

УДК 539.3:534.1

© 1995 г. А. Г. КОЛПАКОВ

## ЗАДАЧА УСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ СТРУКТУР УСРЕДНЕННОЕ ОПИСАНИЕ

Проводится усреднение задачи устойчивости трехмерного линейно-упругого тела с начальными напряжениями [1]. Более простая по сравнению с геометрически нелинейной теорией [2] исходная модель делает получаемые результаты обозримыми и пригодными для практических приложений. Приводимые примеры ориентированы на учет начальных напряжений в искусственных конструкциях.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается неоднородное тело периодической структуры (фиг. 1). Ячейку периодичности (ЯП) структуры обозначим через  $P_\varepsilon$ . Механические характеристики рассматриваемого тела меняются с периодом  $P_\varepsilon$ , на что далее будет указывать индекс  $\varepsilon$ .

Пусть к телу приложены массовые силы  $\lambda F$ , вызывающие в нем напряжения  $\lambda \sigma_{ij}^\varepsilon$ . Множитель  $\lambda$  — параметр нагружения, по мере роста которого у тела может появиться смежная форма равновесия [1], описываемая дополнительными перемещениями  $u^\varepsilon$ . Краевые задачи для определения первоначальных  $v^\varepsilon$  и дополнительных перемещений имеют следующий вид [1]:

$$L_\varepsilon(0, 0) v^\varepsilon = \lambda F \text{ в } Q, v^\varepsilon(x) = 0 \text{ на } \partial Q \quad (1.1)$$

$$L_\varepsilon(\sigma^\varepsilon, \lambda_\varepsilon) u^\varepsilon = 0 \text{ в } Q, u^\varepsilon(x) = 0 \text{ на } \partial Q \quad (1.2)$$

$$L_\varepsilon(\sigma^\varepsilon, \lambda) u = [(a_{ijkl}^\varepsilon + \lambda \sigma_{ik}^\varepsilon \delta_{jl}) u_{k,l}], L_\varepsilon(0, 0) u = [a_{ijkl}^\varepsilon u_{k,l}]$$

Для периодической среды [3, 4]  $a_{ijkl}^\varepsilon(x) = a_{ijkl}(x/\varepsilon)$ ,  $\sigma_{ij}^\varepsilon = \sigma_{ij}^\varepsilon(x, x/\varepsilon)$  и указанные функции периодичны по  $y = x/\varepsilon$  с ЯП  $P_1 = \varepsilon^{-1} P_\varepsilon = \{x/\varepsilon: x \in P_\varepsilon\}$ ,  $\delta_{ij}$  — символ Кронеккера.

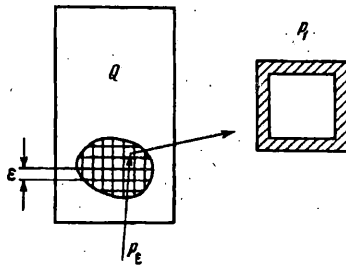
*Замечание 1.1.* Краевые условия на части границы могут быть заданы в напряжениях, например [1]  $(a_{ijkl}^\varepsilon + \lambda \sigma_{ik}^\varepsilon \delta_{jl}) u_{k,l}^\varepsilon n_j = 0$ .

При стандартных условиях на  $a_{ijkl}^\varepsilon$ ,  $F$  и  $Q$  задача (1.1) однозначно разрешима [3]. В связи с чем  $\{\sigma_{ij}^\varepsilon\}$  далее будут рассматриваться как известные быстروпериодические функции. Тогда задачу (1.2) можно рассмотреть независимо от задачи (1.1).

**2. Асимптотическое разложение в задаче (1.2).** Представление оператора  $L_\varepsilon(\sigma^\varepsilon, \lambda)$  из (1.2) в виде суммы оператора  $L_\varepsilon(0, 0)$  соответствующего ненапряженному телу и оператора, соответствующего начальным напряжениям [1], не приводит к упрощениям. В частности, усредненный оператор не имеет аналогичного вида. Это связано с неаддитивностью процедуры усреднения [5] и неприменимостью, в общем случае, промежуточного усреднения [6—9]. По этой причине усредняться должно исходное уравнение (1.2).

