МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1995

УДК 539.3

© 1995 г. П. А. ЖИЛИН, Е. А. ИВАНОВА

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ФУНКЦИОНАЛ ЭНЕРГИИ В ТЕОРИИ ПЛАСТИН ТИПА РЕЙССНЕРА

Известно, что решение задачи изгиба пластин по теории типа Рейсснера содержит в себе быстроменяющиеся функции типа погранслоя. Поскольку точные аналитические решения в теории пластин могут быть построены только в исключительных случаях, то большое значение приобретают численные процедуры, большинство из которых основаны на использовании вариационных методов. С чисто формальной точки зрения принцип минимума энергии в теории пластин типа Рейсснера выглядит весьма привлекательно, так как сводится к минимизации выпуклого функционала, содержащего только первые производные от искомых функций. Однако этот функционал с точки зрения численной реализации имеет серьезный недостаток, заключающийся в том, что в функционал входят величины разного асимптотического порядка. Фактически решение краевой задачи устроено так, что асимптотически главный член в функционале исчезает, а между искомыми функциями возникают связи, которые в главных членах асимптотических разложений должны быть выполнены точно. Поскольку при численной реализации это, вообще говоря, недостижимо, то могут возникнуть значительные погрешности не только количественного, но и качественного характера. Именно поэтому на практике часто отдают предпочтение теории пластин Кирхгофа. При этом некоторые величины вычисляются с заведомыми ошибками, не стремящимися к нулю при стремлении относительной толщины пластины к нулю. Ниже будет показано, что можно сформулировать такой функционал, который соединяет в себе достоинства функционала Кирхгофа, но позволяет находить все искомые функции с ошибкой $O(h^2)$ в сравнении с единицей.

В основе предлагаемого подхода лежит тот факт, что полное решение краевой задачи включает в себя медленно меняющиеся решения, проникающие в глубь области пластины, и функции типа погранслоя, быстро затухающие при удалении от границы. Уравнение для погранслоя допускает простое асимптотическое решение, содержащее медленно меняющиеся функции, которые определяются только на контуре пластины. Поэтому исходный функционал можно переформулировать (с учетом строения погранслойной части) так, что окончательно в него входят только медленно меняющиеся функции, что резко облегчает процедуру численного решения.

1. Сводка основных уравнений теории пластин типа Рейсснера. Рассматривается задача изгиба пластины под действием распределенной поперечной нагрузки $p(x, y)$. Основные уравнения используются в форме, принятой в [1]. Для описания напряженно-деформированного состояния пластины введем следующие величины: поперечный прогиб w, вектор углов поворота $\boldsymbol{\psi}$, вектор поперечных сил $\mathbf{N}$, тензор моментов $\mathbf{M}$. Введенные величины связаны с перемещениями и напряжениями в трехмерной теории упругости по формулам

$$hw = \langle \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\rangle,\quad h^3\boldsymbol{\psi} = 12\langle \mathbf{a}\cdot\mathbf{u}z\rangle,\quad \mathbf{N} = \langle \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n}\rangle \tag{1.1}$$

$$\mathbf{M} = \langle \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{a}z\rangle,\quad \mathbf{a} = \mathbf{E} - \mathbf{nn},\quad \langle f\rangle = \int\limits_{-h/2}^{h/2} f dz$$

Здесь $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\tau}$ — вектор перемещений и тензор напряжений в трехмерной теории, h — толщина пластины, $\mathbf{n}$ — вектор единичной нормали к плоскости пластины, $\mathbf{E}$ — единичный тензор. Полная система уравнений включает в себя:

уравнения равновесия

$$\nabla\cdot\mathbf{N} + \rho hp = 0,\quad \nabla\cdot\mathbf{M} - \mathbf{N} = 0 \tag{1.2}$$

соотношения упругости

$$\mathbf{N} = Gh\Gamma\boldsymbol{\gamma},\quad \mathbf{M} = D\,[(1-\mu)\,\boldsymbol{\varkappa} + \mu\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{a}] \tag{1.3}$$

