

УДК 539.3:534.1

© 1995 г. А. В. ЛОПАТИН

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСОЛЬНОЙ КОМПОЗИТНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С КОЛЬЦЕВЫМИ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ

Рассматриваются свободные поперечные колебания консольно-закрепленной композитной цилиндрической оболочки с кольцевыми ребрами жесткости. Собственные частоты колебаний определяются в рамках полубезмоментной теории с учетом дискретного характера расположения ребер.

1. Рассмотрим задачу определения собственных частот поперечных колебаний консольной композитной цилиндрической оболочки с кольцевыми ребрами жесткости. Такая расчетная схема может быть использована при исследовании динамических параметров корпуса космического аппарата в процессе выведения его на орбиту.

Воспользуемся для решения поставленной задачи уравнениями полубезмоментной теории цилиндрических композитных оболочек [1]. При построении расчетной модели примем, что взаимодействие кольцевого ребра и оболочки осуществляется за счет мембранных усилий, сосредоточенных вдоль нейтральной оси кольца, проходящей по начальной поверхности оболочки; кольцевое ребро не обладает крутильной жесткостью и жесткостью на изгиб в направлении нормали к плоскости кольца; плотности слоев могут быть распределены по толщине оболочки несимметрично относительно ее начальной поверхности; центр жесткости поперечного сечения кольцевого ребра может не совпадать с его центром тяжести.

Запишем для оболочки уравнения движения, учитывающие дискретный характер расположения ребер

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_a}{\partial \alpha} + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + \sum_{j=1}^m S_j \delta(\alpha - \alpha_j) - B_p \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{Q_\beta}{R} + \sum_{j=1}^m T_j \delta(\alpha - \alpha_j) - B_p \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - C_p \frac{\partial^2 \varphi_\beta}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial Q_\beta}{\partial \beta} - \frac{N_\beta}{R} - B_p \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial M_\beta}{\partial \beta} - Q_\beta - D_p \frac{\partial^2 \varphi_\beta}{\partial t^2} - C_p \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

физические соотношения

$$N_a = B_{11} \varepsilon_\alpha, \quad N_{\alpha\beta} = B_{33} \gamma_{\alpha\beta}, \quad M_\beta = D_{22} \chi_\beta, \quad Q_\beta = K_\beta \psi_\beta \quad (1.2)$$

геометрические соотношения

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\partial U}{\partial \alpha}, \quad \gamma_{\alpha\beta} = \frac{\partial U}{\partial \beta} + \frac{\partial V}{\partial \alpha}, \quad \chi_\beta = \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \beta}, \quad \psi_\beta = \varphi_\beta - \frac{V}{R} + \frac{\partial W}{\partial \beta} \quad (1.3)$$

условие нерастяжимости контура сечения оболочки

$$\partial V / \partial \beta + W / R = 0 \quad (1.4)$$

Здесь t — время; α, β — продольная и окружная координаты начальной поверхности оболочки; R — радиус цилиндра, образованного начальной поверхностью; $N_\alpha, N_\beta, N_{\alpha\beta}$ — мембранные усилия; Q_β — перерезывающая сила; M_β — изгибающий момент; $\varepsilon_\alpha, \gamma_{\alpha\beta}$ — компоненты мембранной, χ_β — изгибной, ψ_β — сдвиговой деформаций; u, v, w — перемещения и прогиб начальной поверхности; φ_β — угол поворота нормали к начальной поверхности; B_{11}, B_{33} — мембранные, D_{22} — изгибная, K_β — сдвиговая жесткости стенки; B_β, C_ρ, D_ρ — инерционные параметры стенки; j — номер кольцевого ребра; $\alpha - \alpha_j = 0$ — уравнения линии контакта оси j -го ребра с оболочкой; δ — функция Дирака; T_j, S_j — усилия взаимодействия j -го ребра с оболочкой, действующие соответственно по оси и по нормали к плоскости кольца; m — число кольцевых ребер, куда входит $m - 1$ ребер на боковой поверхности оболочки и торцевой шпангоут.

