МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1995

УДК 539.3

©1995 г. Ю. И. МИНДОЛИН, А. И. УЗДАЛЁВ

АНИЗОТРОПНАЯ ПЛАСТИНКА ПОД ВЛИЯНИЕМ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ И СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА

Необходимым условием решения несвязанной задачи термоупругости для тела является определение температурного поля путем интегрирования уравнения теплопроводности и удовлетворение условиям на границе. В статье получено частное решение уравнения теплопроводности для бесконечной анизотропной пластинки, соответствующее влиянию стационарных распределенных источников тепла. Определено также решение при наличии в пластинке сосредоточенных источников и стоков тепла. В частном случае действия лишь одного сосредоточенного источника тепла выведена формула так называемого фундаментального решения для анизотропной пластинки. Понятие фундаментального решения краевой задачи лежит в основе широко используемого в настоящее время в механике твердого тела численного метода граничных элементов. Полученная формула (1.25) устраняет неправильность приведенного в [1] фундаментального решения ([1], формулы (2.129), (2.130)), которое заимствовано авторами из [2]. Ошибка, очевидно, проявляется в невозможности предельного перехода от анизотропии материала самого общего вида к ортотропии (коэффициент теплопроводности $k_{12} = 0$). Решение для ортотропной пластинки получено в [3, 4].

Вывод фундаментального решения приведен двумя способами: методом интегральных преобразований Фурье и путем замены переменных как в классических функциях, так и в обобщенных [5], и последующему приведению уравнения к виду, решение которого известно.

1. Бесконечная анизотропная пластинка подвержена воздействию распределенных и стационарных источников тепла интенсивности $W(x, y)$. Предположим, что основания пластинки теплоизолированы и свойства материала не зависят от температуры.

Функция температур $T(x, y)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности [6]:

$$\nabla_1^2 T(x, y) = -W(x, y) \tag{1.1}$$

$$\nabla_1^2 = k_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2k_{12}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{1.2}$$

где k_{ij} — коэффициенты теплопроводности. Температура и ее частные производные по переменным x, y равны нулю на бесконечности.

Определим частное решение уравнения (1.1), соответствующее интенсивности распределенных источников или стоков тепла $W(x, y)$. Рассмотрим также случай действия сосредоточенных источников и стоков тепла.

Решение уравнения (1.1) находим методом двумерных преобразований Фурье по переменным x и y [7]. Так как трансформанты Фурье функций $T(x, y)$ и $W(x, y)$ равны

$$\overline{T} = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} T(x, y)\exp(i(\xi x + \eta y))\,dxdy, \tag{1.3}$$

$$\overline{W} = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} W(x, y)\exp(i(\xi x + \eta y))\,dxdy$$

то из уравнения (1.1) получаем

$$\overline{T}(\xi, \eta) = \overline{W}(\xi, \eta)\,\overline{g}(\xi, \eta) \tag{1.4}$$

$$\overline{g}(\xi, \eta) = (k_{11}\xi^2 + 2k_{12}\xi\eta + k_{22}\eta^2)^{-1} \tag{1.5}$$

где ξ и η — параметры преобразования Фурье.

Функция температур T выражается через трансформанту (1.4) по формуле обращения

$$T(x, y) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{W}(\xi, \eta)\,\overline{g}(\xi, \eta) \exp((-i(x\xi + y\eta))\, d\xi d\eta \tag{1.6}$$

На основании формулы свертки [7] последнее выражение принимает вид

$$T(x, y) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} W(\alpha, \beta)\, g(x - \alpha, y - \beta)\, d\alpha d\beta \tag{1.7}$$

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{g}(\xi, \eta) \exp(-i(\xi x + \eta y))\, d\xi d\eta \tag{1.8}$$

Таким образом, распределение температур выражается по формуле (1.7) через функцию $g(x, y)$. Для ее определения проинтегрируем соотношение (1.8). Представим подынтегральную функцию в виде

$$\overline{q}(\xi, \eta) \exp(-i(\xi x + \eta y)) = \\ = \frac{\cos(\xi x + \eta y) - i \sin(\xi x + \eta y)}{k_{11}(\xi + a_1\eta)(\xi + a_2\eta)}, \tag{1.9}$$

$$a_1, a_2 = a \mp ib, \quad a = \frac{k_{12}}{k_{11}}, \quad b = \frac{1}{k_{11}}(k_{11}k_{22} - k_{12}^2)^{1/2} \tag{1.10}$$

