

УДК 539.3

© 1995 г. Е. И. МИХАЙЛОВСКИЙ

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПОДКРЕПЛЕННОГО КРАЯ ЖЕСТКО-ГИБКОЙ ОБОЛОЧКИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ТИПА ТИМОШЕНКО — РЕЙССНЕРА

В конце пятидесятых годов К. Ф. Черных ввел в линейную теорию оболочек деформационные граничные величины [1], выражающиеся без интегрирования через усилия-моменты и обеспечивающие при некоторых дополнительных условиях [2] единственность решений соответствующих краевых задач. В [3] условия сопряжения тонкого стержня с краем оболочки записаны при использовании деформационных граничных величин в виде четырех уравнений, в которых стержень представлен лишь своими жесткостями на растяжение, изгиб и кручение. Эти уравнения естественно называть граничными условиями подкрепленного края оболочки. Их использование позволяет построить наиболее компактную систему уравнений статики ребристой оболочки [4].

В [5] деформационные граничные величины распространены на вариант нелинейной теории оболочек, основанный на модифицированной гипотезе Кирхгофа, позволяющей учитывать поперечное обжатие оболочки. Тензор изменения кривизны введен дифференцированием вдоль граничного контура двойного тензора поворота, орты которого нормально связаны соответственно с недеформированным и деформированным боковыми элементами оболочки. Введенные деформационные величины позволили распространить на нелинейный случай и граничные условия подкрепленного края [6] при использовании специально разработанной нелинейной теории стержней, основанной на модифицированной (учитывающей обжатие) гипотезе плоских сечений.

В публикуемой работе результаты, полученные в [5, 6], обобщаются на нелинейную теорию типа Тимошенко — Рейсснера. При этом рассматривается лишь случай жестко-гибкой (по терминологии К. Ф. Черных) оболочки, т. е. изготовленной из «жесткого» сжимаемого материала, конечные перемещения которой реализуются за счет больших поворотов при малых деформациях и, естественно, при малых поперечных сдвигах. Главной особенностью предлагаемой теории является учет последних в линейном приближении. Для построения определяющих уравнений, адекватно описывающих деформацию жестко-гибкой (или гибкой в обычно употребляемом смысле) оболочки, удобно использовать упругий потенциал стандартного материала 2-го порядка (STM-2). В отличие от многочисленных вариантов уточненных теорий (см., например, [7—11]) реализуемый в статье подход может быть распространен и на случай мягко-гибких оболочек из несжимаемого «мягкого» материала, сохраняющих упругие свойства при больших деформациях, в том числе при больших поперечных сдвигах. Для этого вместо STM-2 можно рассмотреть, например, неогуковский материал, несколько ужесточив систему допущений [12].

Деформационные граничные величины и граничные условия подкрепленного края в теорию оболочек типа Тимошенко — Рейсснера (как линейную, так и нелинейную) вводятся впервые.

Используемые в статье обозначения совпадают в основном с принятыми в [6].

1. Нелинейная теория оболочек типа Тимошенко — Рейсснера при малых поперечных сдвигах. 1.1 Предположим, что радиус-вектор точки $(\alpha^1, \alpha^2, \xi)$:

$$R^\circ(\alpha^i, \xi) = r^\circ(\alpha^i) + \xi n^\circ(\alpha^i) \quad (1.1)$$

в результате деформации оболочки последовательно принимает вид

$$R(\alpha^i, \xi) = r(\alpha^i) + \lambda_\xi(\alpha^i) (\xi + 1/2 \xi^2 \kappa_\xi(\alpha^i)) n(\alpha^i) \quad (1.2)$$

и

$$R^v(\alpha^i, \xi) = R(\alpha^i, \xi) + \xi \omega^{\beta}(\alpha^i) r_{\beta}(\alpha^i) \quad (1.3)$$

Здесь и ниже, если не оговорено противное, индексы принимают значения 1 и 2; по повторяющемуся греческому индексу следует суммировать от 1 до 2; градусом помечены величины, относящиеся к недеформированной конфигурации оболочки; α^1, α^2 — ортогональные криволинейные координаты срединной поверхности оболочки до деформации.

Помимо (1.2), (1.3) вводятся следующие допущения:

I) оболочка является тонкой, т. е.

$$\xi b_{ij} \ll 1 \quad (1.4)$$

II) производными параметров $\lambda_{\xi}(\alpha^i), \kappa_{\xi}(\alpha^i)$ можно пренебрегать;

III) эффекты, связанные с поперечным обжатием, учитываются в тангенциальных компонентах деформации линейно по ξ ;

IV) поперечные сдвиги учитываются по линейной теории относительно конфигурации (1.2).

Компоненты тензора деформации Грина — Лагранжа

$$\Gamma = \varepsilon_{\alpha\beta}^{\xi} R^{\alpha} R^{\beta} \quad (\alpha, \beta \in 1-3) \quad (1.5)$$

определяются формулами

$$\varepsilon_{ij}^{\xi} = \varepsilon_{ij} + \xi (\kappa_{ij} + \mu_{ij}), \quad \varepsilon_{\beta}^{\xi} = 1/2 \omega_{\beta}$$

$$\varepsilon_{33}^{\xi} = 1/2 (\lambda_{\xi}^2 - 1) + \xi \lambda_{\xi}^2 \kappa_{\xi}$$

$$\varepsilon_{ij} = 1/2 (a_{ij} - a_{ij}^{\circ}), \quad \kappa_{ij} = -\lambda_{\xi} b_{ij} + b_{ij}^{\circ}, \quad \mu_{ij} = 1/2 (\nabla_i \omega_j + \nabla_j \omega_i)$$

$$(a_{ij} = r_i \cdot r_j, \quad b_{ij} = n \cdot r_{ij}, \quad \nabla_i \mu_j = \partial_i \mu_j - \Gamma_{ij}^{\alpha} \mu_{\alpha}, \quad \Gamma_{ij}^k = r_{ij} \cdot r^k) \quad (1.6)$$

