типа (*a*) и (*b*) к циклу типа (*d*) типичен для  $\varepsilon_2/\varepsilon_1 \gg 1$ .

Наибольший интерес представляет случай  $\varepsilon_2/\varepsilon_1 \gg 1$ . На фиг. 5—8 приведены результаты вычислительного эксперимента для следующих данных:  $\omega_1 = \gamma_1 = 1$ ,  $\omega_2 = \gamma_2 = 4$ ,  $\chi = 4$ ,  $\varepsilon_1 = 0,02$ ,  $\varepsilon_2 = 0,2$ . При этом критическое значение (2.2) параметра  $\mu$  составляет  $\mu_{cr} = 1,080$  при псевдокритическом значении (2.3), равном  $\mu_{ps} = 1,875$ . Вычисления выполнялись при начальных условиях  $q_1(0) = 0,1$ ,  $q_2(0) = 0,1$ ,  $q_1'(0) = q_2'(0) = 0$  до выхода на устойчивый (стационарный) режим.



Фиг. 6



Фиг. 7

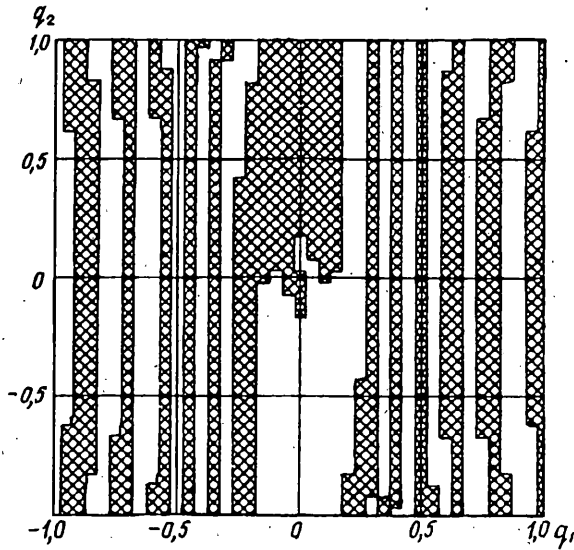
Начало координат асимптотически устойчиво при  $\mu < \mu_{cr}$  без каких-либо качественных изменений при переходе через  $\mu = \mu_{ps}$ . При  $\mu > \mu_{cr}$  вначале наблюдается устойчивое периодическое решение по типу фиг. 4, а. С дальнейшим ростом  $\mu$  траектория на плоскости  $(q_1, q_1')$  сохраняет примерно ту же форму, в то время как на плоскости  $(q_2, q_2')$  происходит переход к типу, показанному на фиг. 4 с. Бифуркация циклов наблюдается вблизи  $\mu = 2,83$

Проекции предельного цикла при  $\mu = 4$  на плоскости  $(q_1, q_1')$ ,  $(q_2, q_2')$  и  $(q_1, q_2)$  приведены на фиг. 5. При выбранных начальных данных система выходит на «правый» предельный цикл по координате  $q_2$ . Чтобы выйти на «левый» предельный цикл, т. е. на зеркальное отображение относительно оси  $q_2'$ , достаточно соответствующим образом изменить начальные условия, например положить  $q_1(0) = 0,1$ ,  $q_2(0) = -0,1$  при  $q_1'(0) = q_2'(0) = 0$ . Оба цикла обнаруживают высшую степень устойчивости и периодичности. Отрезок реализации процесса  $q_2(t)$  показан на фиг. 6, а на фиг. 7 представлены результаты спектрального анализа процессов  $q_1'(t)$  и  $q_2(t)$ . При этом спектральные плотности  $S_1(\omega)$  и  $S_2(\omega)$  выражены в дБ, т. е. по вертикальной оси отложены значения

$$L_k(\omega) = 10 \lg [S_k(\omega)/S_0] \quad (k = 1, 2) \quad (3.3)$$

В формуле (3.3) в качестве начального уровня спектральной плотности выбрано  $S_0 = 10^{-2}$ . Сопоставление графиков показывает, что процесс  $q_1(t)$  относительно





Фиг. 8

близок к гармоническому, в то время как процесс  $q_2(t)$  содержит ряд гармонических составляющих. Тем не менее, первый пик функции  $S_2(\omega)$  совпадает с основным пиком функции  $S_1(\omega)$  при  $\omega = \omega_0 \approx 2,91$ . Это говорит о том, что в целом процесс остался, если его рассматривать в четырехмерном пространстве, периодическим с периодом  $2\pi/\omega_0$ . В частности, возвращаясь к исходной механической модели панельного флаттера (фиг. 1), приходим к заключению, что в рассматриваемом двухчленном приближении установившиеся колебания панели остаются периодическими. Действительно, поскольку характерные частоты  $q_1(t)$  и  $q_2(t)$  соизмеримы, любая линейная комбинация обобщенных координат  $q_1(t)$  и  $q_2(t)$  в установившемся режиме будет иметь период  $2\pi/\omega$ .