геометрические соотношения

$$\boldsymbol{\gamma} = \nabla w + \boldsymbol{\psi},\quad \boldsymbol{\varkappa} = (1/2)\,(\nabla\boldsymbol{\psi} + \nabla\boldsymbol{\psi}^T) \tag{1.4}$$

Здесь $\boldsymbol{\gamma}$ — вектор деформации поперечного сдвига, $\boldsymbol{\varkappa}$ — тензор изгиба-кручения, $D = (1/12)\,Eh^3/(1-\mu^2)$ — жесткость на изгиб, $Gh\Gamma$ — жесткость на сдвиг, $G = (1/2)\,E/(1+\mu)$, Γ — коэффициент поперечного сдвига, μ — коэффициент Пуассона, ρ — объемная плотность массы.

Кинематические граничные условия имеют вид

$$w|_c = w^*,\quad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\psi}|_c = \psi_\nu^*,\quad \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\psi}|_c = \psi_\tau^* \tag{1.5}$$

Силовые граничные условия представим в форме

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{N}|_c = N_\nu^*,\quad \boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{M}\cdot\boldsymbol{\nu}|_c = M_\nu^*,\quad \boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{M}\cdot\boldsymbol{\tau}|_c = M_\tau^* \tag{1.6}$$

Здесь ψ_ν^* и ψ_τ^* — углы поворота вокруг касательной и нормали к контуру, N_ν^* — перерезывающая сила, M_ν^* — изгибающий момент, M_τ^* — крутящий момент, $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\tau}$ — векторы единичной внешней нормали и единичной касательной к контуру пластины, причем векторы $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n}$ образуют правую тройку.

Введением потенциалов Φ и F уравнения изгиба пластины приводятся к более удобной форме [1]:

$$D\Delta\Delta\Phi + \rho h p = 0,\quad h^2\Delta F - 12\Gamma F = 0 \tag{1.7}$$

Величины, характеризующие напряженно-деформированное состояние пластины, выражаются через потенциалы Φ и F по формулам

$$\begin{gathered} w = -\Phi + h^2\Delta\Phi/[6\Gamma(1-\mu)],\quad \boldsymbol{\psi} = \nabla\Phi + \nabla F\times\mathbf{n} \\ \mathbf{M} = D\,[(1-\mu)\,\nabla\nabla\Phi + \mu\Delta\Phi\mathbf{a} + (1/2)\,(1-\mu)\,(\nabla\nabla F\times\mathbf{n} - \mathbf{n}\times\nabla\nabla F)] \\ \mathbf{N} = D\nabla\Delta\Phi + Gh\Gamma\nabla F\times\mathbf{n} \end{gathered} \tag{1.8}$$

Далее все внешние воздействия предполагаются медленно меняющимися функциями координат. Тогда функция Φ описывает проникающие во всю область решения и является медленно меняющейся функцией, т. е. ее производные по любому направлению имеют такой же асимптотический порядок, как и сама функция. Функция F является решением уравнения с малым параметром при старшей производной [2] и, следовательно, представляет собой функцию типа погранслоя, быстро убывающую при удалении от границы внутрь области и медленно меняющуюся вдоль границы области. Таким образом, функция F описывает затухающие при удалении от границы области решения и для нее справедлива асимптотическая оценка: $\partial F/\partial\nu \sim h^{-1}F$, $\partial F/\partial\tau \sim F$, где ν, τ — локальная система координат, введенная на контуре области. Оценим асимптотические порядки проникающего потенциала Φ и погранслойного потенциала F, считая внешние нагрузки имеющими порядок $O(1)$: $\Phi \sim h^{-3}$, $F \sim h^{-1}$.

2. Формулировка приближенных уравнений и граничных условий в теории пластин типа Рейсснера. Сравнение с теорией Кирхгофа. Проведем асимптотическое исследование уравнения для погранслойного потенциала. Поскольку решение второго уравнения из (1.7) быстро затухает при удалении от границы и на расстоянии $2h$ от края пластины практически равно нулю, то для записи этого уравнения допустимо использовать введенную на контуре пластины локальную систему координат, при условии что радиус кривизны контура $R(\tau)$ заметно больше $2h$. Второе уравнение из (1.7) в локальной системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\nu^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial F}{\partial\nu} + \frac{\partial^2 F}{\partial\tau^2} - \frac{12\Gamma}{h^2}F = 0\quad (\nu < 0) \tag{2.1}$$

