

УДК 539.375

© 1995 г. Л. В. СТЕПАНОВА, С. А. ШЕСТЕРИКОВ

## АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ У ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДРОБНО-ЛИНЕЙНОГО ЗАКОНА ПОЛЗУЧЕСТИ

Приведено точное решение задачи об антиплоском сдвиге пространства, содержащего разрез в координатной плоскости. Для связи между скоростями деформации и напряжениями использованы соотношения, обобщающие дробно-линейное выражение. Результаты анализа полученного решения показали, что поля напряжений около вершины трещины соответствуют полям идеально-пластического тела. Для скоростей деформаций получена асимптотика по радиальной координате. Показано, что степень сингулярности зависит от угла наклона радиуса к разрезу.

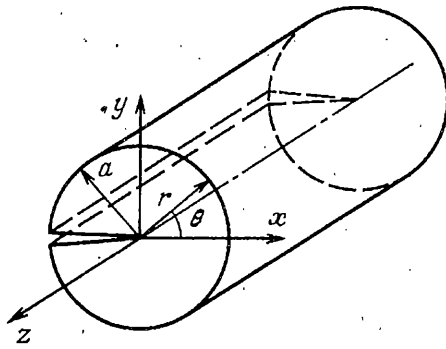
Выполнено исследование граничных условий, соответствующих полученному точному решению задачи об антиплоском сдвиге. Показано, что все напряжения стремятся к нулю при стремлении радиуса к бесконечности. В то же время при переходе для каждого направления с ограниченным расстоянием от вершины трещины поле касательных напряжений соответствует приложению на бесконечности бесконечного крутящего момента. Этот результат имеет место и для решения задачи об антиплоском сдвиге линейноупругого тела.

1. Общая проблема оценки прочности элементов конструкций требует решения большого класса частных задач, среди которых существенное значение имеют исследования, связанные с оценкой полей напряжений и деформаций у трещин и трещиноподобных дефектов при различных видах напряженного состояния для разных типов определяющих соотношений.

Известно, что одной из характерных особенностей линейной механики разрушения является тот факт, что в окрестности вершины трещины поля напряжений имеют неустранимую особенность. Ввиду того, что при решении конкретных задач приходится выделять сингулярные слагаемые, исследовать их характер и формулировать условие разрушения или критерий распространения трещины на основе задания критических значений для коэффициентов при этой сингулярности, критическое условие связывается не с достаточно ясным параметром типа напряжения или некоторой конфигурацией от напряжения, а рассматривается некоторый критический коэффициент и условия дальнейшего поведения изучаемого элемента связываются уже только с этим коэффициентом, не имеющим четкого физического значения.

Другой характерной особенностью рассматриваемого процесса является задача достаточно адекватного описания физического закона связи деформационных и силовых характеристик изучаемой среды. Этой проблеме, особенно для реономных сред, в последнее время уделяется существенное внимание, так как формулировка этих соотношений во многом определяет как характер получаемых решений, так и возможность их практического использования при решении конкретных задач. В этом направлении определенным интересом представляет попытка использования дробно-линейных и обобщающих их зависимостей для аналитической записи связи между используемыми параметрами.

Ниже приводится исследование, в котором изучаются некоторые особенности решения задачи о трещине с использованием реономного дробно-линейного со-



Фиг. 1

отношения. Показано, что получаемое решение позволяет взглянуть на сформулированные проблемы с несколько иных позиций.

2. Рассмотрим проблему определения полей напряжений и деформаций у вершины трещины в случае антиплоского сдвига при использовании дробно-линейной зависимости между напряжениями и скоростями деформаций

$$\dot{\gamma} = A \frac{\tau}{\tau_* - \tau} \quad (2.1)$$

где  $\dot{\gamma}$  — интенсивность скоростей деформаций,  $\tau$  — интенсивность напряжений,  $A$ ,  $\tau_*$  — константы материала. Постоянная  $\tau_*$  может трактоваться как некоторая обобщенная характеристика длительной прочности на выбранном отрезке времени работы рассматриваемого элемента конструкции. Можно также рассматривать  $\tau_*$  как характеристику мгновенной прочности, находимую из прямых опытов на одноосное разрушение. В любом случае значение  $\tau_*$  определяется достаточно надежно и имеет четкий физический смысл. Параметр  $A$  является скоростной характеристикой и определяется реологией рассматриваемых процессов. При обработке конкретных экспериментальных данных оба параметра определяются достаточно устойчиво.

