

УДК 539.3

© 1995 г. В. В. ПИКУЛЬ

**ФИЗИЧЕСКИ КОРРЕКТНЫЕ МОДЕЛИ
 МАТЕРИАЛА УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК**

При построении теорий упругих оболочек неизбежно нарушение уравнений теории упругости [1]. Физически корректная теория упругих оболочек может быть построена в случае внесения соответствующих изменений в уравнения закона Гука, связывающих поперечные компоненты тензора деформаций с компонентами тензора напряжений [2]. Для этого используется метод минимизации решения уравнений теории упругости в рамках принятых допущений [3]. Однако при этом оказывается скрытой физическая сущность уравнений состояния теории оболочек и остается неизвестной погрешность построенной теории. В настоящей статье вывод уравнений состояния упругих оболочек производится на базе законов термодинамики. Приводятся простейшие модели материала оболочечного тела, учитывающие поперечные деформации и находится верхняя оценка точности математической модели упругих оболочек и теории оболочек в целом.

1. Смешанный термодинамический потенциал упругой среды. Если не учитывать эффекты электрической поляризации и намагничивания, то уравнение притока тепла упругой среды, заменяющее собой закон сохранения энергии [4], можно записать в виде

$$dU = \sigma^i d\epsilon_{ij} + TdS \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

где приведены отнесенные к единице объема: U — плотность внутренней энергии, σ^i — контрвариантные компоненты тензора напряжений, ϵ_{ij} — ковариантные компоненты тензора деформаций, T — температура, S — энтропия. Вычтем из обеих частей уравнения полный дифференциал функции $\varphi = \sigma^{\alpha 3} \epsilon_{\alpha 3} + \sigma^{3j} \epsilon_{3j} + TS$ ($\alpha = 1, 2$) полагая, что φ является функцией независимых параметров $T, S, \sigma^{\alpha 3}, \sigma^{3j}, \epsilon_{\alpha 3}$ и ϵ_{3j} , и введем обозначение

$$\Psi = U - TS - (\sigma^{\alpha 3} \epsilon_{\alpha 3} + \sigma^{3j} \epsilon_{3j}) \quad (1.2)$$

Тогда уравнение притока тепла приведет к виду

$$d\Psi \equiv \sigma^{\alpha\beta} d\epsilon_{\alpha\beta} - (\epsilon_{\alpha 3} d\sigma^{\alpha 3} + \epsilon_{3j} d\sigma^{3j}) - SdT \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \quad (1.3)$$

Если за независимые параметры упругой среды принять тангенциальные компоненты тензора деформаций $\epsilon_{\alpha\beta}$, поперечные компоненты тензора напряжений $\sigma^{\alpha 3}, \sigma^{3j}$ и температуру T , то введенную соотношением (1.2) функцию Ψ можно рассматривать в качестве смешанного термодинамического потенциала упругой среды. Действительно, в этом случае полный дифференциал функции Ψ совпадает с уравнением притока тепла в форме (1.3) и его можно представить в виде

$$d\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial\epsilon_{\alpha\beta}} d\epsilon_{\alpha\beta} + \frac{\partial\Psi}{\partial\sigma^{\alpha 3}} d\sigma^{\alpha 3} + \frac{\partial\Psi}{\partial\sigma^{3j}} d\sigma^{3j} + \frac{\partial\Psi}{\partial T} dT \quad (1.4)$$

Сопоставляя (1.4) с (1.3), получим

$$\sigma^{\alpha\beta} = \frac{\partial\Psi}{\partial\epsilon_{\alpha\beta}}, \quad \epsilon_{\alpha 3} = -\frac{\partial\Psi}{\partial\sigma^{\alpha 3}}, \quad \epsilon_{3j} = -\frac{\partial\Psi}{\partial\sigma^{3j}}, \quad S = -\frac{\partial\Psi}{\partial T} \quad (1.5)$$

Смешанный термодинамический потенциал упругой среды Ψ можно выразить через свободную энергию F и термодинамический потенциал Гиббса G [5] соотношением

$$\Psi = F - (\sigma^{\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta} + \sigma^{3j}\epsilon_{3j}) = \sigma^{\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta} - G \quad (1.6)$$