где знак минус соответствует постоянной a_1, а знак плюс — постоянной a_2. Числитель в формуле (1.9) преобразуется с использованием известных формул тригонометрии, а выражение в знаменателе переписывается так:

$$[(\xi + a_1\eta)(\xi + a_2\eta)]^{-1} = \frac{1}{(a_2 - a_1)\eta}\left(\frac{\xi - a_1\eta}{\xi^2 - a_1^2\eta^2} - \frac{\xi - a_2\eta}{\xi^2 - a_2^2\eta^2}\right) \tag{1.11}$$

Данное представление подынтегральной функции (1.8) дает возможность использовать следующие свойства: 1) двойной интеграл с бесконечными пределами равен нулю, если подынтегральная функция является нечетной хотя бы по одной из переменных интегрирования; 2) если функция $f(\xi, \eta)$ — четная и по переменной ξ, и по η, то

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta)\, d\xi d\eta = 4\iint\limits_{0}^{\infty} f(\xi, \eta)\, d\xi d\eta$$

Формула (1.8) для функции $g(x, y)$ принимает вид

$$g(x, y) = -\frac{2}{\pi k_{11}(a_2 - a_1)}\iint\limits_{0}^{\infty} [\psi_1(\xi, \eta) \sin\xi x \sin\eta y + \\ + \psi_2(\xi, \eta)\cos\xi x \cos\eta y]\, d\xi d\eta \tag{1.12}$$

$$\psi_1(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{2}\left(\frac{\xi}{\eta}\right)\frac{\delta_n}{\xi^2 - a_n^2\eta^2}, \quad \psi_2(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{2}\frac{a_n\delta_n}{\xi^2 - a_n^2\eta^2} \quad (\delta_1 = 1,\ \delta_2 = -1) \tag{1.13}$$

Функцию ψ_1 разложим на элементарные дроби

$$\psi_1 = \sum_{n=1}^{2} \frac{\delta_n}{2a_n\eta^2} \left(\frac{\xi}{\xi - a_n\eta} - \frac{\xi}{\xi + a_n\eta} \right)$$

Так как $\xi/(\xi \mp a) = 1 \pm a_n\eta/(\xi \mp a_n\eta)$, то

$$\psi_1 = \sum_{n=1}^{2} \frac{\delta_n}{2\eta} \left(\frac{1}{\xi - a_n\eta} + \frac{1}{\xi + a_n\eta} \right)$$

Знаменатели простейших дробей являются комплексными функциями ξ и η. Освободимся от комплексности путем умножения числителя и знаменателя на сопряженные величины. Аналогично преобразуется функция $\psi_2(\xi, \eta)$.

Окончательный вид функций ψ_1 и ψ_2 таков

$$\psi_1(\xi, \eta), \psi_2(\xi, \eta) = -ib \left[\frac{1}{(\xi - a\eta)^2 + (b\eta)^2} \mp \frac{1}{(\xi + a\eta)^2 + (b\eta)^2} \right] \quad (1.14)$$

Подставляя их в подынтегральное выражение (1.12) и интегрируя по переменной ξ, находим [8]:

$$g(x, y) = \frac{1}{k_{11}b} \int_0^\infty \frac{1}{\eta} e^{-x\eta b} \cos(xa - y)\,\eta d\eta \quad (1.15)$$

Чтобы взять полученный расходящийся интеграл, используется следующий прием [9]. Известна формула интеграла с бесконечным пределом [8]:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha\eta} \cos \beta\eta d\eta = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}$$

причем правую часть можно представить иначе

$$\int_0^\infty e^{-\alpha\eta} \cos \beta\eta d\eta = \frac{\partial}{\partial\alpha} \ln \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

Умножим левую и правую части последнего соотношения на $d\alpha$ и проинтегрируем. В результате получаем

$$\int_0^\infty \frac{1}{\eta} e^{-\alpha\eta} \cos \beta\eta d\eta = -\ln \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + C \quad (1.16)$$

где C — постоянная величина, не влияющая на выбор частного решения.