1.2. Используя упругий потенциал стандартного материала 2-го порядка (I_{Γ}, II_{Γ} — 1-й и 2-й главные инварианты тензора Γ):

$$\Phi = 1/2 (\lambda + 2\mu) I_{\Gamma}^2 - 2\mu II_{\Gamma} \quad (1.7)$$

компоненты симметричного тензора Пиолы — Кирхгофа ($J = dV/dV^{\circ}$ — кратность изменения объема):

$$P = J \sigma^{\alpha\beta} R_{\alpha}^{\circ} R_{\beta}^{\circ} \quad (\alpha, \beta \in 1-3) \quad (1.8)$$

можно определить по формулам

$$J \sigma^{ij} = \partial \Phi / \partial \varepsilon_{ij}^{\xi} = (\lambda g^{ij} g^{\alpha\beta} + 2\mu g^{\circ ia} g^{\circ \beta}) \varepsilon_{\alpha\beta}^{\xi}$$

$$(i, j, \alpha, \beta \in 1-3) \quad (1.9)$$

Принимая для тонкой оболочки $g_{ij}^{\circ} \approx a_{ij}^{\circ}$, формулам (1.9) можно придать вид (λ, μ — упругие постоянные Ламе):

$$J \sigma^{ij} = (\lambda a^{\circ ij} a^{\circ \alpha\beta} + 2\mu a^{\circ ia} a^{\circ \beta}) \varepsilon_{\alpha\beta}^{\xi} + \lambda a^{\circ ij} \varepsilon_{33}^{\xi}$$

$$J \sigma^{33} = \lambda a^{\circ \alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}^{\xi} + (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{33}^{\xi}, \quad J \sigma^{\beta} = 2\mu a^{\circ ij} \varepsilon_{ij}^{\xi} \quad (1.10)$$

Расписывая $J \sigma^{33}$ с учетом (1.6) и используя граничные условия на лицевых поверхностях оболочки

$$J \sigma^{33}(h^{\circ}/2) = q_n^+, \quad J \sigma^{33}(-h^{\circ}/2) = q_n^- \quad (1.11)$$

приходим к следующим формулам для характеризующих поперечное обжатие параметров $\lambda_{\xi}, \kappa_{\xi}$:

$$\lambda_{\xi}^2 = 1 - \frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} a^{\circ \alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}^{\xi} + \frac{2m_n}{(\lambda + 2\mu) h^{\circ}}$$

$$\lambda^2 \kappa_{\alpha\beta} = - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} a^{\circ\alpha\beta} (\kappa_{\alpha\beta} + \mu_{\alpha\beta}) + \frac{q_n}{(\lambda + 2\mu) h^{\circ}} \quad (1.12)$$

$$q_n = q_n^+ - q_n^-, \quad m_n = 1/2 h^{\circ} (q_n^+ + q_n^-)$$

Используя формулы (1.12), из соотношений (1.6), (1.10) последовательно получаем

$$\varepsilon_{33}^{\xi} = - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} a^{\circ\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}^{\xi} + \frac{m_n + \xi q_n}{(\lambda + 2\mu) h^{\circ}}, \quad J\sigma^{33} = \frac{m_n + \xi q_n}{h^{\circ}} \quad (1.13)$$

Введем обозначения

$$S^{ij} = \int_{-h^{\circ}/2}^{h^{\circ}/2} (J\sigma^{ij} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} a^{\circ ij} J\sigma^{33}) d\xi$$

$$M^{ij} = \lambda_{\xi} \int_{-h^{\circ}/2}^{h^{\circ}/2} (J\sigma^{ij} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} a^{\circ ij} J\sigma^{33}) \xi d\xi, \quad T_{,n}^i = \lambda_{\xi} \int_{-h^{\circ}/2}^{h^{\circ}/2} J\sigma^{i3} d\xi \quad (1.14)$$

Тогда на основании (1.10), (1.13) и (1.14) приходим к следующим определяющим уравнениям упругости:

$$S^{ij} = BA^{ij, \alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}, \quad M_{,K}^{ij} = \lambda_{\xi} DA^{ij, \alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta}$$

$$M_T^{ij} = \lambda_{\xi} DA^{ij, \alpha\beta} \mu_{\alpha\beta}, \quad M^{ij} = M_K^{ij} + M_T^{ij}, \quad T_{,n}^i = \mu a^{\circ ij} \omega_{,n}$$

$$A^{ij, kl} = (1 - \nu) a^{\circ ik} a^{\circ jl} + \nu a^{\circ ij} a^{\circ kl}, \quad B = Eh/(1 - \nu^2)$$

$$D = Eh^3/12 (1 - \nu^2) \quad (1.15)$$

где E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки.

1.3. Предположим, для упрощения записи, что боковая поверхность оболочки свободна от нагрузки. Тогда вариационное уравнение Лагранжа можно записать так

$$\delta U - \delta A = 0$$

$$\delta U = \int_{\Omega^{\circ}} \int_{-h^{\circ}/2}^{h^{\circ}/2} \delta \Phi d\xi d\Omega^{\circ}, \quad \delta A = \int_{\Omega^{\circ}} (q^+ \cdot \delta R^{\nu+} - q^- \cdot \delta R^{\nu-}) \sqrt{a} d\alpha^1 d\alpha^2$$

$$\delta \Phi = \Pi : \delta \Gamma = J\sigma^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta}^{\xi} + 2J\sigma^{\alpha 3} \delta \varepsilon_{\alpha 3}^{\xi} + J\sigma^{33} \delta \varepsilon_{33}^{\xi} \quad (1.16)$$

На основании (1.6), (1.10) и (1.14) имеем

$$\delta U = \delta I_1 + \delta I_2$$

$$\delta I_1 = \int_{\Omega^{\circ}} (S^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta} + \lambda_{\xi}^{-1} M^{\alpha\beta} \delta \kappa_{\alpha\beta}) d\Omega^{\circ}$$

$$\delta I_2 = \int_{\Omega^{\circ}} (M^{\alpha\beta} \delta \mu_{\alpha\beta} + T_{,n}^{\alpha} \delta \omega_{\alpha}) \lambda_{\xi}^{-1} d\Omega^{\circ}$$

Принимая во внимание соотношения [6]:

$$\delta \varepsilon_{\alpha\beta} = 1/2 (r_{\alpha} \cdot \delta r_{\beta} + r_{\beta} \cdot \delta r_{\alpha})$$

$$\delta \kappa_{\alpha\beta} = - \lambda_{\xi} \nabla_{\alpha} (n \cdot \delta r_{\beta}) - \lambda_{\xi} b_{\alpha\gamma}^{\beta} r_{\gamma} \cdot \delta r_{\beta}$$