Движение j -го кольцевого ребра под действием инерционных сил и усилий взаимодействия с оболочкой опишем системой уравнений, которая включает уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_j}{\partial \beta} + \frac{Q_j}{R} - T_j - B_{\rho j} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - C_{1\rho j} \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2} - C_{2\rho j} \frac{\partial^2 \varphi_{2j}}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial Q_j}{\partial \beta} - \frac{N_j}{R} - B_{\rho j} \frac{\partial^2 w_{1j}}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial Q_{2j}}{\partial \beta} - S_j - B_{\rho j} \frac{\partial^2 w_{2j}}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial M_j}{\partial \beta} - Q_j - C_{1\rho j} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - D_{1\rho j} \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2} &= 0 \\ Q_{2j} + C_{2\rho j} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + D_{2\rho j} \frac{\partial^2 \varphi_{2j}}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

физические соотношения

$$Q_{1j} = K_{1j} \varphi_{1j}, \quad Q_{2j} = K_{2j} \varphi_{2j}, \quad M_{1j} = D_{1j} \chi_{1j} \quad (1.6)$$

геометрические соотношения

$$\psi_{1j} = \varphi_{1j} - \frac{u_j}{R} + \frac{\partial w_{1j}}{\partial \beta}, \quad \varphi_{2j} = \varphi_{2j} + \frac{\partial w_{2j}}{\partial \beta}, \quad \chi_{1j} = \frac{\partial \varphi_{1j}}{\partial \beta} \quad (1.7)$$

условие нерастяжимости оси кольца

$$\partial u_j / \partial \beta + w_{1j} / R = 0 \quad (1.8)$$

условие совместимости деформаций ребра и оболочки

$$u_j = v(\alpha_j), \quad w_{2j} = u(\alpha_j) \quad (1.9)$$

где величины с нижними индексами ij и $i\rho j$ связаны с деформированием кольца в своей плоскости, а величины с нижними индексами $2j$ и $2\rho j$ — с деформированием кольца в направлении нормали к его плоскости; N_j — осевая; Q_{1j}, Q_{2j} — перерезывающие силы; M_{1j} — изгибающий момент; ψ_{1j}, φ_{2j} — компоненты сдвиговой, χ_{1j} — изгибной деформаций; u_j, w_{1j}, w_{2j} — осевое перемещение и прогибы оси кольца; $\varphi_{1j}, \varphi_{2j}$ — углы поворота сечения кольца; K_{1j}, K_{2j} — сдвиговые, D_{1j} — изгибная жесткости сечения; $B_{\rho j}, C_{1\rho j}, C_{2\rho j}, D_{1\rho j}, D_{2\rho j}$ — инерционные параметры сечения кольца.

Жесткостные и инерционные параметры в (1.1), (1.2), (1.5), (1.6), зависят от структуры стенки оболочки и поперечного сечения кольцевых ребер, механических свойств и плотности составляющих материалов.

Уравнения (1.1)—(1.4), (1.5)—(1.9), описывающие движение композитной цилиндрической оболочки с кольцами жесткости, учитывают дискретный характер

расположения ребер и деформации сдвига в оболочке $\gamma_{\alpha\beta}$, φ_β и ребрах φ_{1j} , φ_{2j} ($j = 1, 2, \dots, m$). Система из $13+14m$ уравнений включает $13+14m$ неизвестных функций.

Выполним в (1.1)—(1.4), (1.5)—(1.9) следующие преобразования: исключив из уравнения движения кольцевые усилия N_β , N_j ($j = 1, 2, \dots, m$), выразим в них остальные силовые факторы через деформации с помощью физических соотношений (1.2), (1.6), а деформации — через кинематические переменные согласно равенствам (1.3), (1.7), используя условия (1.4), (1.8), (1.9). В результате получим

$$B_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + B_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} - B_\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B_{33} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + \sum_{j=1}^m S_j \delta(\alpha - \alpha_j) = 0 \quad (1.10)$$

$$B_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + B_{33} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} - K_\beta R^2 \frac{\partial^4 v}{\partial \beta^4} - 2K_\beta \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} - \frac{K_\beta}{R^2} v + B_\rho R^2 \frac{\partial^4 v}{\partial \beta^2 \partial t^2} -$$