Это позволяет получить еще две эквивалентные формы полного дифференциала для смешанного потенциала Ψ :

$$d\Psi = dF - d(\sigma^{\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta} + \sigma^{3j}\epsilon_{3j}) \quad (1.7)$$

$$d\Psi = d(\sigma^{\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta}) - dG \quad (1.8)$$

Подставив в соотношения (1.7) и (1.8) выражения полных дифференциалов dF и dG [5], найдем

$$d\Psi = \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{\alpha\beta}} d\epsilon_{\alpha\beta} + \left(\frac{\partial F}{\partial \epsilon_{\alpha\beta}} - \sigma^{\alpha\beta} \right) d\epsilon_{\alpha\beta} + \left(\frac{\partial F}{\partial \epsilon_{3j}} - \sigma^{3j} \right) d\epsilon_{3j} - \epsilon_{\alpha\beta} d\sigma^{\alpha\beta} - \epsilon_{3j} d\sigma^{3j} + \frac{\partial F}{\partial T} dT = \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{\alpha\beta}} d\epsilon_{\alpha\beta} - (\epsilon_{\alpha\beta} d\sigma^{\alpha\beta} + \epsilon_{3j} d\sigma^{3j}) + \frac{\partial F}{\partial T} dT \quad (1.9)$$

$$d\Psi = \sigma^{\alpha\beta} d\epsilon_{\alpha\beta} + \left(\epsilon_{\alpha\beta} - \frac{\partial G}{\partial \sigma^{\alpha\beta}} \right) d\sigma^{\alpha\beta} - \frac{\partial G}{\partial \sigma^{\alpha\beta}} d\sigma^{\alpha\beta} - \frac{\partial G}{\partial \sigma^{3j}} d\sigma^{3j} - \frac{\partial G}{\partial T} dT = \sigma^{\alpha\beta} d\epsilon_{\alpha\beta} - \frac{\partial G}{\partial \sigma^{\alpha\beta}} d\sigma^{\alpha\beta} - \frac{\partial G}{\partial \sigma^{3j}} d\sigma^{3j} - \frac{\partial G}{\partial T} dT \quad (1.10)$$

Сопоставление четырех форм одного и того же значения полного дифференциала (1.3), (1.4), (1.9) и (1.10) позволяет представить независимые параметры состояния смешанного потенциала Ψ следующими соотношениями:

$$\sigma^{\alpha\beta} = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{\alpha\beta}} = \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{\alpha\beta}}, \quad \epsilon_{\alpha\beta} = - \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma^{\alpha\beta}} = \frac{\partial G}{\partial \sigma^{\alpha\beta}} \\ \epsilon_{3j} = - \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma^{3j}} = \frac{\partial G}{\partial \sigma^{3j}}, \quad S = - \frac{\partial \Psi}{\partial T} = - \frac{\partial F}{\partial T} = \frac{\partial G}{\partial T} \quad (1.11)$$

Воспользовавшись известными значениями свободной энергии и термодинамического потенциала Гиббса [5], получим уравнения состояния физически линейной упругой среды в виде

$$\sigma^{\alpha\beta} = E_T^{\alpha\beta kl} \epsilon_{kl} - \beta^{\alpha\beta} \theta; \quad \epsilon_{3j} = \epsilon_{3j} = C_{3kl}^T \sigma^{kl} + \alpha_{3j} \theta \\ S = \beta^{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} + \alpha_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta} + \alpha_{3j} \sigma^{3j} + (\alpha_{\alpha\beta} \beta^{\alpha\beta} + \alpha_{3j} \beta^{3j}) \theta + C_\epsilon \ln (T/T_0) \quad (1.12)$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2; i, j, k, l = 1, 2, 3)$$

где $E_T^{\alpha\beta kl}$, C_{3kl}^T — изотермические модули упругости и коэффициенты упругой податливости; θ — изменение температурного поля упругой среды; β^j , α_{ij} — коэффициенты температурных напряжений и температурного расширения упругой среды; C_ϵ — теплоемкость среды при постоянной деформации.