В публикуемой работе рассматривается потеря устойчивости по макроскопическим формам, т. е. ищутся условия появления смежных форм

<sup>1</sup> См. также Колпаков А. Г. Mechanics of composite frameworks // Шестой Конгресс по теор. и прикл. мех. Варна, 1989. Резюме.



Фиг. 1

равновесия, характеризующиеся ненулевыми макроскопическими перемещениями, сопровождающиеся малыми деформациями ЯП. Это условие приводит к выбору формального асимптотического разложения решения в виде двухмасштабного разложения теории усреднения [4]:

$$\lambda_\varepsilon = \lambda^{(0)} + \varepsilon \lambda^{(1)} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \lambda^{(k)} \quad (2.1)$$

$$u^\varepsilon = u^{(0)}(x) + \varepsilon u^{(1)}(x, y) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u^{(k)}(x, y) \quad (2.2)$$

где функции  $u^{(k)}(x, y)$  периодичны по  $y$  с ЯП  $P_\varepsilon$ .

*Замечание 2.1.* В рассматриваемых структурах возможны и локальные формы потери устойчивости — в пределах одной или нескольких ЯП. Для учета таких случаев правая часть (2.2) следует дополнить членом вида  $\Phi(y)$ , где  $\Phi(y) \rightarrow 0$  при  $|y| \rightarrow \infty$  и  $y \notin \varepsilon^{-1} \partial Q$  (последнее условие связано с необходимостью учета границы тела). Механически интересные смешанные формы потери устойчивости — локальные по одним и макроскопические по другим переменным. Учет этих форм может быть осуществлен путем введения в разложение (2.2) соответствующих функций.

Введем условие нормировки ненулевого решения задачи (1.2):

$$\|u^\varepsilon\|_{L_2(Q)} = 1 \quad (2.3)$$

Очевидно,  $u^\varepsilon = 0$  в (1.2) соответствует основной форме равновесия, а (2.3) выделяет смежные формы.

Формальный анализ рассматриваемой задачи проводится по стандартной схеме, см. например [6—9], в связи с чем излагаются только его основные моменты.

Для функций вида  $u(x, y)$ ,  $y = x/\varepsilon$  оператор дифференцирования  $\partial/\partial x_i$  представим в виде  $\partial/\partial x_i + \varepsilon^{-1} \partial/\partial y_i$  [3, 4]. Пользуясь этим представлением, подставив (2.1), (2.2) в (1.2) и приравняв выражения при одинаковых степенях  $\varepsilon$  получаем

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left[ (a_{ijkl}(y) + \lambda^{(0)} b_{ijkl}(x, y)) \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial y_i} \right] = 0 \quad \text{при } \varepsilon^{-2} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y_j} \left[ (a_{ijkl}(y) + \lambda^{(0)} b_{ijkl}(x, y)) \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial y_i} \right] + \frac{\partial}{\partial y_j} (a_{ijkl}(y) + \\ & + \lambda^{(0)} b_{ijkl}(x, y)) \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial x_i} + \left\{ \lambda^{(1)} \frac{\partial}{\partial y_j} \left( b_{ijkl}(x, y) \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial y_i} \right) \right\} = 0 \quad \text{при } \varepsilon^{-1} \end{aligned}$$

$$b_{ijkl}(x, y) = \sigma_{ik}^\varepsilon(x, y) \delta_{jl}$$

Выражение в фигурных скобках равно нулю и приводится для полноты выкладок.

Введем условие К (аналог условия А из [10]):  $\lambda^{(0)}$  не является собственным числом ячеечной задачи (ЯЗ)

$$\frac{\partial}{\partial y_j} [(a_{ijkl}(y) + \lambda b_{ijkl}(x, y)) \frac{\partial \mathcal{M}_k}{\partial y_i}] = 0 \text{ в } P_1 \quad (2.6)$$

$$\langle \mathcal{M} \rangle = 0, \mathcal{M} \in H(P_1)$$

Через  $H(P_1)$  обозначено замыкание по норме  $H^1(P_1)$  пространства периодических на  $P_1$  функций [4]. В (2.6) переменная  $x$  «заморожена» [4].