а также формулы интегрирования по частям компонент тензора (с использованием как деформированной, так и недеформированной конфигураций) в предположении, что контур $\partial\Omega^{\circ}$ гладкий, получаем

$$\delta I_1 = \int_{\Omega^{\circ}} \partial_{\beta} [\sqrt{a^{\circ}} T^{\beta\alpha} r_{\alpha} + \nabla_{\alpha} (\sqrt{a^{\circ}} M^{\alpha\beta}) n] \cdot \delta r d\alpha^1 d\alpha^2 + \delta I_{11} + \delta I_{12}$$

$$T^j = S^j - b_j^i M^i, \quad \delta I_{11} = - \int_{\partial\Omega} v_\alpha \circ M^{\alpha\beta} \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{r}_\beta ds_i^\circ$$

$$\delta I_{12} = \int_{\partial\Omega} v_\beta \circ [T_{\beta\alpha}^i \mathbf{r}_\alpha + (1/\sqrt{a^\circ}) \nabla_\alpha (\sqrt{a^\circ} M^{\alpha\beta}) \mathbf{n}] \cdot \delta \mathbf{r} ds_i^\circ \quad (1.17)$$

Аналогично находим

$$\delta I_2 = \int_{\Omega} [- \nabla_\beta (\sqrt{a^\circ} M^{\alpha\beta}) + \sqrt{a^\circ} T_{,n}^\alpha] \lambda_\xi^{-1} \delta \omega_\alpha d\alpha^1 d\alpha^2 + \delta I_{21}$$

$$\delta I_{21} = \int_{\partial\Omega} v_\alpha \circ \lambda_\xi^{-1} M^{\alpha\beta} \delta \omega_\beta ds_i^\circ \quad (1.18)$$

Рассмотрим, наконец, интеграл δA . Вводя обозначения

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^+ - \mathbf{q}^- = q^\alpha \mathbf{r}_\alpha + q_n \mathbf{n}, \quad \mathbf{m} = 1/2 h^\circ (\mathbf{q}^+ - \mathbf{q}^-) = m^\alpha \mathbf{r}_\alpha + m_n \mathbf{n} \quad (1.19)$$

можно записать

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^+ \cdot \delta \mathbf{R}^{V^+} - \mathbf{q}^- \cdot \delta \mathbf{R}^{V^-} &= \mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{r} + \lambda_\xi^{-1} \mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_\beta \delta \omega^\beta + \\ &+ \mathbf{m} \cdot \delta \mathbf{n} + 1/8 h^{\circ 2} \lambda_\xi \kappa_\xi \mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{n} + \lambda_\xi^{-1} \omega^\beta \mathbf{m} \cdot \delta \mathbf{r}_\beta \\ &\quad \text{-----} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Преобразуем интеграл, связанный с первым подчеркнутым в (1.20) слагаемым. Принимая во внимание $\mathbf{r}_\beta \cdot \delta \mathbf{n} = - \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{r}_\beta$ и используя интегрирование по частям, получаем

$$\int_{\Omega} [(\nabla_\beta m^\beta) \mathbf{n} - m^\beta b_{\beta\alpha}^i \mathbf{r}_\alpha] \cdot \delta \mathbf{r} \sqrt{a} d\alpha^1 d\alpha^2$$

Аналогично можно преобразовать и интегралы, связанные с двумя другими подчеркнутыми в (1.20) слагаемыми. Выполнив соответствующие преобразования, собрав все интегралы вместе и отбросив малые для тонкой оболочки слагаемые, придем к соотношению

$$\delta A = \int_{\Omega} [(q^\alpha \mathbf{r}_\alpha + q_n \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{r} + \lambda_\xi^{-1} m^\alpha \delta \omega_\alpha] \sqrt{a} d\alpha^1 d\alpha^2 \quad (1.21)$$

Приравнявая к нулю коэффициенты перед вариациями $\delta \mathbf{r}$ и $\delta \omega_j$ в уравнении (1.16), получим ($j = 1, 2$):

$$\begin{aligned} \partial_\beta [\sqrt{a^\circ} T^{\beta\alpha} \mathbf{r}_\alpha + \nabla_\alpha (\sqrt{a^\circ} M^{\alpha\beta}) \mathbf{n}] + \sqrt{a^\circ} \mathbf{q} &= 0 \\ \nabla_\beta (\sqrt{a^\circ} M^\beta) - \sqrt{a^\circ} T'_{,n} + \sqrt{a^\circ} m' &= 0 \end{aligned} \quad (1.22)$$

Проведя преобразования, аналогичные выполненным в [6], систему уравнений (1.22) можно представить так

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha (\sqrt{a^\circ} T^\alpha) - b_\beta^i \nabla_\alpha (\sqrt{a^\circ} M^{\alpha\beta}) + \sqrt{a^\circ} q^i &= 0 \\ \partial_\beta \nabla_\alpha (\sqrt{a^\circ} M^{\alpha\beta}) + \sqrt{a^\circ} b_{\alpha\beta}^i T^{\alpha\beta} + \sqrt{a^\circ} q_n &= 0 \\ \nabla_\beta (\sqrt{a^\circ} M^\beta) - \sqrt{a^\circ} T'_{,n} + \sqrt{a^\circ} m' &= 0 \end{aligned} \quad (1.23)$$

Уравнения (1.23) при $m' = 0$ формально совпадают с уравнениями (11.57) [6], введенными из условий равновесия элемента деформированной оболочки при использовании модифицированной гипотезы Кирхгофа без учета трансверсальных сдвигов. Однако фактически эти уравнения совпадают, если принять (кроме $m' = 0$) $J\sigma^{33} = 0$, $M^j = M^j_k$ (см. форм. (1.14), (1.15)).