Нелинейные уравнения задачи продольного сдвига можно привести к линейным уравнениям с переменными коэффициентами, используя метод годографа. Использование этого метода позволяет решить задачу аналитически. Отметим, что как следует из дальнейшего важным моментом решения этой задачи является зависимость характера сингулярности для скоростей деформаций от угла  $\theta$ , где  $\theta$  — полярный угол в физической плоскости.

Известно, что в случае дробно-линейной аппроксимации напряжения являются ограниченными величинами и только скорости деформаций имеют сингулярность. Оказывается, что характер сингулярности имеет вид  $\epsilon_{ij} \sim r^{-k}$ , где  $k$  зависит от угла и меняется от 1 до 1/2.

Перейдем к анализу внешних условий для трещины антиплоского сдвига. Рассмотрим круговой цилиндр конечной длины с трещиной (фиг. 1). Если цилиндр нагружен по боковой поверхности вдоль образующих, то на этой поверхности имеем при  $r = a$   $\tau_{rz}(\theta) = T$ . Выпишем решение задачи для антиплоского ( $u = v = 0$ ,  $w = w(r, \theta)$ ) деформирования. Удовлетворим уравнениям теории линейной упругости. Решение системы уравнений равновесия и совместности

$$\frac{\partial}{\partial r}(r, \tau_{rz}) + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta}(\gamma_{rz}) = \frac{\partial}{\partial r}(r\gamma_{\theta z}) \quad (2.2)$$

с граничным условием на поверхностях трещины  $\tau_{\theta z} = 0$  ( $\theta = \pm \pi$ ) хорошо известно

$$w(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n r^{(2n-1)/2} \sin\left(\frac{2n-1}{2}\theta\right) \quad (2.3)$$

$$\tau_{rz}(r, \theta) = \frac{G}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) D_n r^{(2n-3)/2} \sin\left(\frac{2n-1}{2}\theta\right) \quad (2.4)$$

$$\tau_{\theta z}(r, \theta) = \frac{G}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) D_n r^{(2n-3)/2} \cos\left(\frac{2n-1}{2}\theta\right) \quad (2.5)$$

где  $G$  — модуль сдвига.

В решении (2.3)—(2.5) обычно выписывают слагаемые, преобладающие в окрестности вершины трещины

$$w(r, \theta) = D_1 r^{1/2} \sin(\theta/2) \quad (2.6)$$

$$\tau_{rz}(r, \theta) = 1/2 G D_1 r^{-1/2} \sin(\theta/2) \quad (2.7)$$

$$\tau_{\theta z}(r, \theta) = 1/2 G D_1 r^{-1/2} \cos(\theta/2) \quad (2.8)$$

Примем, что для исследуемого конечного цилиндра на его поверхности действуют напряжения соответственно (2.4), (2.5). Легко показать, что цилиндр будет находиться в равновесии. Момент относительно оси  $x$ , который дает напряжение  $\tau_{rz}$  на боковой поверхности, дается формулой

$$M_{rz} = \int_{-\pi}^{\pi} L a d\theta \tau_{rz} a \sin \theta = 4GL \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1) a^{(2n+1)/2}}{(3-2n)(2n+1)} D_n \quad (2.9)$$

где  $L$  — длина цилиндра,  $a$  — радиус поперечного сечения цилиндра. Моменты относительно горизонтальной оси, которые дают напряжения  $\tau_{rz}$  и  $\tau_{\theta z}$  на торцах, определяются формулами

$$M'_{rz} = L \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^a \tau_{rz} \sin \theta r dr d\theta = 8LG \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n-1}{(3-2n)(2n+1)^2} D_n a^{(2n+1)/2} \quad (2.10)$$

$$M_{\theta z} = L \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^a \tau_{\theta z} \cos \theta r dr d\theta = 4LG \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)^2 D_n}{(3-2n)(2n+1)^2} a^{(2n+1)/2} \quad (2.11)$$

Очевидно  $M_{rz} = M'_{rz} + M_{\theta z}$ .