$$- B_\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + RK_\beta \frac{\partial^2 \varphi_\beta}{\partial \beta^2} + \frac{K_\beta}{R} \varphi_\beta - C_\rho \frac{\partial^2 \varphi_\beta}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^m T_j \delta(\alpha - \alpha_j) = 0$$

$$K_\beta R \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + \frac{K_\beta}{R} v - C_\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + D_{22} \frac{\partial^2 \varphi_\beta}{\partial \beta^2} - K_\beta \varphi_\beta - D_\rho \frac{\partial^2 \varphi_\beta}{\partial t^2} = 0$$

$$RK_{1j} \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial \beta^2} + \frac{K_{1j}}{R} \varphi_{1j} - C_{1\rho j} \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2} - C_{2\rho j} \frac{\partial^2 \varphi_{2j}}{\partial t^2} - T_j = K_{1j} R^2 \frac{\partial^4 v(\alpha_j)}{\partial \beta^4} +$$

$$+ 2K_{1j} \frac{\partial^2 v(\alpha_j)}{\partial \beta^2} + \frac{K_{1j}}{R^2} v(\alpha_j) + B_{\rho j} \frac{\partial^2 v(\alpha_j)}{\partial t^2} - B_{\rho j} R^2 \frac{\partial^4 v(\alpha_j)}{\partial \beta^2 \partial t^2}$$

$$K_{2j} \frac{\partial \varphi_{2j}}{\partial \beta} - S_j = -K_{2j} \frac{\partial^2 u(\alpha_j)}{\partial \beta^2} + B_{\rho j} \frac{\partial^2 u(\alpha_j)}{\partial t^2} \quad (1.11)$$

$$D_{1j} \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial \beta^2} - K_{1j} \varphi_{1j} - D_{1\rho j} \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2} = -\frac{K_{1j}}{R} v(\alpha_j) - K_{1j} R \frac{\partial^2 v(\alpha_j)}{\partial \beta^2} + C_{1\rho j} \frac{\partial^2 v(\alpha_j)}{\partial t^2}$$

$$K_{2j} \varphi_{2j} + D_{2\rho j} \frac{\partial^2 \varphi_{2j}}{\partial t^2} = -K_{2j} \frac{\partial u(\alpha_j)}{\partial \beta} - C_{2\rho j} \frac{\partial^2 v(\alpha_j)}{\partial t^2} \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

Уравнения движения (1.10) и (1.11) содержат в качестве неизвестных следующие функции: u , v , φ_β , φ_{1j} , φ_{2j} , T_j , S_j ($j = 1, 2, \dots, m$).

2. Представим решение уравнений (1.10), (1.11) в виде тригонометрических рядов

$$u = \sum_n u_n(\alpha) \cos \lambda_n \beta \sin \omega_n t, \quad v = \sum_n v_n(\alpha) \sin \lambda_n \beta \sin \omega_n t$$

$$\varphi_\beta = \sum_n \varphi_{\beta n}(\alpha) \sin \lambda_n \beta \sin \omega_n t \quad (2.1)$$

$$\varphi_{1j} = \sum_n \varphi_{1jn} \sin \lambda_n \beta \sin \omega_n t, \quad \varphi_{2j} = \sum_n \varphi_{2jn} \sin \lambda_n \beta \sin \omega_n t$$

$$S_j = \sum_n S_{jn} \cos \lambda_n \beta \sin \omega_n t, \quad T_j = \sum_n T_{jn} \sin \lambda_n \beta \sin \omega_n t \quad (n = 1, 2, \dots, \infty)$$

где $\lambda_n = n/R$; n — число волн по окружности оболочки; $u_n(\alpha)$, $v_n(\alpha)$, $\varphi_{\beta n}(\alpha)$ — известные функции; φ_{1jn} , φ_{2jn} , S_{jn} , T_{jn} — неизвестные числа; ω_n — частота колебаний.