1.4. Контурный интеграл δI_{11} с учетом соотношений $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_i = v_i$, $\mathbf{t} \cdot \mathbf{r}_i = t_i$, $\mathbf{r}_i = \mathbf{v}_i + t_i \mathbf{t}$ приводится к виду

$$\delta I_{11} = - \int_{\partial\Omega} (M_{,v} \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{v} + M_{,t} \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{t}) ds_i^\circ$$

$$M_{vv} = M^{\alpha\beta} v_{\alpha}^{\circ} v_{\beta}, \quad M_{vt} = M^{\alpha\beta} v_{\alpha}^{\circ} t_{\beta} \quad (1.24)$$

Используя далее зависимости

$$\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \frac{d\delta \mathbf{r}}{ds_t} = \lambda_t^{-1} \mathbf{n} \cdot \frac{d\delta \mathbf{r}}{ds_t^{\circ}}, \quad \lambda_t = \frac{ds_t}{ds_t^{\circ}}$$

$$\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{v} = -\mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{n}, \quad dn/ds_t = \tau_t \mathbf{v} - \sigma_t \mathbf{t}$$

интеграл (1.24) можно представить так

$$\delta I_{11} = \oint_{\Omega^{\circ}} \left\{ M_{vv} \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{n} + \left[M_{vt} (\tau_t \mathbf{v} - \sigma_t \mathbf{t}) + \frac{dM_{vt}}{ds_t} \mathbf{n} \right] \cdot \delta \mathbf{r} \right\} ds_t^{\circ} \quad (1.25)$$

Проведя аналогичные преобразования, получим

$$\delta I_{12} = \oint_{\Omega^{\circ}} [T_{vv} \mathbf{v} + T_{vt} \mathbf{t} + (v_{\beta}^{\circ} / \sqrt{a^{\circ}}) \nabla_{\alpha} (\sqrt{a^{\circ}} M^{\alpha\beta}) \mathbf{n}] \cdot \delta \mathbf{r} ds_t^{\circ} \quad (1.26)$$

Объединив эти интегралы, будем иметь

$$\delta I_{11} + \delta I_{12} = \oint_{\Omega^{\circ}} (Q_v \cdot \delta \mathbf{r} + M_{vv} \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{n}) ds_t^{\circ}$$

$$Q_v = Q_{vv} \mathbf{v} + Q_{vt} \mathbf{t} + Q_{vn} \mathbf{n}$$

$$Q_{vv} = T_{vv} + \tau_t M_{vt}, \quad Q_{vt} = T_{vt} - \sigma_t M_{vt}$$

$$Q_{vn} = \frac{dM_{vt}}{ds_t} + \frac{v_{\beta}^{\circ}}{\sqrt{a^{\circ}}} \nabla_{\alpha} (\sqrt{a^{\circ}} M^{\alpha\beta}) \quad (1.27)$$

Далее интеграл δI_{21} можно привести к виду

$$\delta I_{21} = \oint_{\Omega^{\circ}} (M_{vv} \delta \omega_v + M_{vt} \delta \omega_t) \lambda_{\xi}^{-1} ds_t^{\circ} \quad (1.28)$$

$$\omega_v = \omega_{(1)} \cos \gamma + \omega_{(2)} \sin \gamma, \quad \omega_t = -\omega_{(1)} \sin \gamma + \omega_{(2)} \cos \gamma$$

Окончательно статические и пятую геометрическую величины можно представить в виде (величины в скобках со знаком приближенного равенства соответствуют линейной теории)

$$\frac{\mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{r} (\approx \delta u_v)}{Q_{vv}} \quad \left| \quad \frac{\mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{r} (\approx \delta u_t)}{Q_{vt}} \quad \right| \quad \frac{\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{r} (\approx \delta w)}{Q_{vn}}$$

$$\frac{\mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{n} + \delta \omega_v (\approx \delta (\vartheta_v + \omega_v))}{M_{vv}} \quad \left| \quad \frac{\delta \omega_t}{M_{vt}} \quad \right| \quad (1.29)$$

1.5. Поворот нормального элемента в результате деформации жестко-гибкой оболочки складывается из поворота, обусловленного переходом ортов $\{\mathbf{v}^{\circ}, \mathbf{t}^{\circ}, \mathbf{n}^{\circ}\}$ в $\{\mathbf{v}, \mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ в соответствии с модифицированной гипотезой Кирхгофа, и дополнительного поворота за счет поперечных сдвигов. Переход ортов $\{\mathbf{v}^{\circ}, \mathbf{t}^{\circ}, \mathbf{n}^{\circ}\}$ в $\{\mathbf{v}, \mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ описывает двойной тензор $[6] Q_i = v v^{\circ} + t t^{\circ} + n n^{\circ}$, которому соответствует следующий тензор изменения кривизны нормального элемента:

$$K_i = dQ_i/ds_t = -\kappa_{tt} (n t^{\circ} - t n^{\circ}) + \kappa_{tv} (v n^{\circ} - n v^{\circ}) - \kappa_{tn} (t v^{\circ} - v t^{\circ})$$

$$-\kappa_{tt} = \sigma_t - \lambda_t^{-1} \sigma_t^{\circ}, \quad \kappa_{tv} = \tau_t - \lambda_t^{-1} \tau_t^{\circ}, \quad -\kappa_{tn} = \rho_t - \lambda_t^{-1} \rho_t^{\circ}$$

где σ_t, ρ_t, τ_t — соответственно нормальная кривизна, геодезическая кривизна и геодезическое кручение контура на срединной поверхности деформированной оболочки.

Обусловленный малыми поперечными сдвигами переход ортов $\{v, t, n\}$ к приближенно ортонормированной системе $\{v^v, t^v, n^v\}$, ортогонально связанной с деформированным боковым элементом, определяется тензором [13]

$$\Omega_t^v = 1 + \omega_v (vn - nv) + \omega_t (tn - nt)$$

Таким образом, преобразование ортов $\{v^o, t^o, n^o\}$ в $\{v^v, t^v, n^v\}$ осуществляется тензором

$Q_t^v = \Omega_t^v \cdot Q_t$ и, следовательно, тензор изменения кривизны нормального элемента в теории типа Тимошенко — Рейсснера можно представить так

$$K_t^v = dQ_t^v/ds_t = -\kappa_{tt}^v (nt^o - tn^o) + \kappa_{tv}^v (vn^o - nv^o) - \\ - \kappa_{tn}^v (tv^o - vt^o)$$

$$\kappa_{tt}^v = \kappa_{tt} + \rho_t \omega_v + d\omega_t/ds_t, \quad \kappa_{tv}^v = \kappa_{tv} + d\omega_v/ds_t - \rho_t \omega_t$$

$$\kappa_{tn}^v = \kappa_{tn} - \sigma_t \omega_v - \tau_t \omega_t \quad (1.30)$$