Введем обозначение $\varepsilon = h/\delta$ $(\delta = \sqrt{12\Gamma})$ и сделаем замену переменных $\nu = \varepsilon\eta$. В новых переменных уравнение (2.1) примет вид

$$\partial^2 F/\partial\eta^2 + (\varepsilon/R)\,\partial F/\partial\eta + \varepsilon^2\partial^2 F/\partial\tau^2 - F = 0 \tag{2.2}$$

Будем искать решение уравнения (2.2) в виде ряда по степеням ε:

$$F(\eta,\tau) = F_0(\eta,\tau) + \varepsilon F_1(\eta,\tau) + \ldots \tag{2.3}$$

Подставив выражение (2.3) в уравнение (2.2) и приравняв нулю коэффициенты при разных степенях ε, получим

$$\partial^2 F_0/\partial\eta^2 - F_0 = 0,\quad \partial^2 F_1/\partial\eta^2 - F_1 = -(1/R)\,\partial F_0/\partial\eta \tag{2.4}$$

$$\partial^2 F_i/\partial\eta^2 - F_i = -(1/R)\,\partial F_{i-1}/\partial\eta - \partial^2 F_{i-2}/\partial\tau^2 \quad (i = 2, 3, \ldots)$$

Решение системы уравнений (2.4) имеет вид

$$F_0(\eta,\tau) = f_0(\tau)\exp(\eta),\quad F_1(\eta,\tau) = (f_1(\tau) - (1/2)\,f_0(\tau)\,\eta/R)\exp(\eta)$$

$$F_i(\eta,\tau) = f_i(\eta,\tau)\exp(\eta)\quad (i = 2, 3, \ldots) \tag{2.5}$$

Введя обозначение $f(\tau) = f_0(\tau) + \varepsilon f_1(\tau)$, согласно формулам (2.3) и (2.5), будем иметь

$$F(\eta,\tau) = [f(\tau)((1 - 1/2\,\varepsilon\eta/R) + O(\varepsilon^2))]\exp(\eta) \tag{2.6}$$

Таким образом, погранслойный потенциал F имеет асимптотическое представление

$$F(\nu,\tau) = f(\tau)\,[1 - (1/2)\,\nu/R]\exp(\delta\nu/h)\quad (\nu < 0) \tag{2.7}$$

где $f(\tau)$ — некоторая функция, зависящая от координаты на контуре области и определяемая из граничных условий. Зависимость погранслойного потенциала от координаты по нормали к контуру области в формуле (2.7) выражена явным образом. Использование формулы (2.7) для погранслойного потенциала позволяет решить задачу об изгибе пластины с асимптотической ошибкой порядка $O(h^2)$ в сравнении с единицей. Поэтому не имеет смысла удерживать члены более высокого порядка малости в выражениях для w, ψ, N, M.

Таким образом, приближенное решение задачи об изгибе пластины сводится к интегрированию первого уравнения из (1.7) для проникающего потенциала и определению функции $f(\tau)$, характеризующей, согласно формуле (2.7), изменение погранслойного потенциала вдоль контура пластины. Величины, характеризующие напряженно-деформированное состояние пластины, имеют асимптотические представления

$$w = -\Phi,\quad \psi = \nabla\Phi - \frac{\delta}{h} f(\tau)\,\tau\exp\left(\frac{\delta}{h}\nu\right)$$

$$\mathrm{N} = D\nabla\Delta\Phi + Gh\Gamma\left[\left(\left(1 - \frac{\nu}{2R}\right) f'(\tau) + \frac{\nu R'}{2R^2} f(\tau)\right)\nu - \right. \tag{2.8}$$

$$\left. - \frac{\delta}{h}\left(1 - \frac{\nu}{2R} - \frac{h}{2R\delta}\right) f(\tau)\,\tau\right]\exp\left(\frac{\delta}{h}\nu\right)$$

$$\mathrm{M} = D\,[(1-\mu)\nabla\nabla\Phi + \mu\Delta\Phi\mathrm{a}] + \left[D(1-\mu)\frac{\delta}{h} f'(\tau)(\nu\nu - \tau\tau) - \right.$$

$$\left. - Gh\Gamma\left(1 - \frac{\nu}{2R} - \frac{2h}{R\delta}\right) f(\tau)(\nu\tau + \tau\nu)\right]\exp\left(\frac{\delta}{h}\nu\right)$$