Подставляя (2.1) в (1.10) и (1.11), получим следующую однородную систему дифференциально-алгебраических уравнений:

$$B_{11} \frac{d^2 u_n}{d\alpha^2} - (B_{33} \lambda_n^2 - B_\rho \omega_n^2) u_n + B_{33} \lambda_n \frac{dv_n}{d\alpha} + \sum_{j=1}^m S_{jn} \delta(\alpha - \alpha_j) = 0 \quad (2.2)$$

$$-B_{33} \lambda_n \frac{du_n}{d\alpha} + B_{33} \frac{d^2 v_n}{d\alpha^2} - (K_\beta R^2 f_n^2 - B_\rho p_n \omega_n^2) v_n - (K_\beta R f_n - C_\rho \omega_n^2) \varphi_{\beta n} + \sum_{j=1}^m T_{jn} \delta(\alpha - \alpha_j) = 0 \quad (2.3)$$

$$(K_\beta R f_n - C_\rho \omega_n^2) v_n + (D_{22} \lambda_n^2 + K_\beta - D_\rho \omega_n^2) \varphi_{\beta n} = 0 \quad (2.4)$$

$$(-K_{1j} R f_n + C_{1\rho j} \omega_n^2) \varphi_{1jn} + C_{2\rho j} \omega_n^2 \varphi_{2jn} - T_{jn} = (K_{1j} R^2 f_n^2 - B_\rho p_n \omega_n^2) v_n(\alpha_j) \quad (2.5)$$

$$K_{2j} \lambda_n \varphi_{2jn} - S_{jn} = (K_{2j} \lambda_n^2 - B_\rho f_n \omega_n^2) u_n(\alpha_j) - (D_{1j} \lambda_n^2 + K_{1j} - D_{1\rho j} \omega_n^2) \varphi_{1jn} =$$

$$= (K_{1j} R f_n - C_{1\rho j} \omega_n^2) v_n(\alpha_j)$$

$$(K_{2j} - D_{2\rho j} \omega_n^2) \varphi_{2jn} = K_{2j} \lambda_n u_n(\alpha_j) + C_{2\rho j} \omega_n^2 v_n(\alpha_j) \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

$$f_n = (n^2 - 1)/R^2, \quad p_n = n^2 + 1$$

Из системы уравнений (2.5) найдем

$$S_{jn} = U_{jn}(\omega_n) u_n(\alpha_j) + W_{jn}(\omega_n) v_n(\alpha_j), \quad T_{jn} = W_{jn}(\omega_n) u_n(\alpha_j) + V_{jn}(\omega_n) v_n(\alpha_j) \quad (2.6)$$

$$U_{jn}(\omega_n) = \left(B_{\rho j} + \frac{K_{2j} D_{2\rho j} \lambda_n^2}{K_{2j} - D_{2\rho j} \omega_n^2} \right) \omega_n^2, \quad W_{jn}(\omega_n) = \frac{K_{2j} C_{2\rho j} \lambda_n}{K_{2j} - D_{2\rho j} \omega_n^2} \omega_n^2$$

$$V_{jn}(\omega_n) = B_\rho p_n \omega_n^2 - K_{1j} f_n R^2 + \frac{(K_{1j} f_n R - C_{1\rho j} \omega_n^2)^2}{D_{1j} \lambda_n^2 + K_{1j} - D_{1\rho j} \omega_n^2} + \frac{C_{2\rho j}^2 \omega_n^4}{K_{2j} - D_{2\rho j} \omega_n^2}$$

Подставляя (2.6) в (2.2) и (2.3) и исключая из (2.3) $\varphi_{\beta n}$ с помощью (2.4), получим

$$\frac{d^2 u_n}{d\alpha^2} = \frac{U_n(\omega_n)}{B_{11}} u_n - \frac{B_{33}}{B_{11}} \lambda_n \frac{dv_n}{d\alpha} - \sum_{j=1}^m \left[\frac{U_{jn}(\omega_n)}{B_{11}} u_n(\alpha_j) + \frac{W_{jn}(\omega_n)}{B_{11}} v_n(\alpha_j) \right] \delta(\alpha - \alpha_j)$$