Решение (2.5) с использованием решения ЯЗ  $\mathcal{M}^{pq}$  представимо в виде [3, 4]:

$$u^{(1)} = \mathcal{M}^{pq}(x, y, \lambda^{(0)}) \frac{\partial u_p^{(0)}(x)}{\partial x_q} \quad (2.7)$$

где  $\mathcal{M}_{(y)}^{pq}$  — решение ЯЗ

$$\frac{\partial}{\partial y_j} [(a_{ijkl}(y) + \lambda^{(0)} b_{ijkl}(x, y)) \frac{\partial \mathcal{M}_k^{pq}}{\partial y_i}] + (a_{ijpq}(y) + \lambda^{(0)} b_{ijpq}(x, y)) = 0 \text{ в } P_1$$

$$\langle \mathcal{M}^{pq} \rangle = 0, \mathcal{M}^{pq} \in H(P_1)$$

При  $\varepsilon^\circ$  получаем с учетом (2.7):

$$\frac{\partial}{\partial x_j} [(a_{ijkl}(y) + \lambda^{(0)} b_{ijkl}(x, y)) \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial x_i}] + \frac{\partial}{\partial x_j} [(a_{ijkl}(y) + \lambda^{(0)} b_{ijkl}(x, y)) \frac{\partial \mathcal{M}_k^{pq}}{\partial y_i} \frac{\partial u_p^{(0)}}{\partial x_q}] + \quad (2.8)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y_j} [(a_{ijkl}(y) + \lambda^{(0)} b_{ijkl}(x, y)) \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathcal{M}_k^{pq} \frac{\partial u_p^{(0)}}{\partial x_q})] + \{\lambda^{(2)} \frac{\partial}{\partial y_j} b_{ijkl}(x, y) \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial y_i} +$$

$$+ \lambda^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_j} b_{ijkl}(x, y) \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial y_i} + \lambda^{(0)} \frac{\partial}{\partial y_j} b_{ijkl}(x, y) \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial x_i}\} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y_j} [(a_{ijkl}(y) + \lambda^{(0)} b_{ijkl}(x, y)) \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial y_i}] = 0$$

Предпоследний член в (2.8) имеет нулевое среднее в силу периодичности  $b_{ijkl}$  по  $y$  и соотношения [3, 4]:

$$\int_Q f(x, x/\varepsilon) dx \rightarrow \int_Q \langle f \rangle(x) dx \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0; \langle f \rangle(x) = \frac{1}{\text{mes } P_1} \int_{P_1} f(x, y) dy \quad (2.9)$$

Уравнение (2.8) относительно  $u^{(2)}$  при выполнении условия К разрешимо, если среднее свободного члена равно нулю [3, 4]. Это условие дает уравнение относительно  $u^{(0)}$ , т. е. искомую усредненную задачу потери устойчивости ( $jx = \partial/\partial x_j$ ;  $ly = \partial/\partial y_j$ ):

$$(A_{ijkl}(\lambda^{(0)}) u_{k, lx}^{(0)})_{, jx} = 0 \text{ в } Q; u^{(0)}(x) = 0 \text{ на } \partial Q \quad (2.10)$$

$$A_{ijkl}(\lambda) = \langle (a_{ijkl}(y) + \lambda b_{ijkl}(x, y)) + (a_{ijpq}(y) + \lambda b_{ijpq}(x, y)) \mathcal{M}_{k, ly}^{pq}(x, y, \lambda) \rangle = \\ = \langle (a_{ijkl}(y) + \lambda \sigma_{ik}^\varepsilon(x, y) \delta_{jl}) + (a_{ijpq}(y) + \lambda \sigma_{ik}^\varepsilon(x, y) \delta_{jl}) \mathcal{M}_{k, ly}^{pq}(x, y, \lambda) \rangle \quad (2.11)$$

Отметим, что  $\mathcal{M}^{pq}$  зависит от  $\lambda$ .

Таким образом, для напряженных сред процедура усреднения должна применяться непосредственно к исходной задаче. Для усредненной задачи в общем случае характерна нелинейная зависимость от параметра нагружения. В общем случае

$$A_{ijkl}(\lambda) \neq A_{ijkl}(0) + \lambda \sigma_{ik} \delta_{jl} \quad (2.12)$$

где  $A_{ijkl}(0)$  — усредненные упругие постоянные для тела без начальных напряжений (при  $\lambda = 0$ ),  $\{\sigma_{ik}\}$  — напряжения, определяемые из решения задачи (2.12) с  $A_{ijkl}(\lambda) = A_{ijkl}(0)$ , т. е. усредненной задачи для тела без начальных напряжений.