Кинематические граничные условия имеют вид

$$-\Phi|_c = w^*,\quad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right|_c = \psi_\nu^*,\quad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\right|_c - \frac{\delta}{h} f(\tau) = \psi_\tau^* \tag{2.9}$$

Силовые граничные условия запишем так

$$D\frac{\partial\Delta\Phi}{\partial\nu}\Big|_c + Gh\Gamma f'(\tau) = N_\nu^* \tag{2.10}$$

$$D\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\nu^2} + \frac{\mu}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} + \mu\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2}\right)\Big|_c + D(1-\mu)\frac{\delta}{h}f'(\tau) = M_\nu^*$$

$$D(1-\mu)\frac{\partial^2\Phi}{\partial\nu\partial\tau}\Big|_c - Gh\Gamma\left[1-\frac{2h}{R\delta}\right]f(\tau) = M_\tau^*$$

Заметим что, как видно из формул (2.8), поперечные силы и крутящие моменты в главных членах зависят от погранслойного потенциала. Это означает, что по теории Кирхгофа, где погранслойный потенциал не учитывается, поперечные силы и крутящие моменты вблизи границы области вычисляются с ошибкой порядка $O(1)$. Исключение составляют три типа граничных условий, при которых главный член погранслойного потенциала тождественно равен нулю: кинематические граничные условия, если $\psi_\tau^* = -\partial w^*/\partial\tau$; первое и третье условия из (2.9) и второе условие из (2.10), если $\psi_\tau^* = -\partial w^*/\partial\tau$; первое и второе условия из (2.9) и третье условие из (2.10), если $M_\tau^* = D(1-\mu)[\partial\psi_\nu^*/\partial\tau + (1/R)\,\partial w^*/\partial\tau]$.

Таким образом, несмотря на то, что теория Кирхгофа позволяет определять главные члены поперечного прогиба, углов поворота и изгибающих моментов, мнение о том, что теория Кирхгофа имеет асимптотическую точность $O(h)$ в сравнении с главным членом, требует уточнения, так как поперечные силы и крутящие моменты в общем случае вблизи границы области вычисляются с ошибкой в главных членах.

Подчеркнем, что предлагаемая приближенная постановка задачи отличается от теории Кирхгофа тем, что в ней учитывается деформация поперечного сдвига вблизи границы области

$$\gamma = -(\delta/h)f(\tau)\,\tau\exp(\delta\nu/h)\quad(\nu<0) \tag{2.11}$$

что позволяет в общем случае удовлетворить всем трем граничным условиям.

3. Вариационная формулировка задачи об изгибе пластины в теории типа Рейсснера. Энергия изгиба пластины в теории типа Рейсснера имеет вид

$$\Pi(w,\psi) = \int\limits_{(\Delta S)}\left[\frac{1}{2}(\mathbf{M}\cdot\cdot\,\varkappa + \mathbf{N}\cdot\gamma) - \rho h p w\right]dS - \tag{3.1}$$

$$-\int\limits_C [M_\nu^*\psi_\nu + M_\tau^*\psi_\tau + N_\nu^* w]\,dC$$

Здесь тензор моментов $\mathbf{M}$, вектор поперечных сил $\mathbf{N}$, тензор изгиба-кручения $\varkappa$, вектор деформации поперечного сдвига γ выражены через вектор углов поворота ψ и поперечный прогиб w по формулам (1.3), (1.4). Функционал потенциальной энергии (3.1) принимает минимальное значение на равновесных конфигурациях, при условии, что w и ψ удовлетворяют кинематическим граничным условиям (1.5), если таковые имеются.