Добавляя к параметрам изменения кривизны $(-\kappa_{tt}^v, \kappa_{tv}^v, -\kappa_{tn}^v)$ относительное удлинение нормального элемента $\epsilon_{tt} = (ds_t - ds_t^o)/ds_t^o = \lambda_t - 1$, получим набор из четырех деформационных величин. Однако в теории типа Тимошенко — Рейсснера необходимо иметь пять граничных величин. Благодаря выполненным в п. 1.4 преобразованиям, соответствующим в теории Кирхгофа переходу от пяти граничных величин к четырем, пятым обобщенным смещением в рассматриваемой здесь теории является дополнительный угол поворота ω_t . При этом ω_t имеет деформационный характер, т. е. без интегрирования выражается через силовые величины. Действительно, на основании (1.15) имеем

$$\omega_t = T_{tn}/\mu h \quad (1.31)$$

$$T_{tn} = -T_{(1n)} \sin \gamma + T_{(2n)} \cos \gamma, \quad T_{(in)} = T_{in}^i \sqrt{a_{ii}^o}$$

2. Нелинейная теория типа Тимошенко жестко-гибких стержней. 2.1. В [6] предложена нелинейная теория деформирования тонких стержней, основанная на допущении, что радиус-вектор материальной точки стержня

$$R^o(\xi, s^o) = r^o(s^o) + \xi(s^o), \quad \xi(s^o) = \xi_\alpha e_\alpha^o(s^o) \quad (2.1)$$

после деформации принимает вид

$$R = r + \lambda_0(s^o) [(\xi_1 + 1/2\chi_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta) e_1 + (\xi_2 + 1/2\rho_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta) e_2] \quad (2.2)$$

Описание конфигурации деформированного стержня формулой (2.2) соответствует принятию модифицированной гипотезы плоских сечений. Ниже строится теория деформирования тонких стержней, учитывающая (дополнительно к (2.2)) депланацию по Сен-Венану и поперечные сдвиги по Тимошенко. При этом вместо (2.2) используется формула (b-beam):

$$R^v = R + [\lambda_0(\omega^b \times \xi) \cdot t + \kappa^b \varphi(\xi)] t$$

$$\omega^b = \omega_\alpha^b e_\alpha, \quad \kappa_t^b(s^o) = p_{12} - \lambda_0^{-1} p_{12}^o \quad (2.3)$$

где p_{12}^o, p_{12} — кручение оси стержня соответственно до и после деформации; $\varphi(\xi)$ — функция кручения Сен-Венана, определяемая формулой

$$\varphi(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} (\Phi_{,2} + \xi_2) d\xi_1 - (\Phi_{,1} + \xi_1) d\xi_2 \quad (2.4)$$

Здесь $\Phi_{,i} = \partial\Phi/\partial\xi_i$, Φ — функция напряжения Прандтля, определяемая (в случае односвязной области поперечного сечения стержня) из краевой задачи

$$\Delta\Phi(\xi) = -2, \quad \xi \in (S^\circ); \quad \Phi(\xi) = 0, \quad \xi \in \partial(S^\circ) \quad (2.5)$$

где (S°) — область поперечного сечения стержня до деформации, $\partial(S^\circ)$ — граница этой области. На основании (2.3) обычным способом вычисляются компоненты тензора Грина — Лагранжа. При этом без дополнительных пояснений отбрасываются малые для тонкого стержня слагаемые. Имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^b &= 1/2(\lambda_0^2 - 1) + \lambda_0^2 \chi_{1\alpha} \xi_\alpha, \quad \varepsilon_{22}^b = 1/2(\lambda_0^2 - 1) + \lambda_0^2 \rho_{\alpha 2} \xi_\alpha \\ \varepsilon_{33}^b &= 1/2(\lambda_s^2 - 1) + \lambda_0 \lambda_s^2 [(\chi_1^b + \omega_1^{b'}) \xi_2 - (\chi_2^b + \omega_2^{b'}) \xi_1] \\ \varepsilon_{13}^b &= -1/2\lambda_s (\lambda_0^2 \chi_4^b \xi_2 + \lambda_0 \omega_2^b - \chi_4^b \varphi_{,1}), \quad \varepsilon_{12}^b = 1/2\lambda_0^2 (\chi_{\alpha 2} + \rho_{1\alpha}) \xi_\alpha \\ \varepsilon_{23}^b &= 1/2\lambda_s (\lambda_0^2 \chi_4^b \xi_1 + \lambda_0 \omega_1^b + \chi_4^b \varphi_{,2}) \\ (\chi_1 &= p_{23} - \lambda_0^{-1} p_{23}^\circ, \quad \chi_2 = p_{31} - \lambda_0^{-1} p_{31}^\circ, \quad \omega_i^{b'} = d\omega_i^b/ds^\circ) \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.2. Как и в случае жестко-гибкой оболочки в качестве теоретического материала рассматриваем стандартный материал 2-го порядка, для которого компоненты тензора Пиолы — Кирхгофа могут быть вычислены по формулам (малые слагаемые опущены):

$$\begin{aligned} J\sigma_b^{ij} &= 2\mu_b \varepsilon_b^{ij} + \lambda_b \varepsilon_{\alpha\beta}^b \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} \\ J &= dV/dV^\circ \approx \lambda_0^3 \lambda_s, \quad i, j, \alpha, \beta \in 1-3 \end{aligned} \quad (2.7)$$

где λ_b, μ_b — упругие константы Ламе для материала стержня. Статическую гипотезу принимаем в следующем виде:

$$J\sigma_b^{11} = 0, \quad J\sigma_b^{22} = 0, \quad J\sigma_b^{12} = 0 \quad (2.8)$$

где берутся в расчет лишь линейно зависящие от ξ_i слагаемые.