С помощью уравнений состояния (1.12) и соотношений (1.11) устанавливается явная форма смешанного термодинамического потенциала физически линейной упругой среды

$$\Psi = 1/2 E_T^{\alpha\beta kl} \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{kl} - \beta^{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} \theta - 1/2 (C_{\alpha\beta kl}^T \sigma^{\alpha\beta} \sigma^{kl} + C_{3jkl}^T \sigma^{3j} \sigma^{kl}) - \\ - (\alpha_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta} + \alpha_{3j} \sigma^{3j}) \theta - (\alpha_{\alpha\beta} \beta^{\alpha\beta} + \alpha_{3j} \beta^{3j}) \frac{\theta^2}{2} + C_\epsilon T (\theta/T - \ln (T/T_0)) \quad (1.13)$$

2. Общая математическая модель материала упругих оболочек. Из всех параметров состояния оболочечных тел наименьшее воздействие на напряженное

состояние оказывают поперечные компоненты тензора деформаций [2]. Это обстоятельство позволяет представить последние в виде приближенных зависимостей

$$\varepsilon_{3j}^n = \varepsilon_B^n = \sum_{r=0}^N f_{jr} \gamma_{B3}^r = f_{jr} \gamma_{B3}^r \quad (j = i = 1, 2, 3; r = 0, 1, \dots, N) \quad (2.1)$$

где f_{jr} — известные линейно независимые функции поперечной координаты z , с помощью которых задается наиболее вероятный характер изменения поперечных деформаций по толщине оболочечного тела или отдельных его слоев, как естественных так и искусственно выделенных из тела оболочки; γ_{B3}^r — искомые функции сдвига ($i = 1, 2$) и обжатия ($i = 3$), зависящие от тангенциальных координат x^α и времени t , которые могут относиться к оболочечному телу в целом или к отдельным его слоям; r — может представлять собой как порядковый номер разложения поперечных компонент тензора деформаций в усеченный ряд, так и нумерацию естественных и искусственных слоев.

Точные значения поперечных компонент тензора деформаций представим в виде

$$\varepsilon_{3j} = \varepsilon_B = f_{jr} \gamma_{B3}^r + \Delta \varepsilon_B \quad (j = i) \quad (2.2)$$

где через $\Delta \varepsilon_B$ обозначена погрешность приближенного представления поперечных компонент тензора деформаций в форме (2.1), которую будем называть невязкой.

Обратившись к смешанному термодинамическому потенциалу физически линейной упругой среды (1.13), получим на основании (1.5) уравнения состояния оболочечного тела в виде

$$\sigma^{\alpha\beta} = E_T^{\alpha\beta kl} \varepsilon_{kl} - \beta^{\alpha\beta} \theta, \quad \varepsilon_B = f_{jr} \gamma_{B3}^r + \Delta \varepsilon_B = C_{B3kl}^T \sigma^{kl} + \alpha_B \theta$$

$$S = \beta^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} + \alpha_{\alpha 3} \sigma^{\alpha 3} + \alpha_{3j} \sigma^{3j} + (\alpha_{\alpha 3} \beta^{\alpha 3} + \alpha_{3j} \beta^{3j}) \theta + C_\varepsilon \ln (T/T_0) \quad (2.3)$$

Во вторые уравнения (2.3) входят невязки $\Delta \varepsilon_B$. Для того, чтобы исключить их из уравнений состояния необходимы дополнительные уравнения или условия. При построении теории оболочек, как правило, на невязку не обращают никакого внимания, что означает приравнивание ее нулю $\Delta \varepsilon_B = 0$. Тем самым в уравнения состояния вносится какая-то погрешность.

Понизить погрешность уравнений состояния можно за счет минимизации невязок. Если за меру близости приближенного представления поперечных компонент тензора деформаций ε_B^n в форме (2.1) принять минимум среднеквадратического отклонения их от точных значений ε_B , то исключить невязки $\Delta \varepsilon_B$ из уравнений состояния (2.3) можно, подчинив невязки $\Delta \varepsilon_B$ условиям ортогональности ко всем линейно независимым функциям приближенного распределения поперечных деформаций по толщине оболочечного тела

$$\int_h \Delta \varepsilon_B f_{jr} dz = 0 \quad (2.4)$$

где h — толщина оболочки, которая может быть переменной величиной, зависящей от тангенциальных координат x^α .