Непосредственное использование функционала энергии (3.1) в численных расчетах малопригодно, поскольку он зависит от функций, быстро меняющихся вблизи границы области. Аппроксимация вектора углов поворота ψ медленно меняющимися координатными функциями, как это обычно делается в методе конечных элементов и других численных методах, приводит к значительным погрешностям, уменьшить которые можно только путем сгущения координатной сетки. Поэтому эффективное использование функционала энергии (3.1) в численных расчетах требует весьма специального выбора координатных функций для аппроксимации вектора углов поворота вблизи границы области. Избежать затруднений, связанных с выбором координатных функций, можно в том случае, если погранслойный эффект будет учтен в явном виде.

4. Формулировка модифицированного функционала энергии в теории пластин типа Рейсснера. Для того, чтобы учесть погранслойный эффект в явном виде, предлагается преобразовать функционал энергии (3.1) следующим образом:

сформулировать функционал энергии (3.1) через проникающий и погранслойный потенциалы, что позволит разделить быстро и медленно меняющиеся функции;

интеграл по площади от той части функционала, которая содержит погранслойный потенциал, при помощи теоремы о дивергенции преобразовать в контурный интеграл;

подставить в функционал выражение (2.7) для погранслойного потенциала. Это позволит сформулировать функционал энергии, в котором изменение погранслойного потенциала по нормали к контуру области учтено в явном виде.

Модифицированный функционал энергии задан на множестве функций $\Phi(x, y)$, $f(\tau)$, удовлетворяющих следующим условиям: функции $\Phi(x, y)$ определены, непрерывны и дважды непрерывно дифференцируемы в замкнутой области $\bar{S} = S + C$; функции $f(\tau)$ определены, непрерывны и непрерывно дифференцируемы на кривой C; функции $\Phi(x, y), f(\tau)$ удовлетворяют кинематическим граничным условиям (2.9), если таковые имеются

$$\Pi^*(\Phi, f) = \int_{(\Delta S)} \left[D \left(\frac{1}{2} (\Delta\Phi)^2 + (1-\mu) \left[\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \right) \right] \right) + \rho h p \Phi \right] dS +$$

$$+ \int_C \left[D (1-\mu) \frac{\delta}{h} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} f'(\tau) + \frac{1}{R} \frac{\partial\Phi}{\partial\tau} f(\tau) \right) + Gh\Gamma \left(\frac{\delta}{2h} - \frac{1}{R} \right) f^2(\tau) + \right.$$

$$\left. + N_\nu^* \Phi - M_\nu^* \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} - M_\tau^* \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\tau} - \frac{\delta}{h} f(\tau) \right) \right] dC \qquad (4.1)$$

Уравнения Эйлера для модифицированного функционала энергии (4.1) совпадают с первым уравнением из (1.7) и силовыми граничными условиями (2.10). На равновесных конфигурациях модифицированный функционал энергии (4.1) принимает, в общем случае, стационарное значение. Однако в большинстве «нормальных» задач на самом деле имеет место минимальность функционала.

На основании того, что уравнения Эйлера для функционала энергии (4.1) получаются из уравнений теории пластин типа Рейсснера, при условии, что слагаемые порядка $O(h^2)$ в сравнении с главным членом отброшены, можно утверждать, что функционал энергии (4.1) позволяет решить задачу изгиба пластины с асимптотической ошибкой порядка $O(h^2)$ в сравнении с главным членом. Однако, функционал энергии (4.1) не является строгим асимптотическим следствием функционала (3.1), поскольку функционал (4.1) зависит от слагаемого $Gh\Gamma R^{-1} f^2(\tau)$, которое имеет асимптотический порядок $O(h^2)$ в сравнении с главным членом, тогда как другие слагаемые, имеющие такой же асимптотический порядок, в функционале (4.1) не учтены.