Используя первые два равенства (2.8) как уравнения относительно $\varepsilon_{11}^b, \varepsilon_{22}^b$ и разрешая их, получим

$$\varepsilon_{11}^b \approx -\nu_b \varepsilon_{33}^b, \quad \varepsilon_{22}^b \approx -\nu_b \varepsilon_{33}^b \quad (2.9)$$

Подставляя в равенства (2.9) компоненты тензора деформации из (2.6), находим

$$\lambda_0^2 = 1 - \nu_b (\lambda_s^2 - 1) \quad (2.10)$$

$$\chi_{11} = \rho_{12} = \nu_b \lambda_0^{-1} \lambda_s^2 (\chi_2^b + \omega_2^{b'}), \quad \chi_{12} = \rho_{22} = -\nu_b \lambda_0^{-1} \lambda_s^2 (\chi_1^b + \omega_1^{b'})$$

На основании третьего равенства (2.8) имеем

$$\rho_{11} \approx -\rho_{22}, \quad \chi_{22} \approx -\chi_{11} \quad (2.11)$$

Итак, вычислены все неизвестные параметры $\lambda_0, \chi_{ij}, \rho_{kl}$. Однако для определения напряженного состояния в стержне необходимо знать лишь параметр λ_0 , так как деформации $\varepsilon_{11}^b, \varepsilon_{22}^b, \varepsilon_{12}^b$ на основании (2.8) выражаются через $\varepsilon_{33}^b, \varepsilon_{13}^b, \varepsilon_{23}^b$, а эти последние не зависят от χ_{ij}, ρ_{kl} .

Вычислим напряжения на площадках, перпендикулярных деформированной оси стержня. С принятой выше точностью находим

$$\begin{aligned} J\sigma_b^{33} &= 1/2 E_b (\lambda_s^2 - 1) + E_b \lambda_0 \lambda_s^2 [(\chi_1^b + \omega_1^{b'}) \xi_2 - (\chi_2^b + \omega_2^{b'}) \xi_1] \\ J\sigma_b^{13} &= \mu_b \lambda_s (\chi_4^b \varphi_{,1} - \lambda_0^2 \chi_4^b \xi_2 - \lambda_0 \omega_2^b) \\ J\sigma_b^{23} &= \mu_b \lambda_s (\chi_4^b \varphi_{,2} + \lambda_0^2 \chi_4^b \xi_1 + \lambda_0 \omega_1^b) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Напряжениям (2.12) отвечают следующие главный вектор (F^b) и главный момент (B^b) :

$$F^b = \int_{(S)} \sigma_n^b dS, \quad B^b = \int_{(S)} (R^v - r) \times \sigma_n^b dS \quad (2.13)$$

Используя приближенное соотношение

$$\begin{aligned}\sigma_n^b dS &= \sigma_n^b dS^\circ = t \cdot J \sigma_b^{\circ 6} R_\alpha^\circ R_\beta^v dS^\circ \approx \\ &\approx (J \sigma_b^{31} \lambda_0 e_1 + J \sigma_b^{32} \lambda_0 e_2 + J \sigma_b^{33} \lambda_s t) dS^\circ\end{aligned}$$

первую формулу (2.13) можно представить так

$$\begin{aligned}F^b &= \mu_b \lambda_0 \lambda_s [e_1 \int_{(S^\circ)} (\kappa_1^b \varphi_{,1} - \lambda_0 \omega_2^b) dS^\circ + \\ &+ e_2 \int_{(S^\circ)} (\kappa_2^b \varphi_{,2} + \lambda_0 \omega_1^b) dS^\circ] + \frac{1}{2} E_b S^\circ \lambda_s (\lambda_s^2 - 1) t\end{aligned}\quad (2.14)$$

Здесь учтено, что

$$\int_{(S^\circ)} \xi_1 dS^\circ = \int_{(S^\circ)} \xi_2 dS^\circ = 0, \quad \int_{(S^\circ)} dS^\circ = S^\circ\quad (2.15)$$

Интегралы в (2.14) с множителем $\kappa_i^b(s^\circ)$ равны нулю. Действительно, с учетом (2.5) и (2.15) имеем

$$\begin{aligned}\int_{(S^\circ)} \varphi_{,1} dS^\circ &= \int_{(S^\circ)} (\xi_2 + \Phi_{,2}) dS^\circ = \int_{\partial(S^\circ)} n_2^\circ \Phi ds^\circ = 0 \\ \int_{(S^\circ)} \varphi_{,2} dS^\circ &= - \int_{(S^\circ)} (\xi_1 + \Phi_{,1}) dS^\circ = - \int_{\partial(S^\circ)} n_1^\circ \Phi ds^\circ = 0\end{aligned}$$

Итак, приходим к следующим соотношениям

$$\begin{aligned}F_1^b &= - \mu_b S^\circ \lambda_0^2 \lambda_s \omega_2^b, \quad F_2^b = \mu_b S^\circ \lambda_0^2 \lambda_s \omega_1^b \\ F_t &= 1/2 C_t^\circ \lambda_s (\lambda_s^2 - 1)\end{aligned}\quad (2.16)$$

где $C_t^\circ = E_b S^\circ$ — жесткость стержня при растяжении. Далее получаем

$$\begin{aligned}(R^v - r) \times \sigma_n^b dS &= \lambda_0 \lambda_s J \sigma_b^{33} \xi_2 e_1 - \lambda_0 \lambda_s J \sigma_b^{33} \xi_1 e_2 + \\ &+ \lambda_0^2 (J \sigma_b^{32} \xi_1 - J \sigma_b^{31} \xi_2) t\end{aligned}\quad (2.17)$$

Подставляя правую часть равенства (2.17) под второй интеграл (2.13), находим

$$\begin{aligned}B_1^b &= \lambda_0^2 \lambda_s^3 [(\kappa_1^b + \omega_1^{b'}) K_1^\circ - (\kappa_2^b + \omega_2^{b'}) K_{12}^\circ] \\ B_2^b &= \lambda_0^2 \lambda_s^3 [(\kappa_2^b + \omega_2^{b'}) K_2^\circ - (\kappa_1^b + \omega_1^{b'}) K_{12}^\circ] \\ B_t^b &= \lambda_0^2 \lambda_s \mu_b [\lambda_0^2 I_p^\circ + \int_{(S^\circ)} (\varphi_{,2} \xi_1 - \varphi_{,1} \xi_2) dS^\circ] \kappa_t^b\end{aligned}\quad (2.18)$$

$$(K_1^\circ = E_b J_1^\circ, \quad K_2^\circ = E_b J_2^\circ, \quad K_{12}^\circ = E_b J_{12}^\circ, \quad I_p^\circ = I_1^\circ + I_2^\circ)$$