$$\frac{d^2 v_n}{d\alpha^2} = -\frac{V_n(\omega_n)}{B_{33}} v_n + \lambda_n \frac{du_n}{d\alpha} - \sum_{j=1}^m \left[\frac{W_{jn}(\omega_n)}{B_{33}} u_n(\alpha_j) + \frac{V_{jn}(\omega_n)}{B_{33}} v_n(\alpha_j) \right] \delta(\alpha - \alpha_j)$$

$$(n = 1, 2, \dots, \infty) \quad (2.7)$$

$$U_n(\omega_n) = B_{33} \lambda_n^2 - B_\rho \omega_n^2$$

$$V_n(\omega_n) = B_\rho p_n \omega_n^2 - K_\beta R^2 f_n^2 + \frac{(C_\rho \omega_n^2 - K_\beta R f_n)^2}{D_{22} \lambda_n^2 + K_\beta - D_\rho \omega_n^2}$$

Уравнения (2.7) содержат в качестве неизвестных функции $u_n(\alpha)$, $v_n(\alpha)$ ($n = 1, 2, \dots, \infty$). Производя замену переменных по формулам

$$y_{1n} = u_n, \quad y_{2n} = v_n, \quad y_{3n} = du_n/d\alpha, \quad y_{4n} = dv_n/d\alpha \quad (n = 1, 2, \dots, \infty) \quad (2.8)$$

запишем вместо (2.7) следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dY_n}{d\alpha} = A_n Y_n + \sum_{j=1}^m B_{jn} Y_n(\alpha_j) \delta(\alpha - \alpha_j) \quad (n = 1, 2, \dots, \infty) \quad (2.9)$$

$$Y_n = \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ y_{3n} \\ y_{4n} \end{pmatrix}, \quad A_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{jn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 0 & 0 \\ b_{41} & b_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_{13} = a_{24} = 1, \quad a_{31} = U_n(\omega_n)/B_{11}, \quad a_{34} = -B_{33}\lambda_n/B_{11},$$

$$a_{42} = -V_n(\omega_n)/B_{33}, \quad a_{43} = \lambda_n, \quad b_{31} = -U_{jn}(\omega_n)/B_{11}, \quad b_{32} = -W_{jn}(\omega_n)/B_{11}, \quad b_{41} = -W_{jn}(\omega_n)/B_{33}$$

$$b_{42} = -V_{jn}(\omega_n)/B_{33}$$

Решение соответствующей однородной системы уравнений

$$\frac{dZ_n}{d\alpha} = A_n Z_n \quad (n = 1, 2, \dots, \infty) \quad (2.10)$$

имеет вид

$$Z_n = \Phi_n(\alpha) C_n \quad (n = 1, 2, \dots, \infty) \quad (2.11)$$

где $\Phi_n(\alpha)$ — фундаментальная матрица системы (2.10), C_n — вектор постоянных. Столбцы фундаментальной матрицы находятся по следующей формуле:

$$\Phi_{nk}(\alpha) = e^{\lambda_{nk}\alpha} I_{nk} \quad (k = 1, \dots, 4; n = 1, 2, \dots, \infty) \quad (2.12)$$

где λ_{nk} и I_{nk} — собственное значение и соответствующий ему собственный вектор матрицы A_n , определяемые численно. Отметим, что в случае комплексного собственного значения решение (2.12) заменяется двумя действительными, линейно независимыми: действительной и мнимой частями решения (2.12).

Следуя методу вариации произвольных постоянных, представим общее решение системы (29) в виде

$$\Phi_n(\alpha) = \Phi_n(\alpha) C_n(\alpha) \quad (n = 1, 2, \dots, \infty) \quad (2.13)$$

Вектор $C_n(\alpha)$ ($n = 1, 2, \dots, \infty$) определим из системы уравнений

$$\Phi_n(\alpha) \frac{dC_n(\alpha)}{d\alpha} = \sum_{j=1}^{m-1} B_{jn} Y_n(\alpha_j) \delta(\alpha - \alpha_j) \quad (n = 1, 2, \dots, \infty) \quad (2.14)$$

Умножая (2.14) слева на обратную матрицу $\Phi_n^{-1}(\alpha)$ и выполняя интегрирование, получим

$$C_n(\alpha) = \sum_{j=1}^{m-1} F_{jn} Y_n(\alpha_j) H(\alpha - \alpha_j) + C_n \quad (n = 1, 2, \dots, \infty) \quad (2.15)$$

где $F_{jn} = \Phi_n^{-1}(\alpha_j) B_{jn}$, H — функция Хевисайда, C_n — вектор постоянных интегрирования.