Из второго уравнения (2.3) следует, что

$$\Delta \varepsilon_B = C_{B3kl}^T \sigma^{kl} + \alpha_B \theta - f_{jr} \gamma_{B3}^r \quad (2.5)$$

Подставив (2.5) в (2.4), исключим из уравнений состояния невязки и приведем уравнения состояния (2.3) к виду:

$$\sigma^{\alpha\beta} = E_T^{\alpha\beta kl} \varepsilon_{kl} - \beta^{\alpha\beta} \theta, \quad \int_h (C_{B3kl}^T \sigma^{kl} + \alpha_B \theta - f_{jr} \gamma_{B3}^r) f_{pq} dz = 0$$

$$(p = j = i, q = 0, \dots, N)$$

$$S = \beta^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} + \alpha_{\alpha 3} \sigma^{\alpha 3} + \alpha_{3j} \sigma^{3j} + (\alpha_{\alpha 3} \beta^{\alpha 3} + \alpha_{3j} \beta^{3j}) \theta + C_\varepsilon \ln (T/T_0) \quad (2.6)$$

Уравнения (2.6) представляют собой математическую модель материала оболочечного тела. Они выведены из уравнений притока тепла упругой среды (1.1) с помощью строгого математического аппарата. Поэтому уравнения (2.6) полностью соответствуют законам термодинамики, а математическая модель материала упругих оболочек, описываемая этими уравнениями, является физически корректной. Более того, ее уравнения имеют минимально возможные отклонения от точных уравнений состояния упругой среды. Условия ортогонализации (2.4) можно рассматривать как упорядочивание внутренних связей, накладываемых на поперечные деформации принятыми допущениями (2.1). Тогда математическая модель материала оболочечного тела может трактоваться, как уравнения состояния упругой среды с упорядоченными внутренними связями, которые обладают наибольшей возможной близостью к уравнениям состояния упругой среды, свободной от внутренних связей. В рамках допущения (2.1) применение уравнений (2.6) приводит к понижению размерности уравнений теории упругости при полном их удовлетворении [2, 3].

3. Простейшие модели материала оболочечных тел, учитывающие поперечные деформации. Известно, что поперечные компоненты тензора деформаций у однородных оболочек представляют собой непрерывно дифференцируемые функции, а у слоистых оболочек — кусочно дифференцируемые. Поэтому в случае, когда функции f_r образуют полную систему линейно независимых функций, представление поперечных компонент тензора деформаций в форме (2.1) стремится, как это следует из (2.4), к точным значениям при $N \rightarrow \infty$. Это обстоятельство позволяет строить математические модели материала оболочечных тел, которые сколь угодно мало отличаются от точных уравнений состояния упругой среды. Однако, чем меньше отличие, тем большее требуется количество функций сдвига и обжатия, тем больше окажется система разрешающих уравнений и тем труднее решение начально-краевых задач теории оболочек. Поэтому приходится ограничиваться небольшим количеством функций сдвига и обжатия. Точность решения задач теории оболочек при этом может быть оценена по влиянию невязок $\Delta \varepsilon_\beta$ на напряженно-деформированное состояние оболочечных тел.

Наиболее простая математическая модель материала оболочечного тела, учитывающая поперечные деформации, может быть получена из общей модели (2.6) на основе осреднения поперечных деформаций по толщине оболочки

$$r = 0: f_{r0} = 1; \quad r \neq 0: f_{rj} = 0; \quad \varepsilon_{3j}^n = \varepsilon_{\beta}^n = \gamma_{\beta} \quad (3.1)$$

$$\sigma^{\alpha\beta} = E^{\alpha\beta kl} \varepsilon_{kl}, \quad \int_{h} (C_{\beta\alpha k} \sigma^{kl} - \gamma_{\beta}) dz = 0 \quad (3.2)$$

Математическая модель материала (3.2), соответствующая представлению поперечных деформаций в форме (3.1), приведена без учета температурного влияния. Учет температурных эффектов может быть произведен с помощью температурных членов первых уравнений (2.6) с привлечением уравнения энтропии.