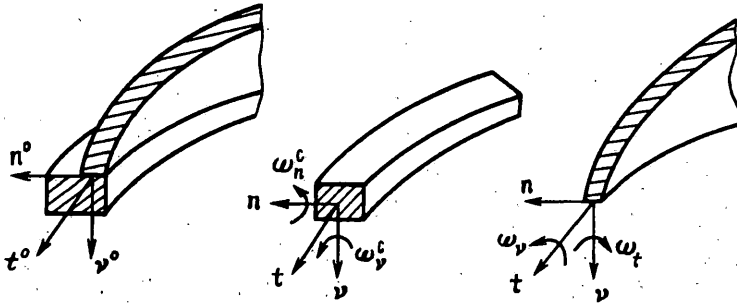
$$I_1^\circ = \int_{(S^\circ)} \xi_2^2 dS^\circ, \quad I_2^\circ = \int_{(S^\circ)} \xi_1^2 dS^\circ, \quad I_{12}^\circ = \int_{(S^\circ)} \xi_1 \xi_2 dS^\circ)$$

Интеграл в формуле (2.18) для B_t^b с учетом (2.4), (2.5) можно преобразовать так

$$\int_{(S^\circ)} (\varphi_{,2} \xi_1 - \varphi_{,1} \xi_2) dS^\circ = - I_p + 2 \int_{(S^\circ)} \Phi dS^\circ$$

Окончательно получаем

$$B_t^b = \lambda_0^2 \lambda_s K_t^\circ \kappa_t^b, \quad K_t^\circ = \mu_b [(\lambda_0^2 - 1) I_p^\circ + 2 \int_{(S^\circ)} \Phi dS^\circ]\quad (2.19)$$



Заметим, что в линейном приближении формула (2.19) принимает хорошо известный вид

$$B_t^b = 2\mu_b \lambda_s^b \int_{(S^o)} \Phi dS^o$$

3. Граничные условия подкрепленного края жестко-гибкой оболочки при малых поперечных сдвигах. 3.1. Пусть край оболочки $s_v = \text{const}$ подкреплен тонким стержнем. Рассмотрим на оси стержня правую тройку ортов $\{v^o, t^o, n^o\}$, нормально связанную с боковым элементом оболочки до деформации (фигура). Тогда полученные в п. 2.2 формулы остаются в силе при замене индексов, связанных с ортами $\{e_1, e_2, t\}$, на индексы, соответствующие ортам $\{n, v, t\}$. В частности, закон упругости для стержня можно записать так (ср. с форм. (15.10) [13]):

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} B_v^b \\ B_t^b \\ B_n^b \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} K_v^o & 0 & -K_{vn}^o \\ 0 & K_t^o & 0 \\ -K_{vn}^o & 0 & K_n^o \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -\lambda_0^2 \lambda_s^3 (\chi_{tt}^b - \omega_v^b) \\ \lambda_0^2 \lambda_s \chi_{tv}^b \\ -\lambda_0^2 \lambda_s^3 (\chi_{nn}^b - \omega_n^b) \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} F_v^b \\ F_t^b \\ F_n^b \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} C_v^o & 0 & 0 \\ 0 & C_t^o & 0 \\ 0 & 0 & C_n^o \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_0^2 \lambda_s \omega_n^b \\ \lambda_s (\lambda_s^2 - 1) \\ -\lambda_0^2 \lambda_s \omega_v^b \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$(-\chi_{tt}^b = \sigma_t - \lambda_0^{-1} \sigma_t^o, \quad -\chi_{nn}^b = \rho_t - \lambda_0^{-1} \rho_t^o, \quad \chi_{tv}^b = \tau_t - \lambda_0^{-1} \tau_t^o)$$

$$\lambda_s = 1 + \varepsilon_{tt}^b, \quad \lambda_0^2 = 1 - \nu_b \varepsilon_{tt}^b - \nu_b (\varepsilon_{nn}^b)^2, \quad C_v^o = C_n^o = \mu_b S^o$$

$$K_v^o = E_b \int_{(S^o)} \xi_n^2 dS^o, \quad K_n^o = E_b \int_{(S^o)} \xi_t^2 dS^o, \quad K_{vn}^o = E_b \int_{(S^o)} \xi_v \xi_n dS^o$$

В уравнениях равновесия элемента оси деформированного стержня

$$dF^b/ds + q^b = 0, \quad dB^b/ds + t \times F^b + m^b = 0 \quad (3.2)$$

На основании (1.27) — (1.29) с учетом третьего закона Ньютона можно принять (отождествляя ось стержня с краем срединной поверхности оболочки)

$$q^b = -Q_v + q^e, \quad m^b = -M_{vt} + m^e \quad (3.3)$$

где q^e, m^e — внешние нагрузки на стержень, приведенные к его деформированной оси.

Интегрируя уравнения (3.2), получим

$$F^b = F_0^b + F - F^e, \quad B^b = B_0^b + B - B^e \quad (3.4)$$

$$F = \int_{s_0}^{s_t} Q_v ds_t', \quad B = \int_{s_0}^{s_t} (M_{vv} t' + F \times t') ds_t'$$

$$F^e = \int_{s_0}^s q^e ds', \quad B^e = \int_{s_0}^s (m^e + F^e \times t') ds'$$

Соотношения (3.4) представляют собой преобразованные с использованием уравнений (3.2) статические условия сопряжения оболочки и стержня (3.3), традиционно используемые при расчете составных конструкций.