Теперь устремим  $r \rightarrow \infty$ ,  $z \rightarrow \infty$ . В этом случае уравнения равновесия и совместности, граничные условия на поверхностях трещины будут прежними. А в решении (2.4), (2.5) следует оставить только те слагаемые, которые дают конечные значения для касательных напряжений  $\tau_{rz}$  и  $\tau_{\theta z}$  при  $r \rightarrow \infty$ .

Таким образом, точным решением задачи о полубесконечной трещине антиплоского сдвига в координатной плоскости упругого пространства будет

$$w = D_1 r^{1/2} \sin(\theta/2) \quad (2.12)$$

$$\tau_{rz} = 1/2 G D_1 r^{-1/2} \sin 1/2\theta \quad (2.13)$$

$$\tau_{\theta z} = 1/2 G D_1 r^{-1/2} \cos 1/2\theta \quad (2.14)$$

Поскольку в случае конечного цилиндра напряжения на боковой поверхности давали момент, компенсируемый моментом, который давал напряжения на торце, то возникает необходимость задания условия на бесконечности. Рассмотрим совокупность поверхностей при переходе на бесконечность не только по  $r$ , но и по  $z$ . Естественно задать асимптотику на бесконечности следующим образом:

$$\tau_{rz} \rightarrow 1/2 G D_1 r^{-1/2} \sin 1/2\theta, \quad \tau_{\theta z} \rightarrow 1/2 G D_1 r^{-1/2} \cos 1/2\theta \quad (2.15)$$

Очевидно, что при  $r \rightarrow \infty$  имеем отсутствие на бесконечности напряжений. Однако, при конечном значении  $r$  эти формулы дают напряжения, отличные от

нуля. Эти соображения будут использованы при рассмотрении полубесконечной трещины антиплоского сдвига.

Рассмотрим трещину антиплоского сдвига, когда перемещения происходят только в направлении, перпендикулярном плоскости, содержащей трещину или вырез. Если оси  $x$  и  $y$  лежат в указанной плоскости, а ось  $z$  направлена перпендикулярно, то это означает, что компонента перемещения в направлении  $z$ ,  $w = w(x, y)$ , является единственным отличным от нуля перемещением. Все компоненты деформации тождественно равны нулю, кроме продольных сдвигов  $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$ . Вводя обозначения  $\gamma_x = \gamma_{xz}$  и  $\gamma_y = \gamma_{yz}$ , имеем

$$\gamma_x = \partial w / \partial x, \quad \gamma_y = \partial w / \partial y \quad (2.16)$$

Уравнение равновесия и совместности будут прежними, однако для удобства использования метода, который применим далее, удобнее записать эти уравнения в декартовых координатах

$$\partial \tau_x / \partial x + \partial \tau_y / \partial y = 0 \quad (2.17)$$

$$\partial \gamma_x / \partial y - \partial \gamma_y / \partial x = 0 \quad (2.18)$$

Соответственно соотношения между напряжениями и скоростями деформаций [4], которые используются далее можно записать в виде

$$\gamma_x = A \frac{\tau_x}{\tau_* - \tau}, \quad \gamma_y = A \frac{\tau_y}{\tau_* - \tau} \quad (2.19)$$

$$\tau_x = \tau_* \frac{\gamma_x}{A + \gamma_x}, \quad \tau_y = \tau_* \frac{\gamma_y}{A + \gamma_y} \quad (2.20)$$

$$\tau = (\tau_x^2 + \tau_y^2)^{1/2}, \quad \gamma = (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^{1/2}$$

где  $\tau$  и  $\gamma$  — интенсивности касательных напряжений и скоростей деформаций соответственно.

В общем случае задача свелась к системе нелинейных уравнений (2.17) — (2.20), которая должна быть решена с учетом граничного условия: при  $y = 0$  ( $x < 0$ )  $\tau_y = 0$  — требование отсутствия напряжений на нижней и верхней поверхностях трещины. По аналогии с задачей о цилиндре с трещиной на бесконечности (но не вдоль оси  $z$ ) должно быть задано дополнительное граничное условие.