Подставим $C_n(\alpha)$ из (2.15) в (2.13). Тогда

$$Y_n(\alpha) = \Phi_n(\alpha) C_n + \Phi_n(\alpha) \sum_{j=1}^{m-1} F_{jn} Y_n(\alpha_j) H(\alpha - \alpha_j) \quad (n = 1, 2, \dots, \infty)^* \quad (2.16)$$

Найдем входящие под знак суммы в (2.16) векторы $Y_n(\alpha_j)$

($j = 1, 2, \dots, m-1$). Для этого положим в (2.16) $\alpha = \alpha_1$, затем $\alpha = \alpha_2$ и так до $\alpha = \alpha_{m-1}$. В результате получим $(m-1)$ уравнений вида

$$Y_n(\alpha_k) = \Phi_n(\alpha_k) C_n + \Phi_n(\alpha_k) \sum_{j=1}^k F_{jn} Y_n(\alpha_j) \quad (k = 1, 2, \dots, m-1; n=1, 2, \dots, \infty) \quad (2.17)$$

Последовательно решая систему (2.17) найдем

$$Y_n(\alpha) = R_{jn} C_n \quad (j = 1, 2, \dots, m-1; n = 1, 2, \dots, \infty) \quad (2.18)$$

$$R_{jn} = (E - B_{jn})^{-1} \Phi_n(\alpha_j) \left(E + \sum_{k=1}^{j-1} F_{kn} R_{kn} \right) \quad (j = 2, 3, \dots, m-1)$$

$$R_{1n} = (E - B_{1n})^{-1} \Phi_n(\alpha_1)$$

E — единичная матрица.

Подставляя векторы (2.18) в уравнение (2.16), получим

$$Y_n(\alpha) = \Phi_n(\alpha) \left[E + \sum_{j=1}^{m-1} F_{jn} R_{jn} H(\alpha - \alpha_j) \right] C_n \quad (n = 1, 2, \dots, \infty) \quad (2.19)$$

Выражение (2.19) представляет собой общее решение системы дифференциальных уравнений (2.9). Вектор постоянных интегрирования C_n , входящий в (2.19), найдем из граничных условий. Рассмотрим граничные условия, предполагающие отсутствие перемещений на левом краю оболочки и равенство мембранных усилий, возникающих в оболочке на правом краю, усилиям взаимодействия с торцевым шпангоутом. При $\alpha = 0$ имеем

$$u = 0; \quad v = 0 \quad (2.20)$$

а при $\alpha = l$:

$$N_\alpha = S_m, \quad N_{\alpha\beta} = T_m \quad (2.21)$$

где m — номер торцевого шпангоута.

Выразим в (2.21) мембранные усилия N_α и $N_{\alpha\beta}$ через деформации с помощью физических соотношений (1.2), а деформации — через перемещения, согласно равенствам (1.3). Тогда при $\alpha = l$ будем иметь

$$B_{11} du/d\alpha = S_m, \quad B_{33} (\partial u/\partial\beta + \partial v/\partial\alpha) = T_m \quad (2.22)$$

Подставляя ряды (2.1) в (2.20) и (2.22), получим граничные условия, соответствующие n -му члену разложения, т. е.

$$u_n(0) = 0, \quad v_n(0) = 0 \quad (2.23)$$

$$B_{11} \frac{du_n(l)}{d\alpha} = S_{mn}, \quad -B_{33} \lambda_n u_n(l) + B_{33} \frac{dv_n(l)}{d\alpha} = T_{mn} \quad (n = 1, 2, \dots, \infty) \quad (2.24)$$