Таким образом, в расходящемся интеграле (1.16) удается выделить главную часть в смысле Коши. Согласно полученной формуле вычисляется интеграл по переменной η, определяющий функцию $g(x, y)$:

$$g(x, y) = -\frac{1}{k_{11}b} \ln \left[(xb)^2 + (xa - y)^2\right]^{1/2} \quad (1.17)$$

После подстановки соотношений (1.10) в подкоренное выражение (1.17) функция $g(x, y)$ запишется так:

$$g(x, y) = -\frac{1}{k_{11}b} (\ln R - \ln \sqrt{k_{11}}) \quad (1.18)$$

$$R(x, y) = (k_{22}x^2 - 2k_{12}xy + k_{11}y^2)^{1/2} \quad (1.19)$$

Второе слагаемое формулы (1.18) можно не учитывать, так как оно имеет постоянное значение.

Решение, определяющее функцию температур и соответствующее функции интенсивности источников и стоков тепла W, находится по формулам (1.7), (1.18), (1.19):

$$T = -\frac{1}{2\pi k_{11} b}\iint_{-\infty}^{\infty} W(\alpha, \beta) \ln R (x-\alpha, y-\beta)\, d\alpha d\beta \tag{1.20}$$

Заметим, что суммарная интенсивность источников и стоков тепла равна нулю.

Если в точках $x = a_\nu$, $y = b_\nu$ бесконечной анизотропной пластинки действует n сосредоточенных источников и стоков тепла интенсивности W_ν, то в формуле (1.20) W принимается в виде

$$W(x, y) = \sum_{\nu=1}^{n} W_\nu \delta(x - a_\nu)\, \delta(y - b_\nu) \tag{1.21}$$

где δ — символ функции Дирака.

На основании известного из теории обобщенных функций [5] соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\, \delta(\alpha - a_1)\, d\alpha = f(a_1) \tag{1.22}$$

вид функции температур таков

$$T(x, y) = -\frac{1}{2\pi (k_{11}k_{22} - k_{12}^2)^{1/2}} \sum_{\nu=1}^{n} W_\nu \ln R (x - a_\nu, y - b_\nu) \tag{1.23}$$

$$R(x - a_\nu, y - b_\nu) = (k_{22}(x - a_\nu)^2 - 2k_{12}(x - a_\nu)(y - b_\nu) + k_{11}(y - b_\nu)^2)^{1/2} \tag{1.24}$$

При действии одного источника тепла ($n = 1$) единичной интенсивности, приложенного в точке $x = a_1$, $y = b_1$, решение принято называть фундаментальным. Оно следует из (1.23), (1.24) и принимает вид

$$T(x, y) = \frac{1}{2\pi (k_{11}k_{22} - k_{12}^2)^{1/2}} \ln \frac{1}{R(x - a_1, y - b_1)} \tag{1.25}$$

Необходимо отметить, что фундаментальное решение уравнения (1.1) при $W(x, y) = \delta(x - a)\, \delta(y - b)$ приведено в [1], но содержит ошибку (см. формулы (2.129), (2.130)).

2. Для того, чтобы утверждение об ошибке имело большее обоснование, приведем вывод той же формулы (1.24), (1.25), иным способом — путем замены в уравнении

$$\nabla_1^2 T(x, y) = -\delta(x - a_1)\, \delta(y - b_1) \tag{2.1}$$

независимых переменных x, y на α, β по формулам

$$\alpha = (x \cos\varphi + y \sin\varphi)/\sqrt{p}, \quad \beta = (y\cos\varphi - x\sin\varphi)/\sqrt{q} \tag{2.2}$$

Оператор ∇_1^2 в уравнении (2.1) определяется по формуле (1.2), а параметры преобразования φ, p, q выбираются таким образом, чтобы оператор ∇_1^2 принял в новых переменных α, β вид оператора Лапласа

$$\nabla_1^2 = \partial^2/\partial\alpha^2 + \partial^2/\partial\beta^2 \tag{2.3}$$

Значения параметров определяются по формулам

$$\operatorname{tg} 2\varphi = 2k_{12}/(k_{11} - k_{22}) \tag{2.4}$$

$$p = k_{11}\cos^2\varphi + k_{22}\sin^2\varphi + k_{12}\sin 2\varphi \tag{2.5}$$

$$q = k_{11}\sin^2\varphi + k_{22}\cos^2\varphi - k_{12}\sin 2\varphi$$

Результат подстановки параметра φ в правую часть формул (2.5) следующий:

$$p, q = 1/2\ [(k_{11} + k_{22}) \pm ((k_{11} - k_{22})^2 + 4k_{12}^2)^{1/2}] \tag{2.6}$$

Таким образом, преобразование независимых переменных (2.2) с параметрами φ, p и q, определенными по формулам (2.4) и (2.6), дает возможность выполнить преобразование левой части уравнения (2.1) к оператору Лапласа, производимому над функцией T в новых переменных α и β.