5. Изгиб круглой пластины равномерно распределенным по контуру крутящим моментом. Рассмотрим пластину радиуса R, нагруженную по контуру равномерно распределенным крутящим моментом M_τ^*. Граничные условия примем в форме

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{N} |_c = 0, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{v} |_c = 0, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\tau} |_c = M_\tau^* \qquad (5.1)$$

Поскольку $M_\tau^* = \text{const}$, задача осесимметрична, т. е. в полярной системе координат $\Phi = \Phi(r)$, $F = F(r)$. Краевые задачи для проникающего и погранслойного потенциалов имеют вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 \Phi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \Phi \Big|_{r=R} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \Phi \Big|_{r=R} = 0 \qquad (5.2)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)F-\frac{12\Gamma}{h^2}F=0,\quad \left(F-\frac{h^2}{6\Gamma}\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\right)\Big|_{r=R}=-\frac{M_\tau^*}{Gh\Gamma} \tag{5.3}$$

Решением задачи (5.2) является функция, тождественно равная нулю: $\Phi\equiv 0$. Решение задачи (5.3) с асимптотической ошибкой $O\,(h^2)$ в сравнении с главным членом определяется формулой

$$F=-\frac{M_\tau^*}{Gh\Gamma}\frac{1-(1/2)\,(r-R)/R}{1-2h/(R\delta)}\exp\left(\frac{\delta}{h}(r-R)\right) \tag{5.4}$$

Рассмотрим решение данной задачи с помощью функционала энергии (4.1). В полярной системе координат этот функционал имеет вид

$$\Pi^*\,(\Phi,f)=2\pi\left[\int_0^R D\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2-\frac{1-\mu}{r}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\right)\right]rdr+\right.$$
$$\left.+\,Gh\Gamma\left(\frac{\delta}{2h}-\frac{1}{R}\right)f^2+M_\tau^*\frac{\delta}{h}f\right] \tag{5.5}$$

Из условия стационарности функционала (5.5) следует, что

$$\Phi\equiv 0,\quad f=-\frac{M_\tau^*}{Gh\Gamma}\frac{1}{1-2h/(R\delta)} \tag{5.6}$$

Принимая во внимание формулу (2.7), а также то обстоятельство, что введенная на контуре пластины локальная координата ν равна $r-R$, можно утверждать, что решение, найденное с помощью функционала (4.1), совпадает с аналитическим.

6. Изгиб прямоугольной шарнирно-опертой пластины под действием поперечной нагрузки. Рассмотрим прямоугольную пластину, занимающую область $0\le x\le a$, $0\le y\le b$. На пластину действует поперечная нагрузка $p\,(x,y)=p_0\sin(\pi x/a)\sin(\pi y/b)$. На контуре пластины выполнены условия шарнирного опирания. Подчеркнем, что возможны два типа граничных условий, которые следует понимать как условия шарнирного опирания.

Задача 1:

$$w|_c=0,\quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{v}|_c=0,\quad \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\psi}|_c=0 \tag{6.1}$$

Задача 2:

$$w|_c=0,\quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{v}|_c=0,\quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{M}\cdot\boldsymbol{\tau}|_c=0 \tag{6.2}$$

Ниже будут рассмотрены обе задачи и проведено их сравнение.

Задача 1 имеет точное аналитическое решение

$$\Phi_1=-\frac{p_0}{D}\frac{\sin(\pi x/a)\sin(\pi y/b)}{[(\pi/a)^2+(\pi/b)^2]^2},\quad F_1\,(x,y)\equiv 0 \tag{6.3}$$

Задача 2 не имеет точного аналитического решения. Однако, представив функции Φ и F в виде рядов по степеням h, можно показать, что для главных членов этих асимптотических разложений задача распадается на две, причем задача для главного члена проникающего потенциала совпадает с задачей 1 $\Phi_2^{(0)}=\Phi_1$, а задача для главного члена погранслойного потенциала имеет вид

$$\Delta F_2^{(0)}-\frac{12\Gamma}{h^2}F_2^{(0)}=0,\quad F_2^{(0)}|_c=\frac{h^2}{6\Gamma}\frac{\partial^2\Phi_2^{(0)}}{\partial\nu\partial\tau}\Big|_c \tag{6.4}$$

Очевидно, что главный член погранслойного потенциала $F_2^{(0)}$ не равен нулю и, следовательно, решения задач 1 и 2 вблизи границы пластины отличаются в главных членах. Рассмотрим решение задач 1 и 2 с помощью функционала энергии (4.1).