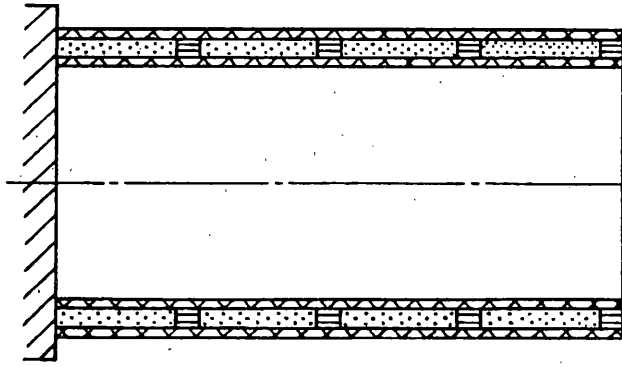
Исключим из (2.24) коэффициенты S_{mn} , T_{mn} с помощью уравнений (2.6), полагая в последних $j = m$ и $\alpha_m = l$. В результате получим

$$B_{11} du_n(l)/d\alpha = U_{mn}(\omega_n) u_n(l) + W_{mn}(\omega_n) v_n(l) \quad (2.25)$$

$$-B_{33} \lambda_n u_n(l) + B_{33} dv_n(l)/d\alpha = W_{mn}(\omega_n) u_n(l) + V_{mn}(\omega_n) v_n(l) \quad (n = 1, 2, \dots, \infty)$$

Выполним в (2.23) и (2.25) замену переменных согласно формулам (2.8) и запишем граничные условия в виде следующих матричных выражений:

$$G_n Y_n(0) = 0, \quad H_n Y_n(l) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, \infty) \quad (2.26)$$



где $Y_n(0)$, $Y_n(l)$ – векторы решения в точках $\alpha = 0, l$:

$$G_n = \begin{vmatrix} g_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad H_n = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & 0 \\ h_{21} & h_{22} & 0 & h_{24} \end{vmatrix}$$

$$g_{11} = g_{22} = 1, \quad h_{11} = U_{mn}(\omega_n), \quad h_{12} = W_{mn}(\omega_n), \quad h_{13} = -B_{11}$$

$$h_{21} = B_{33}\lambda_n + W_{mn}(\omega_n), \quad h_{22} = V_{mn}(\omega_n), \quad h_{24} = -B_{33}$$

Подставляя решение (2.19) в (2.26), получим следующую систему линейных однородных уравнений

$$J_n C_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, \infty) \quad (2.27)$$

$$J_n = \begin{vmatrix} J_{1n} \\ J_{2n} \end{vmatrix}$$

$$J_{1n} = G_n \Phi_n(0), \quad J_{2n} = H_n \Phi_n(l) \left(E + \sum_{j=1}^{m-1} F_{jn} R_{jn} \right)$$

где $\Phi_n(0)$ и $\Phi_n(l)$ – фундаментальные матрицы, элементы которых вычислены при $\alpha = 0$ и $\alpha = l$ соответственно. Подматрицы J_{1n} и J_{2n} имеют порядок 2×4 .

Условием существования отличных от нуля решений системы однородных линейных уравнений (2.27) является равенство нулю ее определителя, т. е.

$$\det J_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, \infty) \quad (2.28)$$

Выражение (2.28) представляет собой нелинейное алгебраическое уравнение относительно частот собственных колебаний оболочки ω_n ($n = 1, 2, \dots, \infty$). Корни этого уравнения для каждого значения n ($n = 1, 2, \dots, \infty$) находятся численно. В процессе поиска корней определяются собственные значения и собственные векторы матрицы A_n , вычисляются элементы матриц F_{jn} , R_{jn} ($j = 1, 2, \dots, m-1$), формируются матрицы G_n , H_n , $\Phi_n(0)$, $\Phi_n(l)$, J_{1n} , J_{2n} , J_n , вычисляется определитель матрицы J_n .

Описанный выше подход к определению собственных частот поперечных колебаний консольной композитной цилиндрической оболочки с кольцевыми ребрами жесткости реализован в вычислительной программе. Для нахождения корней нелинейного уравнения использован метод половинного деления [2]. Собственные значения и собственные векторы определяются методом двойной QR итерации [3].