3. Случай малых начальных напряжений. В [6, 7] обращено внимание на случай малых начальных напряжений, позволяющий выделить линейные по  $\lambda$  члены в разложении  $A_{ijkl}(\lambda)$ .

В рассматриваемом случае аналог условия малости начальных напряжений из [6, 7] имеет вид

$$\|\lambda^{(0)}\sigma_{ik}^e\| \ll \|a_{ijkl}\|_{L_\infty(\Omega)} \sim 1 \quad (3.1)$$

Это есть условие малости критической нагрузки по сравнению с упругими постоянными материала конструкции.

*Замечание 3.1.* Напряжения в искусственных конструкциях ограничены пределом пропорциональности материала, который не превышает 0,01 от модуля Юнга (часто — менее) [11]. В силу чего в проводимое рассмотрение попадут практически все встречающиеся в приложениях случаи упругой потери устойчивости искусственных структур.

Решение ЯЗ  $N^{pq}$  в рассматриваемом случае можно искать в виде ряда

$$N^{pq} = N^{pq} + \delta N^{1pq} + \dots \quad (3.2)$$

по малому параметру  $\delta$ , имеющему при выполнении условия К ненулевой радиус сходимости в  $H(P_1)$ . Малый параметр  $\delta$  есть характерная величина  $\lambda^0\sigma_{ij}^e \ll 1$ . Подстановка (3.2) в ЯЗ (при этом  $\lambda^{(0)}\sigma_{ij}^e$  заменяется на  $\delta(\lambda^{(0)}b_{ijkl}/\delta)$ ) дает уравнение для определения  $N^{1pq}$ :

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left[ a_{ijkl}(y) \frac{\partial N_k^{1pq}}{\partial y_l} + \lambda^{(0)} b_{ijkl}(x, y) \frac{\partial (N_k^{pq} + y_p \delta_{qk})}{\partial y_l} \right] = 0 \text{ в } P_1 \quad (3.3)$$

$$\langle N^{1pq} \rangle = 0, \quad N^{1pq} \in H(P_1)$$

где  $N^{pq}$  — решение ЯЗ при  $b_{ijkl} = 0$ , т. е. ЯЗ для тела без напряжений.

Формула (2.11) после подстановки в нее (3.2) дает

$$A_{ijkl}(\lambda) = A_{ijkl}(0) + \delta\lambda \langle b_{ijkl} \rangle - \delta\lambda \langle b_{pqmnl} N_{p, qy}^{ij} N_{m, ny}^{kl} + a_{pqmnl} N_{p, qy}^{ij} N_{m, ny}^{kl} + a_{pqmnl} N_{m, ny}^{ij} N_{p, qy}^{kl} \rangle$$

а использование (3.3) позволяет исключить из (3.4) функцию  $N^{ijkl}$  и приводит к формуле

$$A_{ijkl}(\lambda) = A_{ijkl}(0) + \delta\lambda \sigma_{ik}^e \delta_{jl} + \delta\lambda \langle \sigma_{qn}^e N_{p, ny}^{kl} N_{p, qy}^{ij} + \sigma_{qn}^e N_{k, qy}^{ij} + \sigma_{nj}^e N_{l, ny}^{kl} \rangle \quad (3.5)$$

где  $\{\sigma_{ik}^e\}$  — усредненные напряжения.

Для дальнейшего упрощения формулы (3.5) примем во внимание, что в рассматриваемом случае начальные напряжения определяются из решения задачи теории упругости (1.1):

$$\sigma_{ij, j}^e = F_i \text{ в } Q \quad (3.6)$$

Замена производной  $\partial/\partial x_j$  на  $\partial/x_j + \varepsilon^{-1}\partial/\partial y_j$  в (3.6) после приравнивания членов при  $\varepsilon^{-1}$  дает

$$\partial\sigma_{ij}^e(x, y)/\partial y_j = 0 \quad (3.7)$$

Это же равенство можно получить дифференцированием известного [3, 4, 12] выражения  $\sigma_{ij}^e(x, y)$  через  $N^{pq}(y)$  и  $v^{(0)}(x)$ .