По мере удаления от вершины трещины, т. е. при  $z \rightarrow \infty$ , напряжения будут уменьшаться. Тогда при малых напряжениях зависимость (2.1) может быть заменена линейной зависимостью между интенсивностью скоростей деформаций и интенсивностью касательных напряжений. Для линейной зависимости можно воспользоваться асимптотикой на бесконечности из решения упругой задачи для цилиндра с трещиной

$$\tau_{rz} \rightarrow -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi}} r^{-1/2} \sin \frac{\theta}{2}, \quad \tau_{\theta z} \rightarrow \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi}} r^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2} \quad (2.21)$$

где  $K_{III}$  — коэффициент интенсивности напряжений.

Для решения задачи удобно перейти от размерных величин к безразмерным. Для этого введем следующие обозначения:

$$\tau_x^v = \tau_x / \tau_*, \quad \tau_y^v = \tau_y / \tau_*, \quad \tau^v = \tau / \tau_*, \quad \gamma_x^v = \gamma_x / A, \quad \gamma_y^v = \gamma_y / A$$

$$\gamma^v = \gamma / A, \quad x^v = x / L, \quad y^v = y / L, \quad r^v = r / L, \quad L = (K_{III} / \tau_*)^2 \quad (2.22)$$

В новых обозначениях основные уравнения принимают вид, где галочка опущена:

уравнение совместности

$$\partial \gamma_x^v / \partial y^v - \partial \gamma_y^v / \partial x^v = 0 \quad (2.23)$$

уравнение равновесия

$$\partial \tau_x / \partial x + \partial \tau_y / \partial y = 0 \quad (2.24)$$

соотношения между напряжениями и скоростями деформаций

$$\dot{\gamma}_x = \tau_x / (1 - \tau), \quad \dot{\gamma}_y = \tau_y / (1 - \tau) \quad (2.25)$$

$$\tau_x = \dot{\gamma}_x / (1 + \dot{\gamma}), \quad \tau_y = \dot{\gamma}_y / (1 + \dot{\gamma}) \quad (2.26)$$

Граничные условия будут

$$\tau_y = 0 \text{ при } y = 0 \text{ (} x < 0 \text{)} \quad (2.27)$$

Асимптотическое условие на бесконечности имеет вид ( $r \rightarrow \infty$ ):

$$\tau_x \rightarrow - \frac{\sin \theta / 2}{(2\pi r)^{1/2}}, \quad \tau_y \rightarrow \frac{\cos \theta / 2}{(2\pi r)^{1/2}} \quad (2.28)$$

3. Нелинейные уравнения задач продольного сдвига (2.23)—(2.26) можно привести к линейным уравнениям, если физические величины рассмотреть как функции от скоростей деформаций или, что эквивалентно, от напряжений. Это означает, что  $x = x(\dot{\gamma}_x, \dot{\gamma}_y)$  и  $y = y(\dot{\gamma}_x, \dot{\gamma}_y)$  или  $x = x(\tau_x, \tau_y)$  и  $y = y(\tau_x, \tau_y)$ .

Тогда уравнение совместности принимает вид

$$\partial x / \partial \dot{\gamma}_y - \partial y / \partial \dot{\gamma}_x = 0 \quad (3.1)$$

во всех точках плоскости скоростей деформаций, где якобиан преобразования не обращается в нуль (т. е. во всех точках, где конечная площадь или дуга в физической плоскости не отображается в точку в плоскости деформаций). Аналогично, рассматривая напряжения как независимые переменные, из уравнения равновесия (2.24) получим

$$\partial x / \partial \tau_x + \partial y / \partial \tau_y = 0 \quad (3.2)$$

Уравнение совместности будет удовлетворительно, если положить

$$x = \partial \Phi / \partial \dot{\gamma}_x, \quad y = \partial \Phi / \partial \dot{\gamma}_y \quad (3.3)$$