Применение математической модели в форме (3.2) приводит к теории оболочек, описываемой системой двумерных уравнений общего шестнадцатого порядка [3].

Если учесть криволинейный характер распределения поперечных деформаций по толщине оболочечного тела, то придется несколько усложнить математическую модель материала оболочки. В основу такой модели положим допущения

$$\varepsilon_{3\beta}^n = \varepsilon_{\alpha\beta}^n = \gamma_{\alpha\beta} + f_{v1} \gamma_{\alpha\beta}^1 \quad (v = \alpha = 1, 2), \quad \varepsilon_{33}^n = f_3 \gamma_{33} \quad (3.3)$$

Первое слагаемое в первом соотношении (3.3) обеспечивает физическую корректность теории оболочек в условиях жесткой заделки торцевых поверхностей [3]. Характер распределения деформаций поперечного сдвига по толщине оболочки задается функциями f_{v1} . На некотором удалении от краев и резких изменений толщины и нагрузки деформации поперечного сдвига по толщине однородных оболочек изменяются по кривым не намного отличающихся от квадратичной параболы [6], а характер изменения деформаций ε_{33} близок к кубической параболе [7].

При совмещении координатной поверхности со срединной поверхностью оболочки функции распределения поперечных деформаций по толщине однородной оболочки можно задать в виде

$$f_{v1} = 1 - 4z^2/h^2, \quad f_3 = 1 - z/h + 4z^3/h^3 \quad (3.4)$$

Для определения функций распределения поперечных деформаций по толщине слоистой оболочки воспользуемся непосредственной зависимостью поперечных деформаций от коэффициентов податливости: чем больше коэффициенты податливости, тем больше деформации. Ограничиваясь средними значениями поперечных деформаций в пределах каждого r -слоя, распределения f_{v1} и f_3 (3.3) зададим в виде ступенчатых функций, имеющих в пределах r -слоя постоянные значения

$$f_{v1}^r = C_{\alpha\beta 3}^{\circ} / C_{\alpha\beta 3}^r \quad (v = \alpha = \beta), \quad f_3^r = C_{3333}^{\circ} / C_{3333}^r \quad (3.5)$$

где градусом отмечены коэффициенты податливости наиболее жесткого слоя.

Математическая модель материала оболочки, соответствующая допущениям (3.3), находится из уравнений (2.6). Пренебрегая температурными эффектами, получим

$$\sigma^{\alpha\beta} = E^{\alpha\beta kl} \epsilon_{kl}, \quad \int_{-h}^h [C_{\alpha 3kl} \sigma^{kl} - (\gamma_{\alpha 3}^{\circ} + f_{v1} \gamma_{\alpha 3}^1)] dz = 0 \quad (3.6)$$

$$\int_{-h}^h [C_{\alpha 3kl} \sigma^{kl} - (\gamma_{\alpha 3}^{\circ} + f_{v1} \gamma_{\alpha 3}^1)] f_{\eta 1} dz = 0 \quad (\eta = v = \alpha),$$

$$\int_{-h}^h (C_{33kl} \sigma^{kl} - f_3 \gamma_{33}) f_3 dz = 0$$

Применительно к однородным оболочкам функции f_{v1} и f_3 , входящие в уравнения (3.6), определяются равенствами (3.4). Для слоистых оболочек используются соотношения (3.5).

Применение математической модели в форме (3.6) приводит к теории оболочек, описываемой системой двумерных уравнений общего двадцатого порядка [3].

4. Оценка точности простейшей математической модели материала оболочечного тела. Для оценки точности простейшей математической модели материала оболочечного тела (3.2) воспользуемся результатами анализа напряженно-деформированного состояния оболочек методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. Во внутренних точках оболочечного тела все компоненты напряженно-деформированного состояния могут быть представлены в виде асимптотических рядов, разложенных по малому параметру z/R , где R — характерный линейный размер оболочки. Он зависит от характера внешнего воздействия, кривизны срединной поверхности оболочки, анизотропии материала и так далее. Так например, для изотропных оболочек при статическом приложении внешних сил под R понимается наименьший радиус кривизны срединной поверхности оболочки [8].