Рассмотрим интеграл

$$\text{mes } P_1 \langle \sigma_{q_l}^e N_{k, y}^U \rangle = \int_{P_1} \sigma_{q_l}^e \frac{\partial N_k^U}{\partial y_l} dy = \int_{P_1} \frac{\partial \sigma_{q_l}^e}{\partial y_q} N_k^U dy + \int_{\partial P_1} \sigma_{q_l}^e n_q N_k^U dy \quad (3.8)$$

Первый интеграл в правой части (3.8) равен нулю в силу (3.7) (используется симметрия  $\sigma_{q_l}^e$  по  $lq$ ), второй — в силу периодичности функций  $N^U$ ,  $\sigma_{q_l}^e$  и противоположности векторов нормали на противоположных гранях ЯП.

В результате получаем формулу

$$A_{ijkl}(\lambda) \approx A_{ijkl}(0) + \delta\lambda \sigma_{ik} \delta_{jl} + \delta\lambda \mathcal{L}_{ijkl}(\sigma_{qm}^e, N^U) \quad (3.9)$$

$$\mathcal{L}_{ijkl}(\sigma_{qm}^e, N^U) = \langle \sigma_{qm}^e N_{p, my}^U \rangle \quad (3.10)$$

Выражение (3.9) состоит из двух частей:  $A_{ijkl}(0) + \delta\lambda \sigma_{ik} \delta_{jl}$  — соответствует «промежуточному» усреднению, см. (2.12), когда исходное тело усредняется без учета начальных напряжений, а затем для учета начальных напряжений применяется прямой аналог формулы [1] для однородных тел. Второй член —  $\delta\lambda \mathcal{L}_{ijkl}(\sigma_{qm}^e, N^U)$  учитывает наличие неоднородной структуры. Для однородных тел он обращается в нуль, поскольку если  $a_{ijkl}$  не зависит от  $x/\varepsilon$ , то решение ЯЗ  $N^{pq} = 0$ .

Итак, структурная неоднородность в случае малых начальных напряжений описывается членом  $\mathcal{L}_{ijkl}(\sigma_{qm}^e, N^U)$ , вычисляемым на основании решения  $N^{pq}$  ЯЗ для ненапряженного тела.

**4. Тонкостенные структуры.** Многие искусственные сооружения являются тонкостенными структурами (рамными, фермовыми и т. п.), находящимися в напряженном основном состоянии (как правило, под действием собственного веса). Для этих типов сооружений выполняется условие малости начальных напряжений, и практический интерес представляет задача потери устойчивости при малых в смысле (3.1) нагрузках. Для этих же структур разработаны методы сведения ЯЗ теории упругости к ЯЗ теории балок/пластинок, подробнее см. [13, 14]. Для решения ЯЗ последнего типа применимы методы расчета конечномерных конструкций [1, 15]. В совокупности это позволяет продвинуться в рассматриваемом случае вплоть до получения прикладных формул для расчета  $\mathcal{L}_{ijkl}$ .

Решение ЯЗ методами [13, 14] удобно проводить относительно функции  $W^U = N^U + u_\varepsilon$ , имеющей смысл смещений при равной  $\delta_{ij}$  средней деформации ЯП. ЯЗ для  $W^{pq}$  имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left[ a_{ijkl}(y) \frac{\partial W_k^{pq}}{\partial y_l} \right] = 0 \text{ в } P_1 \quad (4.1)$$

где  $W^{pq} - u_\varepsilon e_q$ ,  $a_{ijkl}(y) \partial W_k^{pq} / \partial y_l |n_j|$  периодичны на  $P_1$ .