где  $\Phi$  — некоторая функция компонент скорости деформаций. Подставляя эти выражения в уравнение равновесия и используя соотношения между напряжениями и скоростями деформаций, получим для  $\Phi$  линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами. Наиболее простой вид оно принимает в полярных координатах в плоскости скоростей деформаций. Пусть  $\varphi$  — угол между направлением оси  $y$  и направлением  $\dot{\gamma}$ , измеряемый против часовой стрелки, тогда

$$\dot{\gamma} e^{i\varphi} = \dot{\gamma}_y - i \dot{\gamma}_x, \quad \tau e^{i\varphi} = \tau_y - i \tau_x \quad (3.4)$$

Если потенциал  $\Phi$  в плоскости скоростей деформации выражен через  $\dot{\gamma}$ , то соотношения (3.3) можно записать в виде

$$x = - \sin \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\gamma}} - \frac{\cos \varphi}{\dot{\gamma}} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \quad y = \cos \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\gamma}} - \frac{\sin \varphi}{\dot{\gamma}} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \quad (3.5)$$

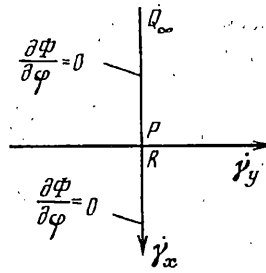
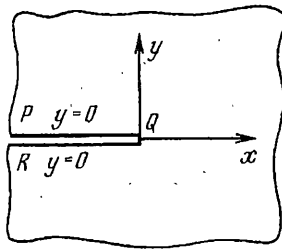
При этом уравнение равновесия (3.2) удовлетворяется, если

$$\frac{\tau(\dot{\gamma})}{\dot{\gamma} \tau'(\dot{\gamma})} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \dot{\gamma}^2} + \frac{1}{\dot{\gamma}} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\gamma}} + \frac{1}{\dot{\gamma}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (3.6)$$

$$\tau'(\dot{\gamma}) = d\tau/d\dot{\gamma}$$

Геометрический вид отображенной физической плоскости на плоскость скоростей деформаций определяется с учетом направления вектора скорости деформаций в различных точках вдоль границы (фиг. 2).

Поле деформаций для полубесконечной трещины отображается на полупло-



Фиг. 2

скорость скоростей деформаций, определяемую соотношениями  $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ . Так как на трещине  $y=0$ , то из (3.5) следует, что  $\partial\Phi/\partial\varphi = 0$  при  $\varphi = \pm \pi/2$ . Особенность деформаций вблизи трещины отображается в бесконечно удаленную точку плоскости скоростей деформаций, и, поскольку в конце трещины  $x=y=0$ , производные от  $\Phi$  стремятся к нулю на бесконечности. Условие (2.31) приводит к особенности в начале координат плоскости скоростей деформаций

$$x - iy = -e^{-i\varphi} \left( \frac{1}{\dot{\gamma}} \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} + i \frac{\partial\Phi}{\partial\dot{\gamma}} \right) \rightarrow \frac{e^{-2i\varphi}}{2\pi\dot{\gamma}^2}, \quad \dot{\gamma} \rightarrow 0 \quad (3.7)$$

или

$$\Phi \rightarrow -1/2 \sin \varphi / (\pi\dot{\gamma}) \text{ при } \dot{\gamma} \rightarrow 0 \quad (3.8)$$

Решение ищется в виде

$$\Phi(\dot{\gamma}, \varphi) = \Gamma(\dot{\gamma}) Z(\varphi) \quad (3.9)$$

Подставляя  $\Phi(\dot{\gamma}, \varphi) = \Gamma(\dot{\gamma}) Z(\varphi)$  в (3.6), имеем

$$\frac{\tau}{\dot{\gamma}\tau'} Z\Gamma'' + \frac{1}{\dot{\gamma}} Z\Gamma' + \frac{1}{\dot{\gamma}^2} \Gamma Z'' = 0 \quad (3.10)$$

Из (3.10) получается система

$$\dot{\gamma}\tau'\Gamma'' + \dot{\gamma}\Gamma' = \lambda^2\tau\Gamma, \quad z'' + \lambda^2z = 0 \quad (3.11)$$

Решением второго уравнения является функция

$$Z = A \cos(\lambda\varphi) + B \sin(\lambda\varphi) \quad (3.12)$$

Из граничных условий следует, что коэффициент при  $\cos(\lambda\varphi)$  должен обращаться в нуль. Поэтому если теперь искать решения для  $\Phi$  в виде произведения  $\sin \varphi$  на функцию от  $\dot{\gamma}$ , то граничные условия на образе поверхностей трещины будут автоматически выполняться и задача сведется к нахождению функции от  $\dot{\gamma}$ , удовлетворяющей дифференциальному уравнению (3.6) и заданным граничным условиям.