Перейдем к рассмотрению геометрических условий сопряжения. В соответствии с принятыми предположениями на деформацию стержня, соответствующую модифицированной гипотезе плоских сечений, накладываются малые сдвиги по Тимошенко. В целом переход ортов $\{v^\circ, t^\circ, n^\circ\}$ в $\{v^v, t^v, n^v\}$ осуществляется по формулам

$$v^v = \Omega_b^v \cdot Q_t \cdot v^\circ, \quad t^v = \Omega_b^v \cdot Q_t \cdot t^\circ, \quad n^v = \Omega_b^v \cdot Q_t \cdot n^\circ$$

$$\Omega_b^v = 1 + \omega_v^b (nt - tn) + \omega_n^b (tv - vt) \quad (3.5)$$

Отсюда следует, что тензор изменения кривизны можно представить так

$$K_b^v = d(\Omega_b^v \cdot Q_t) / ds = [\kappa_n^b + (\lambda_0^{-1} - \lambda_s^{-1}) \tau_t^\circ] (vn^\circ - nv^\circ) -$$

$$- [\kappa_n^b - \omega_v^{b'} - (\lambda_0^{-1} - \lambda_s^{-1}) \sigma_t^\circ] (nt^\circ - tn^\circ) -$$

$$- [\kappa_n^b - \omega_n^{b'} - (\lambda_0^{-1} - \lambda_s^{-1}) \rho_t^\circ] (tv^\circ - vt^\circ) \quad (3.6)$$

Учитывая, что стержень деформируется совместно с краем оболочки, следует принять $K^b = K_t^v$, $\lambda_s = \lambda_t$ или

$$\kappa_n^b - \omega_v^{b'} = \kappa_n + (\lambda_0^{-1} - \lambda_s^{-1}) \sigma_t^\circ$$

$$\kappa_{tn}^b - \omega_n^{b'} = \kappa_{tn} + (\lambda_0^{-1} - \lambda_s^{-1}) \rho_t^\circ$$

$$\kappa_{tv}^b = \kappa_{tv} + \omega_v^{b'} - (\lambda_0^{-1} - \lambda_s^{-1}) \tau_t^\circ$$

$$\lambda_s = \lambda_t = 1 + \varepsilon_n \quad (3.7)$$

В соответствии с (1.29) при сопряжении оболочки со стержнем необходимо обеспечить непрерывность дополнительного, обусловленного поперечным сдвигом, угла поворота. Согласно фигуре имеем

$$\omega_v^b = -\omega_t \quad (3.8)$$

Исключая с помощью соотношений (3.4), (3.7) и (3.8) параметры напряженно-деформированного состояния стержня из соотношений (3.1), находим

$$- \lambda_0^2 \lambda_s^3 [(\kappa_n + \lambda_0^{-1} \sigma_t^\circ - \lambda_t^{-1} \sigma_t^\circ) K_v^\circ - (\kappa_{tn} + \lambda_0^{-1} \rho_t^\circ - \lambda_t^{-1} \rho_t^\circ) K_{vn}^\circ] =$$

$$= v \cdot (B_0^b + B - B^e)$$

$$- \lambda_0^2 \lambda_s^3 [(\kappa_{tn} + \lambda_0^{-1} \rho_t^\circ - \lambda_t^{-1} \rho_t^\circ) K_n^\circ - (\kappa_n + \lambda_0^{-1} \sigma_t^\circ - \lambda_t^{-1} \sigma_t^\circ) K_{vn}^\circ] =$$

$$= n \cdot (B_0^b + B - B^e)$$

$$\lambda_0^2 \lambda_t [\kappa_{tv} + \omega_v^{b'} - (\lambda_0^{-1} - \lambda_t^{-1}) \tau_t^\circ] K_t^\circ = t \cdot (B_0^b + B - B^e) \quad (3.9)$$

$$1/2 (1 + \lambda_t) \lambda_t \varepsilon_n C_t = t \cdot (F_0^b + F - F^e)$$

$$\lambda_0^2 \lambda_t \omega_t C_n = n \cdot (F_0^b + F - F^e) \quad (\lambda_0^2 = 1 - \nu_b (\lambda_t^2 - 1))$$

В формулах (3.9), связывающих параметры напряженно-деформированного

состояния оболочки, стержень «участвует» лишь своими жесткостями и действующими на него нагрузками. Поэтому эти пять соотношений естественно называть граничными условиями подкрепленного края для уточненной по Тимошенко нелинейной теории оболочек. Очевидно, что при $\lambda_0 = \lambda_1 = 1$, $\omega^1 = \omega^2 = 0$ соотношения (3.9) формально совпадают с граничными условиями (15.28) [13], выведенными непосредственно для линейной теории оболочек.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 94-01-00375.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черных К. Ф. О сопряженных задачах теории тонких оболочек//Докл. АН СССР. 1957. Т. 117. №6. С. 949—951.
2. Михайловский Е. И., Черных К. Ф. О некоторых особенностях деформационного варианта граничных величин//Изв. АН СССР. МТТ. 1985. №2. С. 155—162.
3. Михайловский Е. И. Расчленение граничных условий на подкрепленном краю оболочки//Исследования по упругости и пластичности. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1968. Сб. 7. С. 13—27.
4. Михайловский Е. И. Линейные уравнения термостатики ребристых оболочек//Изв. АН СССР. МТТ. 1984. №2. С. 152—159.
5. Черных К. Ф. Нелинейная теория изотропно упругих тонких оболочек//Изв. АН СССР. МТТ. 1980. №2. С. 148—159.
6. Черных К. Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение. 1986. 336 с.
7. Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates//J. Appl. Mech. 1945. V. 12. №2. P. 69—77.
8. Айнола Л. Я. Нелинейная теория типа Тимошенко для упругих оболочек//Изв. АН Эст. ССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1965. Т. 14. №3. С. 337—344.
9. Галимов К. З. Нелинейная теория тонких оболочек типа Тимошенко//Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975. Вып. 11. С. 92—126.
10. Галимов К. З. К нелинейной теории тонких оболочек типа Тимошенко//Изв. АН СССР. МТТ. 1976. №4. С. 155—166.
11. Теория оболочек с учетом поперечного сдвига/Под ред. К. З. Галимова. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1977. 212 с.
12. Черных К. Ф. Теория тонких оболочек из эластомеров (резино-подобных материалов)//Успехи механики. 1983. Т. 6. Вып. 1/2. С. 111—147.
13. Новожилов В. В., Черных К. Ф., Михайловский Е. И. Линейная теория тонких оболочек. Л.: Политехника, 1991. 656 с.
14. Новожилов В. В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.

Сыктывкар

Поступила в редакцию
1.IV.1993