Вводя обобщенные перемещения узлов конструкций  $V^U$  [1] и записывая вытекающие из (4.1) условия равновесия и периодичности (подробнее см. [13, 14]), приходим к задаче вида

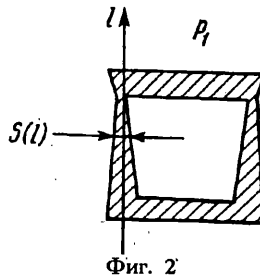
$$T \{U^U\} = 0 \text{ во внутренних узлах} \quad (4.2)$$

$$(t \{U^U\})_{a+} = (t \{U^U\})_{a-} \text{ в граничных узлах} \quad (4.3)$$

$$\sum_{a \in A} (U_a^U - u_{ia} e_i) = 0 \quad (4.4)$$

где  $A$  — множество узлов,  $T$  — матрица жесткостей для внутренних узлов,  $t$  — матрица, описывающая граничные условия, индексы  $a+$  и  $a-$  помечают узлы, лежащие на противоположных гранях ЯП.

Решив систему линейных уравнений (4.2) — (4.4), на основании применявшихся



при моделировании задачи теории упругости конечномерной задачей гипотез можно восстановить перемещения  $W^{\psi}$  в элементах ячеечной конструкции (ЯК) и вычислить  $\mathcal{L}_{ijkl}$  по формуле

$$\mathcal{L}_{ijkl}(\sigma_{mq}^e, N^{pq}) = \langle \sigma_{qm}^e W_{p, my}^{kl} W_{p, qy}^{\psi} - \sigma_{ql}^e W_{k, qy}^{\psi} - \sigma_{jm}^e W_{l, my}^{kl} + \sigma_{jl}^e \delta_{ik} \rangle \quad (4.5)$$

получающейся из (3.10) подстановкой  $N^{\psi} = W^{\psi} - u e_j$ .

*Замечание 4.1.* Равенство  $N^{\psi} = 0$  и, следовательно  $\mathcal{L}_{ijkl} = 0$ , имеет место в случае, когда локальные (истинные) деформации элементов ЯК совпадают с макроскопической деформацией  $\delta_{mi} \delta_{nj}$ . В качестве примера рассмотрим прямоугольный балочный каркас (фиг. 1), находящийся под действием собственного веса. Для него  $\mathcal{L}_{ijkl} = 0$  и следовательно, применимы формулы для однородных материалов — «промежуточное» усреднение. Роль структуры при этом не проявляется. В то же время для каркаса, образованного стержнями переменного сечения (фиг. 2), решение ЯЗ имеет вид (приводятся выражения для локальных деформаций)

$$N_{1, 1y}^{11} = 1 / (S(l) \int_0^l dt / S(t))$$

$$N_{2, 2y}^{11} = N_{3, 3y}^{11} = -\nu N_{1, 1y}^{11}; N_{i, iy}^{11} = 0 \text{ при } i \neq j$$

где  $S(l)$  — площадь поперечного сечения стержня как функция координаты  $l$  вдоль его оси,  $\nu$  — коэффициент Пуассона материала стержня.

Даваемые приведенными формулами деформации не совпадают с макроскопическими деформациями  $\delta_{ii} \delta_{jj}$ . Их невязка  $\Delta_{ij}$  равна

$$\Delta_{11} = N_{1, 1y}^{11} - 1 = \left[ S(l) \int_0^l dt / S(t) \right]^{-1} - 1 \quad (4.6)$$

$$\Delta_{22} = \Delta_{33} = -\nu \Delta_{11}; \Delta_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j$$

Остальные  $N^{\psi} = 0$  при  $ij \neq 11$  — совпадают с макроскопическими. Рассматриваемый каркас геометрически не жесткий. Введение диагональных стержней в качестве связей не меняет результата, т. к. во вводимых связях  $\Delta_{ij} = 0$ .

Фермовыми конструкциями, по-видимому, исчерпываются примеры конструкций, для которых обращение  $\mathcal{L}_{ijkl}$  в нуль достаточно типично. Для элементов рамных конструкций характерны изгибные деформации элементов, несовместные с макроскопической деформацией. В двух- и трехмерных структурах локальные деформации также, как правило, не совпадают с макроскопическими.