3. В качестве примера найдем первую ($\omega_1 = 1$) частоту поперечных колебаний для трехслойной оболочки с четырьмя внутренними кольцевыми ребрами жесткости (фигура). Несущие слои одинаковой толщины образованы намоткой угле-

пластиковой ленты под углом $\pm 30^\circ$ к образующей. Пространство между несущими слоями заполнено пенопластом. Кольцевые ребра жесткости образованы намоткой углепластиковой ленты в пазы между блоками пенопласта, расположенными на одинаковом расстоянии друг от друга. Радиус оболочки 1 м, длина 4 м, толщина 0,022 м, толщина заполнителя 0,02 м, ширина поперечного сечения каждого из четырех ребер 0,03 м.

Расположим начальную поверхность на одинаковом расстоянии от внутренней и внешней поверхности цилиндра. Следуя [1], определим жесткостные и инерционные параметры оболочки и ребер следующим образом:

$$B_{11} = A_{11}(h - t), \quad B_{33} = A_{33}(h - t), \quad D_{22} = A_{22} \frac{h^3 - t^3}{12}$$

$$K_{\beta} = h^2 \left(\frac{h - t}{G_{\beta\gamma}} + \frac{t}{G_t} \right)^{-1}, \quad D_{1j} = E_j \frac{t^3 b_j}{12}, \quad K_{1j} = G_{1j} t b_j, \quad K_{2j} = G_{2j} t b_j$$

$$(j = 1, \dots, 4)$$

$$A_{11} = \sqrt{16} [9\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + 6(\bar{E}_1 \mu_{12} + 2G_{12})]$$

$$A_{22} = \sqrt{16} [\bar{E}_1 + 9\bar{E}_2 + 6(\bar{E}_1 \mu_{12} + 2G_{12})]$$

$$A_{33} = \sqrt{16} [3(\bar{E}_1 + \bar{E}_2 - \bar{E}_1 \mu_{12}) + 4G_{12}]$$

$$E_{1,2} = E_{1,2} / (1 - \mu_{12} \mu_{21})$$

$$B_{\rho} = \rho(h - t) + \rho_t t, \quad C_{\rho} = 0, \quad D_{\rho} = \rho \frac{h^3 - t^3}{12} + \rho_t \frac{t^3}{12}$$

$$B_{\rho j} = \rho_j t b_j, \quad C_{1\rho j} = C_{2\rho j} = 0, \quad D_{1\rho j} = \rho_j b_j t^3 / 12, \quad D_{2\rho j} = \rho_j t b_j^3 / 12 \quad (j = 1, \dots, 4)$$

Здесь h — толщина оболочки; t — толщина заполнителя; b_j — ширина j -го ребра; E_1, E_2 — модули упругости материала ленты вдоль и поперек волокон; G_{12} — модуль сдвига в плоскости ленты; $\mu_{12}; \mu_{21}$ — коэффициенты Пуассона; $G_{\beta\gamma}$ — трансверсальный модуль сдвига; E_j — модуль упругости материала j -го ребра при растяжении—сжатии вдоль оси; G_{1j}, G_{2j} — модули сдвига в сечении j -го кольца; G_t — модуль сдвига легкого заполнителя; ρ — плотность материала несущих слоев; ρ_t — плотность заполнителя; ρ_j — плотность материала j -го ребра.

Углепластиковая лента имеет следующие упругие характеристики: $E_1 = 142,8$ ГПа, $E_2 = 9,13$ ГПа, $G_{12} = 5,49$ ГПа, $G_{\beta\gamma} = 2,2$ ГПа, $\mu_{12} = 0,02$, $\mu_{21} = 0,32$. У материала кольцевых ребер $E_j = 142,8$ ГПа; $G_{1j} = G_{2j} = 2,2$ ГПа ($j = 1, \dots, 4$), у заполнителя $G_t = 0,01$ ГПа. Плотность материала ленты $\rho = 1550$ кг/м³, кольцевых ребер $\rho_j = 1550$ кг/м³ ($j = 1, \dots, 4$), заполнителя $\rho_t = 100$ кг/м³. Для рассматриваемой конструкции первая частота поперечных колебаний $\omega_1 = 654$ 1/с.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
2. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1970. 664 с.
3. Уилкинсон Дж. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970.

Москва

Поступила в редакцию
14.XII.1992