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функция

$$\Phi = -\frac{\dot{\gamma}}{\pi} \left[ \int_{\dot{\gamma}}^{\infty} \frac{du}{u^2\tau(u)} \right] \sin \varphi \quad (3.13)$$

является решением уравнения (3.6).

Уравнения (3.5) совместно с соотношением (3.13) дают следующие выражения для физических координат:

$$x = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\dot{\gamma}\tau(\dot{\gamma})} \cos 2\varphi + \left[ 2 \int_{\dot{\gamma}}^{\infty} \frac{du}{u^2\tau(u)} - \frac{1}{\dot{\gamma}\tau(\dot{\gamma})} \right] \right\} \quad (3.14)$$

$$y = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\dot{\gamma} \tau(\dot{\gamma})} \sin 2\varphi$$

Вычитая независимый от  $\varphi$  член из первого уравнения (3.14) и возводя в квадрат оба уравнения, а затем складывая их, можно найти уравнения линий постоянных скоростей деформаций  $\dot{\gamma}$  и напряжений

$$[x - X(\dot{\gamma})]^2 + y^2 = [R(\dot{\gamma})]^2 \quad (3.15)$$

представляющих собой круги с центрами на расстояниях

$$X(\dot{\gamma}) = \frac{1}{2\pi} \left[ 2 \int_{\dot{\gamma}}^{\infty} \frac{du}{u^2 \tau(u)} - \frac{1}{\dot{\gamma} \tau(\dot{\gamma})} \right] \quad (3.16)$$

от конца трещины и с радиусами

$$R(\dot{\gamma}) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\dot{\gamma} \tau(\dot{\gamma})} \quad (3.17)$$

Для дробно-линейной зависимости  $\tau = \dot{\gamma}/(1 + \dot{\gamma})$  потенциал  $\Phi$  будет иметь вид

$$\Phi = -\frac{1}{\pi} \left[ \frac{1 + 2\dot{\gamma}}{2\dot{\gamma}} \right] \sin \varphi \quad (3.18)$$

Параметры  $X(\dot{\gamma})$  и  $R(\dot{\gamma})$  будут выражаться соотношениями

$$R(\dot{\gamma}) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 + \dot{\gamma}}{\dot{\gamma}^2}, \quad X(\dot{\gamma}) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\dot{\gamma}} \quad (3.19)$$

Из (3.14), (3.16), (3.17) для координат физической плоскости получаются следующие выражения:

$$x = X(\dot{\gamma}) + R(\dot{\gamma}) \cos 2\varphi, \quad y = R(\dot{\gamma}) \sin 2\varphi \quad (3.20)$$

С учетом (3.19) имеем

$$x = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{\dot{\gamma}} - \frac{1 + \dot{\gamma}}{\dot{\gamma}^2} \cos 2\varphi \right], \quad y = \frac{1}{2\pi} \frac{1 + \dot{\gamma}}{\dot{\gamma}^2} \sin 2\varphi \quad (3.21)$$

Из этих соотношений, переходя к полярным координатам, получается алгебраическое уравнение четвертой степени относительно  $\dot{\gamma}$

$$\dot{\gamma}^4 r^2 - 2Cr \cos \theta \dot{\gamma}^3 - 2C^2 \dot{\gamma} - C^2 = 0, \quad C = 1/(2\pi) \quad (3.22)$$

4. Используя зависимость (3.22) можно определить характер особенности  $\dot{\gamma}$  при различных углах  $\theta$ , где  $\theta$  — угол в полярной системе координат на физической плоскости. В силу симметрии задачи можно рассмотреть область  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Сделаем замену  $\cos \theta = -\delta$ . Уравнение (3.22) приводится к виду

$$r^2 \dot{\gamma}^4 + 2Cr \delta \dot{\gamma}^3 - 2C^2 \dot{\gamma} - C^2 = 0 \quad (4.1)$$