Перейдем к замене переменных правой части уравнения (2.1) по формулам (2.2). Ее можно осуществить в виде двух последовательных преобразований. Первое преобразование производит переход от осей x, y к новых осям u, v путем поворота на угол φ:

$$u = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \qquad v = y\cos\varphi - x\sin\varphi \tag{2.7}$$

При втором преобразовании переходим от осей u, v к осям α, β путем изменения масштаба длин, т. е.

$$\alpha = u/\sqrt{p}, \qquad \beta = v/\sqrt{q} \tag{2.8}$$

Преобразование (2.7), соответствующее повороту осей, не изменяет вид функций Дирака

$$\delta(x - a_1) = \delta(u - a_u), \qquad \delta(y - b_1) = \delta(v - b_v) \tag{2.9}$$

где a_u, b_v — координаты точки приложения источника тепла в системе u, v. При втором преобразовании (2.8) координаты точки приложения источника равны

$$a_\alpha = a_u/\sqrt{p}, \qquad b_\beta = b_v/\sqrt{q} \tag{2.10}$$

Из формул (2.8) и (2.10) следует

$$\delta(u - a_u) = \delta(\sqrt{p}\,(\alpha - a_\alpha)) = \delta(\alpha - a_\alpha)/\sqrt{p} \tag{2.11}$$

$$\delta(v - b_v) = \delta(\sqrt{q}\,(\beta - b_\beta)) = \delta(\beta - b_\beta)/\sqrt{q}$$

В соотношениях (2.11) использовано одно из свойств функций Дирака [4]. Результат двух преобразований (2.9) и (2.11) таков:

$$\delta(x - a_1) = \delta(\alpha - a_\alpha)/\sqrt{p}, \qquad \delta(y - b_1) = \delta(\beta - b_\beta)/\sqrt{q} \tag{2.12}$$

Окончательный вид преобразованного к новым переменным α, β уравнения (2.1) с учетом (2.3) и (2.12) следующий:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial\beta^2} = -\frac{1}{\sqrt{pq}}\,\delta(\alpha - a_\alpha)\,\delta(\beta - b_\beta) \tag{2.13}$$

Данному уравнению удовлетворяет фундаментальное решение (см. [4], табл. 4.1):

$$T(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi\sqrt{pq}} \ln \frac{1}{[(\alpha - a_\alpha)^2 + (\beta - b_\beta)^2]^{1/2}} \tag{2.14}$$

Используя формулы преобразования (2.2), запищем это решение в исходных переменных x, y:

$$T(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{pq}} \left(\ln \frac{1}{R(x - a_1, y - b_1)} + \ln\sqrt{pq}\right) \tag{2.15}$$

Так как $pq = k_{11}k_{22} - k_{12}^2$ является постоянной величиной, то второе слагаемое можно отбросить, и тогда решение (2.15) совпадает с соответствующим решением (1.25), полученным методом интегральных преобразований. Здесь функция $R(x - a_1, y - b_1)$ определяется по формуле (1.24) при $\nu = 1$.

Таким образом, установлен закон изменения температур в анизотропной пластинке под влиянием как распределенных, так и сосредоточенных источников или стоков тепла. Двумя способами выведено фундаментальное решение для пластины из анизотропного материала, устраняющее неправильность, допущенную в известной ранее публикации [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
2. *Chang Y. P., Kang C. S., Chen David J.* The use of fundamental Green's functions for the solution of problems of heat conduction in anisotropic media//Intern. J. Heat Mass Transfer. 1973. V. 16. No. 10. P. 1905—1918.
3. *Уздалев А. И.* Температурные напряжения в ортотропной пластинке под влиянием распределенных и сосредоточенных источников тепла//Инж. ж. МТТ. 1966. № 3. С. 160—163.
4. *Бреббия К., Уокер С.* Применение метода граничных элементов в технике. М.: Мир, 1982. 248 с.
5. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Изд-во МГУ, 1984. 207 с.
6. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.
7. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 668 с.
8. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
9. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 364 с.

Саратов

Поступила в редакцию
23.III.1993