Задача 1. Будем искать проникающий потенциал в виде ряда по координатным функциям

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} \sin \frac{\pi k x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b} \tag{6.5}$$

Очевидно, координатные функции (6.5) удовлетворяют первому условию из (2.9). Третье условие из (2.9) будет выполнено только в том случае, если $f \equiv 0$. Подставив выражение (6.5) в функционал (4.1), получим

$$\Pi^*(\Phi, f) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn}^2 D \left[\left(\frac{\pi k}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 \right]^2 \frac{ab}{8} + A_{11} p_0 \frac{ab}{4} \tag{6.6}$$

Из условия стационарности функционала (6.6) следует

$$A_{11} = -(p_0/D)\, [(\pi/a)^2 + (\pi/b)^2]^{-2}, \quad A_{kn} = 0 \quad (kn \neq 1) \tag{6.7}$$

Полученное решение (6.5), (6.7) совпадает с аналитическим решением (6.3).

Задача 2. Будем искать проникающий потенциал в виде ряда по координатным функциям (6.5). Функция f не должна удовлетворять никаким кинематическим граничным условиям. Представим f в виде рядов по координатным функциям

$$\begin{aligned} y = 0:\ f_1(x) &= \frac{C_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos \frac{\pi k x}{a} \\ y = b:\ f_2(x) &= \frac{S_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} S_k \cos \frac{\pi k x}{a} \\ x = 0:\ f_3(y) &= \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \frac{\pi n y}{b} \\ x = a:\ f_4(y) &= \frac{V_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos \frac{\pi n y}{b} \end{aligned} \tag{6.8}$$

Подставив выражения (6.5), (6.8) в функционал (4.1), получим

$$\begin{aligned} \Pi^*(\Phi, f) = D \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(A_{kn}^2 \left[\left(\frac{\pi k}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 \right]^2 \frac{ab}{8} + \\ + (1 - \mu)(1/2)(\delta/h) A_{kn} \pi^2 kn\, [(C_k + (-1)^n S_k)/b - \\ - (B_n + (-1)^k V_n)/a] \Big) + (1/4)\, \delta G \Gamma \sum_{k=0}^{\infty} [(C_k^2 + S_k^2)\, a + \\ + (B_k^2 + V_k^2)\, b] + (1/4) A_{11} p_0 ab \end{aligned} \tag{6.9}$$

Из условия стационарности функционала (6.9) следует

$$\begin{aligned} A_{11} &= -(p_0/D)\left([(\pi/a)^2 + (\pi/b)^2]^2 - 8(h/\delta)(1 - \mu)\pi^4 (a + b)\, a^{-3} b^{-3}\right)^{-1} \\ B_1 &= S_1 = -C_1 = -V_1 = A_{11} \pi^2 h^2 / (6\Gamma ab) \\ A_{kn} &= 0 \quad (kn \neq 1), \quad C_k = S_k = B_k = V_k = 0 \quad (k \neq 1) \end{aligned} \tag{6.10}$$

Главный член проникающего потенциала, найденного в результате решения задачи 2 с помощью функционала (4.1), совпадает с проникающим потенциалом в задаче 1. Погранслойный потенциал, найденный в результате решения задачи 2 с помощью функционала (4.1), не равен нулю и, следовательно, он в главном члене отличается от погранслойного потенциала в задаче 1.

7. Изгиб прямоугольной пластины, три стороны которой шарнирно оперты, а на четвертой приложена нагрузка. Рассмотрим прямоугольную пластину, занимающую область $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$. На трех сторонах пластины выполнены условия шарнирного опирания

$$w\Big|_{\substack{x=0\\y=0,b}} = 0, \quad \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\psi}\Big|_{\substack{x=0\\y=0,b}} = 0, \quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{v}\Big|_{\substack{x=0\\y=0,b}} = 0 \tag{7.1}$$

На четвертой стороне пластины приложена нагрузка

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{N}|_{x=a} = N_\nu^* \sin(\pi y/b), \quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{M}\cdot\boldsymbol{\tau}|_{x=a} = M_\tau^* \cos(\pi y/b), \quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{v}|_{x=a} = 0 \tag{7.2}$$