*Замечание 4.2.* Локальные напряжения  $\{\sigma_{ij}^e\}$  могут быть выражены через усредненные напряжения  $\{\sigma_{mn}\}$  в виде [3, 4, 12]:

$$\sigma_{ij}^e = (a_{ijkl}(y) + a_{jpra}(y) N_{p, qy}^{kl}(y)) J_{klmn} \sigma_{mn}, \{J_{klmn}\} = \{A_{ijkl}(0)\}^{-1} \quad (4.7)$$

**5. Фермовая конструкция.** В качестве примера получим формулу для вы-

числения  $\mathcal{L}_{ijkl}$  для фермовой конструкции, элементами которой являются стержни, работающие на растяжение — сжатие. Последнее значит, что в связанной с  $I$ -м стержнем системе координат  $\{l, n, \tau\}_I$  (ось  $l$  совпадает с осью стержня;  $n, \tau$  перпендикулярны  $l$ ) начальные напряжения имеют вид

$$\sigma_{ll}^e = N_I / S_I, \quad \sigma_{mn}^e = 0 \quad \text{при } mn \neq ll \quad (5.1)$$

а деформации имеют вид [16, 17]. Отметим, что в формулу (4.5) входят именно деформации

$$W_{l,l}^{11} = e_I, \quad W_{n,n}^{11} W_{\tau,\tau}^{11} = -\nu e_I, \quad W_{p,q}^{11} = 0 \quad \text{при } p \neq q \quad (5.2)$$

где  $N_I, e_I$  — осевые усилия и деформации (предварительные),  $S_I$  — площадь поперечного сечения стержня. Подстановка (5.1), (5.2) в (4.5) дает

$$\mathcal{L}_{ijkl}(\sigma_{mn}^e, N^{pq}) = \frac{1}{\text{mes } P_1} \sum_{I=1}^N N_I [e_I^{kl} e_I^{lj} - \gamma_I^k \gamma_I^l (e_I^{lj} + e_I^{kl}) + \gamma_I^l \gamma_I^k \delta_{lk}] L_I \quad (5.3)$$

где  $N$  — число стержней в ячеечной конструкции,  $L_I$  — длина  $I$ -го стержня,  $\{\gamma_I^k\}$  — направляющие косинусы  $I$ -го стержня. Индексы в (5.3) — из ЯЗ (4.2) — (4.4).

Формула (5.3) — для стержней постоянного поперечного сечения. Она легко обобщается на случай стержней переменного сечения.

С использованием замечания 4.2 из (5.1) можно исключить локальные усилия  $N_I$ . Это можно сделать подставив (4.7) в (4.5), что дает формулу вида  $\mathcal{L}_{ijkl}(\sigma_{mn}^e, N^{pq}) = \mathcal{L}_{ijklrs}(N^{pq}) \sigma_{rs}$  и затем воспользоваться (5.2). Приведем окончательный результат

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ijklrs}(N^{pq}) = & \frac{1}{\text{mes } P_1} \sum_{I=1}^N E_I [e_I^{rs} e_I^{kl} e_I^{lj} - \\ & - \gamma_I^k \gamma_I^l e_I^{rs} (e_I^{lj} + e_I^{kl}) + \gamma_I^l \gamma_I^k e_I^{rs} \delta_{lk}] L_I J_{rsmn} \end{aligned} \quad (5.4)$$

где  $E_I$  — жесткость  $I$ -го стержня на растяжение.

Осевая деформация дается формулой

$$e_I^{rs} = (U_{I+}^{rs} - U_{I-}^{rs}) \gamma_I / L_I, \quad \gamma_I = (\gamma_I^1, \gamma_I^2, \gamma_I^3)$$

где  $U_{I+}^{rs}, U_{I-}^{rs}$  — перемещения концов  $I$ -го стержня, определяемые из решения ЯЗ (4.2) — (4.4).

*Пример.* Вернемся к рассмотрению каркаса, изображенного на фиг. 2. С учетом (4.6) для него формула (5.4) для усредненных предварительных напряжений вида  $\sigma_{ij} = \sigma_{11} \delta_{il} \delta_{lj}$  дает

$$\mathcal{L}_{ijkl} = 0 \quad \text{при } ijkl \neq 1111$$

$$\mathcal{L}_{1111} = \int_0^1 \{(\Delta_{11})^3 - 2(\Delta_{11})^2 + \Delta_{11}\} dl \frac{\sigma_{11}}{L}$$