Представляется интересным исследование распределения начальных данных, отвечающих приближению системы к одному из двух устойчивых предельных циклов. Вычислительные трудности такого исследования весьма значительны, если принять во внимание четырехмерность фазового пространства. Действительно, здесь следует ожидать, что исследуемые области будут трехмерными образованиями. Вычисления осложнены вследствие ожидаемой фрагментарности этих областей (достаточно вспомнить фрагментарность в значительно более простой задаче о колебаниях системы с одной степенью свободы с потенциальной энергией, имеющей два изолированных минимума).

Ограничимся тем, что построим сечение областей начальных данных некоторой плоскостью в фазовом пространстве. На фиг. 8 показано такое сечение плоскостью  $q_1 = 0, q_1' = 0$ . В квадрате  $-1 < q_2 < 1, -1 < q_2' < 1$  было исследовано поведение решений в  $40 \times 40 = 1600$  точках с целью выяснить, какие начальные данные соответствуют притяжению к правому предельному циклу (фиг. 5, b) и какие к левому, т. е. его зеркальному отображению относительно оси  $q_2 = 0$ . Точки, из которых исходят решения, которые наматываются на правый предельный цикл, обозначены крестиками. Преобразование полученной проекции относительно оси  $q_2$  или  $q_2'$  переводят начальные данные в область притяжения другого предельного цикла. Двойное отражение  $q_2 \rightarrow -q_2, q_2' \rightarrow -q_2'$  отражает область притяжения в себя. Все это служит подтверждением надежности проведенных расчетов. Наиболее интересной особенностью является слоистый характер областей притяжения. В отличие от упомянутой выше системы с одной степенью свободы и двумя устойчивыми положениями равновесия, здесь фрагментарность области начальных данных не следует из физических (т. е. интуитивных) соображений.

За исключением окрестности точек бифуркации предельных циклов и области возможных срывов, рассмотренная система не обнаруживает явных признаков псевдослучайного, хаотического поведения. Такие режимы обычно возникают в механических системах, имеющих два и более устойчивых положения равновесия [12]. При этом псевдослучайные колебания сопровождаются переходом с одного режима на другой (вокруг одного из положений равновесия или с охватом двух устойчивых положений и т. п.). Чтобы получить такие режимы, достаточно взять в исходной механической модели (фиг. 1) начальную сжимающую силу, превышающую критическое значение для панели при отсутствии потока [8, 12]. Например, при определении характеристик панели следует положить в формуле (1.2)  $N_0 < -\pi^2 D/a^2$ . В соответствующей системе типа (2.1) появляются дополнительные линейные члены, зависящие от уровня начального сжатия, а положение  $q_1 = q_2 = 0$  будет неустойчивым уже при  $\mu = 0$ . Наряду с этой точкой появляются два устойчивых положения равновесия, которые соответствуют выпученной панели.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 94—01—00162).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
2. Bolotin V. V. Stabilization and destabilization effects in mechanics of deformable systems//Proc. 6th Canad. Congr. Appl. Mech. Vancouver, 1977. P. 1—10.
3. Ziegler H. Linear elastic stability//Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik. 1953. Bd. 4, 1/2. P. 89—121, 167—185.
4. Болотин В. В. О колебаниях и устойчивости стержней, нагруженных неконсервативными силами//Колебания в турбомашинах. М.: Изд. АН СССР, 1959. С. 23—42.
5. Болотин В. В. Нелинейный флаттер пластин и оболочек//Инженерный сб. 1960. Вып. 28. С. 55—75.
6. Новичков Ю. Н. О применении трехмерной аэродинамической теории к задачам выпучивания и флаттера панелей//Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. № 3. С. 138—141.
7. Dowell E. H. Aeroelastic stability of plates and shells: an innocent's guide to the literature//Instabilities in continuous systems. Proc. IUTAM Symposium. Springer-Verlag, 1971. P. 36—48.
8. Virgin L. N., Dowell E. H. Nonlinear aeroelasticity and chaos// Computational nonlinear mechanics in aerospace engineering. Washington: AIAA, 1992. P. 531—546.
9. Болотин В. В., Симонов Б. П. Устойчивость упругих панелей с присоединенными элементами в сверхзвуковом потоке газа//Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1978. № 2. С. 129—135.
10. Carr J. Application of centre manifold theory. New York et al.: Springer-Verlag, 1981. 302 p.
11. Bolotin V. V., Zhinzher N. I. Effects of damping on stability of elastic systems subjected to nonconservative forces//Int. J. Solid and Struct. 1969. V. 5. № 9. P. 965—989.
12. Thompson J. M. T., Stewart H. B. Nonlinear dynamics and chaos. Chichester: John Wiley Interscience, 1986. 413 p.