причем $N_\nu^* - (\pi/b)\, M_\tau^* = hp$, где величины N_ν^*, M_τ^*, p имеют асимптотический порядок $O\,(1)$. Главные члены асимптотических разложений проникающего и погранслойного потенциалов находятся из решения следующих краевых задач:

$$h^2\Delta F - 12\Gamma F = 0, \quad \partial F/\partial \nu\Big|_{\substack{x=0\\y=0,b}} = 0, \quad Gh\Gamma F|_{x=a} = -M_\tau^* \cos\frac{\pi y}{b} \tag{7.3}$$

$$\Delta\Delta\Phi = 0, \quad \Phi\Big|_{\substack{x=0\\y=0,b}} = 0, \quad \Delta\Phi\Big|_{\substack{x=0\\y=0,b}} = 0 \tag{7.4}$$

$$\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\partial y^2}\Big|_{x=a} = \frac{hp}{D}\sin\frac{\pi y}{b}, \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\Big|_{x=a} = -(1-\mu)\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\Big|_{x=a}$$

Проникающий потенциал имеет асимптотический порядок $O\,(h^{-2})$ в сравнении с единицей, погранслойный потенциал имеет асимптотический порядок $O\,(h^{-1})$ в сравнении с единицей. Из уравнений (7.3), (7.4) видно, что главный член погранслойного потенциала зависит только от M_τ^*, а главный член проникающего потенциала зависит и от p, и от M_τ^*. Формулировка рассматриваемой задачи в теории Кирхгофа представляет собой систему уравнений (7.4), в которой погранслойный потенциал тождественно равен нулю. Очевидно, проникающий потенциал в теории Кирхгофа также имеет асимптотический порядок $O\,(h^{-2})$ в сравнении с единицей, однако он зависит только от p и не зависит от M_τ^*. Следовательно, решение данной задачи по теории Кирхгофа содержит ошибку в главном члене не только вблизи границы, но и внутри области.

Рассмотрим решение обсуждаемой задачи с помощью функционала энергии (4.1). Будем искать проникающий потенциал и функцию f в виде

$$\Phi\,(x, y) = u\,(x)\sin(\pi y/b), \quad x = a\colon f\,(y) = S\cos(\pi y/b) \tag{7.5}$$

Согласно кинематическим граничным условиям функция f на сторонах $x=0$, $y=0$, b тождественно равна нулю, а функция $u\,(x)$ должна удовлетворять следующим условиям

$$u\,(0) = 0, \quad u''\,(0) = 0 \tag{7.6}$$

Подставив выражения (7.5) в функционал (4.1), получим

$$\Pi^*\,(u\,(x), S) = \frac{b}{2}\Big[D\int_0^a \Big(\frac{1}{2}\Big[u''\,(x) - \Big(\frac{\pi}{b}\Big)^2 u\,(x)\Big]^2 + \tag{7.7}$$

$$+ (1-\mu)(\pi/b)^2\,[(u'\,(x))^2 + u''\,(x)\,u\,(x)]\Big)\,dx - D\,(1-\mu)(\delta/h)(\pi/b)\times$$

$$\times\, u'\,(a)\,S + (1/2)\,\delta G\Gamma S^2 + hpu\,(a) + M_\tau^*\,(\delta/h)\,S\Big]$$

Из условия стационарности функционала (7.7) следует

$$u^{\mathrm{IV}}\,(x) - 2\,(\pi/b)^2\,u''\,(x) + (\pi/b)^4 u\,(x) = 0$$

$$u'''\,(a) - (2-\mu)(\pi/b)^2\,u'\,(a) = hp/D \tag{7.8}$$

$$u''(a) - \mu(\pi/b)^2 u(a) = (1-\mu)(\pi/b)(\delta/h) S$$

$$S = -M_\tau^*/(Gh\Gamma) + (1/6)(h^2/\Gamma)(\pi/b) u'(a)$$

Из формул (7.6), (7.8) видно, что S в главном члене зависит только от M_τ^*, а $u(x)$ в главном члене зависит и от p, и от M_τ^*.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жилин П. А.* О теориях пластин Пуассона и Кирхгофа с позиций современной теории пластин//Изв. АН. МТТ. 1992. № 3. С. 48—64.
2. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром//Успехи мат. наук. 1957. Т. 12. № 5. С. 3—122.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию 27.II.1993