Ограничиваясь однородными оболочками, разложим поперечные компоненты тензора деформаций в асимптотические ряды по малому параметру z/R , совместив координатную поверхность со срединной

$$\epsilon_{3j} = \epsilon_B = \sum_{r=0}^{\infty} \gamma_B^{(r)} \left(\frac{z}{R} \right)^r \quad (j = i) \quad (4.1)$$

В рамках представления поперечных компонентов тензоров деформаций в виде (4.1) математическая модель материала оболочечного тела (2.6) в случае пренебрежения температурными эффектами запишется следующим образом:

$$\sigma^{\alpha\beta} = E^{\alpha\beta kl} \epsilon_{kl}, \quad \int_{-h}^h \left[C_{Bkl} \sigma^{kl} - \sum_r \gamma_B^{(r)} \left(\frac{z}{R} \right)^r \right] \left(\frac{z}{R} \right)^t dz = 0 \quad (t = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.2)$$

Принтегрировав вторые уравнения (4.2), получим следующие асимптотические представления

$$\begin{aligned} \int C_{\beta\mu} \sigma^{\mu} dz &= h \left[\gamma_{\beta}^{(0)} + \frac{1}{12} \gamma_{\beta}^{(2)} \left(\frac{h}{R}\right)^2 + \frac{1}{80} \gamma_{\beta}^{(4)} \left(\frac{h}{R}\right)^4 + \dots \right] \\ \int C_{\beta\mu} \sigma^{\mu} \frac{z}{R} dz &= h \left[\frac{1}{12} \gamma_{\beta}^{(1)} \left(\frac{h}{R}\right)^2 + \frac{1}{80} \gamma_{\beta}^{(3)} \left(\frac{h}{R}\right)^4 + \dots \right] \\ \int C_{\beta\mu} \sigma^{\mu} \left(\frac{z}{R}\right)^t dz &= h \sum_r \frac{\gamma_{\beta}^{(r)}}{(r+t+1) 2^{r+t+1}} \left[\left(\frac{h}{R}\right)^{r+t+1} - \left(-\frac{h}{R}\right)^{r+t+1} \right] \end{aligned} \quad (4.3)$$

Простейшей математической модели материала оболочечного тела (3.2) соответствуют нулевые члены разложения (4.1). Непосредственно из уравнений (4.3) видно, что пренебрежение всеми членами разложения по сравнению с нулевыми дает наибольшую погрешность порядка h^2/R^2 . Отсюда следует, что асимптотическая погрешность простейшей математической модели материала оболочечного тела (3.2) имеет порядок $O(h^2/R^2)$. Поскольку применение математической модели (3.2) в рамках допущений (3.1) обеспечивает полное удовлетворение всех остальных уравнений теории упругости [2, 3], то теория однородных оболочек, построенная на базе допущений (3.1), имеет такую же асимптотическую погрешность $O(h^2/R^2)$.

Полученная оценка легко обобщается на дискретную теорию оболочек, у которой каждый слой рассматривается в качестве самостоятельной однородной оболочки, сопряженной с соседними слоями по поверхностям раздела [2]. При использовании дискретной теории на базе математической модели материала каждого слоя в форме (3.2) асимптотическая погрешность математической модели материала оболочечного тела и дискретной теории оболочек имеет порядок $O(h_m^2/R^2)$, где h_m — толщина наиболее толстого слоя. Если оболочку разбить на n естественных или искусственных однородных слоев одинаковой толщины, то асимптотическая погрешность дискретной теории оболочек окажется равной: $h^2/(nR)^2$, где h — толщина оболочки в целом. Разбивая оболочку на достаточно большое количество однородных слоев, можно на базе простейшей модели материала (3.2) строить модели оболочечных тел, обладающих любой требуемой точностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
2. Пикуль В. В. К проблеме построения физически корректной теории оболочек // Изв. АН. МТТ. 1992. № 3. С. 18—25.
3. Пикуль В. В. Прикладная механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1989. 221 с.
4. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2: М.: Наука, 1984. 560 с.
5. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
6. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
7. Тимошенко С. П., Гудьер Д. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
8. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.

Владивосток

Поступила в редакцию
8.11.1993