В рассмотренном случае интегрирование производится только по вертикальным стержням (см. замечание 4.1). Выполняя действия, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{1111} &= \int_0^1 \Delta_{11} (\Delta_{11} - 1)^2 dl \frac{\sigma_{11}}{L} = \\ &= \int_0^1 \left[ (S(l) \int_0^1 dl / S(l))^{-1} - 1 \right] \left[ (S(l) \int_0^1 dl / S(l))^{-1} - 2 \right]^2 dl \frac{\sigma_{11}}{L} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Таким образом, в статье выполнен переход от задачи (1.1), (1.2) к усредненной задаче

$$(A_{ijkl}(0) v_{k, lx})_{, jx} = \mu F_l \text{ в } Q, v(x) = 0 \text{ на } \partial Q$$

$$(A_{ijkl}(\lambda) u_{k, lx})_{, jx} = 0 \text{ в } Q, u(x) = 0 \text{ на } \partial Q$$

где  $\mu \in (0, 1]$  — удельное содержание материала в ЯП ( $\mu = 1$  если конструкция монолитная,  $\mu < 1$  если имеются поры). При этом функции  $u^\varepsilon \approx u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)} + \dots$  удовлетворяет (1.2) с точностью  $\varepsilon$ . В предположении сходимости рядов (2.1), (2.2) при выполнении условия К из (2.3) следует  $u^{(0)} \neq 0$  и наоборот, откуда вытекает близость критических нагрузок в исходной и усредненной задачах. Изложенные результаты носят характер формального асимптотического разложения и требуют математического обоснования сходимости рядов (2.1), (2.2).

Проведенное рассмотрение относится к трехмерным телам, все размеры которых имеют сравнимый порядок. Для конструкции малой толщины (пластинки) или диаметра (балки) могут быть получены двумерные и одномерные задачи устойчивости. При этом, как оказывается, существенную роль играет порядок начальных напряжений по сравнению с толщиной/диаметром тела [18].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Наука, 1987. 542 с.
2. *Партон В. З., Каламкаргов А. Л.* Об уравнениях устойчивости трехмерных тел и композитов регулярной структуры//ДАН СССР. 1988. Т. 300. № 2. С. 308—311.
3. *Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G.* Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North-Holland Publ. Comp., 1978. 700 p.
4. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
5. *Marcellini P.* Un teorema di passaggio al limite per la somma di finzioni convesse//Boll. Unione. Mat. Ital. 1975. V. 11. № 4. P. 107—124.
6. *Колпаков А. Г.* Жесткостные характеристики напряженных неоднородных тел//Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 3. С. 66—73.
7. *Kolpakov A. G.* On dependence of velocity of elastic waves in composite media on initial stresses//Second World Congr. on Computational Mechanics. 1990. Stuttgart. FRG. Extended Abstract of Lectures. P. 453—456.
8. *Kolpakov A. G.* Dependence of velocity of elastic waves on initial stresses for laminated media//4th. Intern. Congr. on Recent Advances in Structural Dynamics. 1991. ISVR. University of Southampton. England. Works. in Progress. P. 136—142.
9. *Kolpakov A. G.* On the dependence of the velocity of elastic waves in composite media on initial stresses//Computers & Structures. 1992. V. 44. № 1/2. P. 97—101.
10. *Колпаков А. Г.* Усреднение в задаче изгиба и колебаний напряженных неоднородных пластинок//ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 1. С. 60—67.
11. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела, М.: Наука. 1979. 744 с.
12. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С.* Математические задачи теории сильно неоднородных сред. М.: Наука. 1990. 311 с.
13. *Колпаков А. Г.* К определению усредненных характеристик упругих каркасов//ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 969—977.
14. *Колпаков А. Г.* Усредненные характеристики термоупругих каркасов//Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 6. С. 53—61.
15. *Хог Э., Чой К., Комков В.* Анализ чувствительности при проектировании конструкций. М.: Мир, 1988. 428 с.
16. *Колпаков А. Г.* К вычислению характеристик тонких упругих стержней периодического строения//ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 3. С. 440—448.
17. *Аннин Б. Д., Колпаков А. Г., Каламкаргов А. Л., Партон В. З.* Расчет и проектирование композиционных материалов и элементов конструкций. Новосибирск: Наука, 1993. 256 с.
18. *Колпаков А. Г.* К задаче теории балок с начальными напряжениями//ПМТФ. 1992. № 6. С. 139—144.

Новосибирск

Поступила в редакцию  
9. III. 1993