При  $r \rightarrow 0$ ,  $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$  последним слагаемым в уравнении (4.1) можно пренебречь

$$r^2 \dot{\gamma}^4 + 2Cr \delta \dot{\gamma}^3 - 2C^2 \dot{\gamma} = 0$$

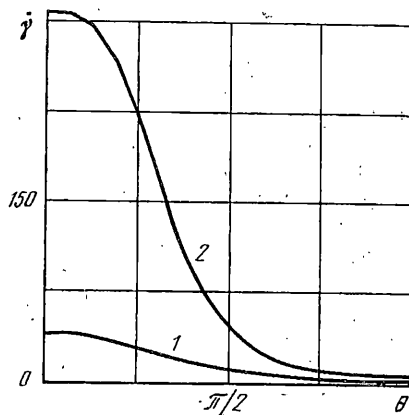
или

$$r^2 \dot{\gamma}^3 + 2C \delta r \dot{\gamma}^2 - 2C^2 = 0 \quad (4.2)$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$r \dot{\gamma}^2 [r \dot{\gamma} + 2C \delta] = 2C^2 \quad (4.3)$$

Рассмотрим случай, когда  $\delta > 0$ . Очевидно, что при  $r \rightarrow 0$  и  $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$ , два



Фиг. 3

сомножителя имеют конечный предел при  $r\dot{\gamma}^2 < +\infty$  и  $r\dot{\gamma} \rightarrow 0$ . Тогда из (4.3) следует

$$r\dot{\gamma}^2 = C/\delta \quad (4.4)$$

Таким образом, для  $\pi/2 < \theta \leq \pi$ :

$$\dot{\gamma} = \sqrt{C} [(-\cos \theta) r]^{-1/2} \quad (4.5)$$

Рассмотрим случай  $\delta < 0$ . В этом случае соотношение (4.3) может быть удовлетворено, когда выражение в квадратных скобках стремится к нулю. Из этого условия следует, что  $\dot{\gamma} = -2C\delta/r$  или  $\dot{\gamma} = 2Cr^{-1} \cos \theta$ .

При  $\theta = \pi/2$  из (4.3) имеем  $r^2\dot{\gamma}^3 = 2C^2$  или  $\dot{\gamma} = (C\sqrt{2}/r)^{2/3}$ .

Выполненный анализ точного решения показывает, что в рассмотренном случае характер сингулярности скоростей деформаций существенным образом зависит от угла  $\theta$ . Отметим, что для упругого случая имеется особенность вида  $\dot{\gamma} \sim r^{-1/2}$  независимо от угла  $\theta$ . Для иллюстрации решения задачи можно построить кривые зависимости  $\dot{\gamma}$  от угла  $\theta$  при различных  $r$ . Причем, так как  $L = (K_{III}/\tau_*)^2$ , то для определения значений  $r$ , имеющих физический смысл, воспользуемся опытными данными [6], из которых можно найти значение  $L \approx 625$  мм и построить кривые зависимости для  $r = 10^{-2}$ ,  $r = 10^{-3}$  (кривые 1 и 2 на фиг. 3 соответственно). Четко наблюдается резкое изменение интенсивности скоростей деформаций  $\dot{\gamma}$  в зависимости от угла  $\theta$  при стремлении  $r \rightarrow 0$ . Эти кривые отражают характер изменения полученных асимптотических зависимостей.

Работа выполнена при поддержке РФФИ. Грант 93—01—16507.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Работнов Ю. И. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. Качанов Л. М. Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. 455 с.
3. Бойл Дж., Спенс Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. М.: Мир, 1986. 360 с.
4. Шестериков С. А., Юмашева М. А. Конкретизация уравнения состояния в теории ползучести//Изв. АН СССР. 1984. № 1. С. 86—91.
5. Райс Дж. Математические методы в механике разрушения//Разрушение. Т. 2. М.: Мир, 1975. С. 204—335.
6. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.

Москва, Самара

Поступила в редакцию  
21.X.1993