МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1995

УДК 539.3

© 1995 г. А. А. ЛОКШИН, Е. А. САГОМОНЯН

НОВОЕ ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА КАНЬЯРА — ХУПА ДЛЯ ПОГЛОЩАЮЩИХ СРЕД

Известно, что классический метод Каньяра — Хупа позволяет аналитически решать задачи о распространении сейсмических волн в слоистой упругой среде [1]. Однако многие среды при малых деформациях ведут себя наследственно-упругим образом. К числу таких сред относятся, например, грунты и морские осадки [2]. Попытка асимптотического обобщения двумерного метода Каньяра — Хупа на наследственно-упругий случай была сделана в [3], при этом в [3] неявно предполагалось, что все слои должны обладать одинаковыми наследственными свойствами. В публикуемой работе указанное ограничение снимается с помощью введения обобщенного контура Каньяра. Для простоты здесь мы излагаем идею обобщения метода Каньяра — Хупа, решая элементарные задачи о распространении сдвиговой волны от линейного и точечного источников в изотропном однородном наследственно-упругом пространстве.

Отметим, наконец, что обобщенный метод Каньяра — Хупа не является единственно возможным методом изучения волн в слоистых наследственных средах. Так, в [4] была построена высокочастотная асимптотика для потенциалов отраженной и прошедшей волн в окрестности границы раздела наследственно-упругих полупространств в случае регулярных ядер наследственности. В принципе, с помощью обратного преобразования Фурье по времени можно из подобной высокочастотной асимптотики получить также прифронтовое поведение нестационарных волн. Однако такой подход представляется довольно сложным из-за необходимости следить за правильностью обхода полюсов из фазовой плоскости.

1. Рассмотрим изотропное однородное наследственно-упругое пространство xyz плотности $\rho = \text{const} > 0$. Как известно, уравнения движения рассматриваемой среды имеют вид

$$\rho\partial^2\mathbf{u}/\partial t^2 = \{\lambda\,(1 - q\,(t)*) + 2\mu\,(1 - h\,(t)*)\}\nabla\,(\nabla*\mathbf{u}) -$$
$$- \mu\,(1 - h\,(t)*)\,\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \mathbf{f}$$
$$\nabla = (\partial/\partial x,\ \partial/\partial y,\ \partial/\partial z) \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{u}\,(u_x,\ u_y,\ u_z)$ — вектор смещения, $\mathbf{f} = (f_x,\ f_y,\ f_z)$ — объемная сила; $\lambda > 0$ и $\mu > 0$ — мгновенно-упругие постоянные Ламе, $q\,(t)$ и $h\,(t)$ — соответствующие ядра релаксации, равные нулю при $t < 0$; звездочка обозначает свертку по t.

Пусть $A = \text{const} \neq 0$:

$$\mathbf{f} = (0,\ A\delta\,(t)\,\delta\,(x)\,\delta\,(z),\ 0) \tag{1.2}$$

Кроме того, предположим, что

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{при} \quad t < 0 \tag{1.3}$$

Ясно, что при такой постановке u_x и u_z будут тождественно равны нулю. Для u_y из (1.1) следует

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} - \beta_0^2\,(1 - h\,(t)*)\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right) = \frac{A}{\rho}\,\delta\,(t)\,\delta\,(x)\,\delta\,(z) \tag{1.4}$$

$$\beta_0 = (\mu/\rho)^{1/2} \tag{1.5}$$

Пусть $\Lambda(t)$ — ядро ползучести, соответствующее ядру релаксации $h(t)$, т. е. $(1 - h(t)*)^{-1} = 1 + \Lambda(t)*$. Тогда (1.4), очевидно, может быть переписано следующим образом:

$$(1 + \Lambda(t)*) \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} - \beta_0^2 \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) = \frac{A}{\rho} (1 + \Lambda(t)*)\, \delta(t)\, \delta(x)\, \delta(z) \tag{1.6}$$

Будем предполагать, что имеет место представление [5]:

$$\Lambda(t) = \varphi(t) + {}^1\!/\!_4\varphi(t)*\varphi(t) \tag{1.7}$$

где $\varphi(t)$ — вспомогательная функция памяти, равная нулю при $t < 0$, неотрицательная, убывающая и выпуклая вниз при $t > 0$. Тогда можно показать, что оператор (1.6) — гиперболический и описывает распространение возмущений с конечной скоростью (см. [5]). Кроме того, предполагаем, что $\varphi(t)/\ln t \to -\infty$ при $t \to +0$.

2. Задача заключается в том, чтобы вывести формулу для решения u_y задачи (1.3), (1.6), (1.7), не применяя никакого интегрального преобразования по z (предоставляем читателю возможность убедиться в том, что предполагаемый подход действительно применим к решению волновых задач в слоистых (по z) наследственно-упругих средах).

Применим преобразование Лапласа $L_{t\to p}$ и преобразование Фурье $F_{x\to\xi}$ к (1.3), (1.6), (1.7). Решая получающееся обыкновенное дифференциальное (по z) уравнение, легко получаем с учетом (1.3):

$$L_{t\to p}F_{x\to\xi}u_y = \frac{A}{2\rho\beta^2(p)\,n} e^{-n|z|} \tag{2.1}$$

$$n = (\xi^2 + p^2/\beta^2(p))^{1/2}, \quad \beta(p) = \beta_0 (1 + \overline{\varphi}(p)/2)^{-1} \tag{2.2}$$

Замечание. Здесь $n > 0$ при вещественных ξ и p. Ниже распространим определение n на случай комплексного ξ, используя условие $\operatorname{Re} n > 0$.

3. Применяя обратное преобразование Фурье $F^{-1}_{\xi\to x}$ к (2.1), получаем

$$\overline{u}_y(p, x, z) = \frac{A}{4\pi\rho\beta^2(p)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\xi x - n|z|)}{n} d\xi \tag{3.1}$$

(черта над знаком функции обозначает результат применения к ней преобразования Лапласа $L_{t\to p}$). Далее, как и в классическом методе Каньяра — Хупа, введем лучевой параметр s по формуле

$$\xi = isp \tag{3.2}$$

Из (2.2)—(3.2) следует, что

$$\overline{u}_y(p, x, z) = -\frac{Ai}{4\pi\rho\beta^2(p)} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\exp[-p(sx + \eta|z|)]}{\eta} ds$$

$$\eta = (\beta^{-2}(p) - s^2)^{1/2}, \quad \operatorname{Re}\eta > 0$$

Как и в [1], из последнего соотношения получим

$$\overline{u}_y(p, x, z) = \frac{A}{2\pi\rho\beta^2(p)} \operatorname{Im} \int_0^{i\infty} \frac{\exp[-p(sx + \eta|z|)]}{\eta} ds \tag{3.3}$$

Теперь фиксируем некоторое $p > 0$ (а также некоторые x и z) и введем переменную $\tau = \tau(s)$ по формуле

$$\tau = sx + (\beta^{-2}(p) - s^2)^{1/2}|z| \tag{3.4}$$

Здесь предполагается, что $0 < \tau < \infty$. Пусть $H \equiv (x^2 + z^2)^{1/2}$. Тогда, разрешая (3.4) относительно s, получаем, в частности, корень

$$s = \begin{cases} \dfrac{x\tau - |z|\,[H^2/\beta^2(p) - \tau]^{1/2}}{H^2}, & 0 < \tau < \dfrac{H}{\beta(p)} \\ \dfrac{x\tau + i|z|\,[\tau^2 - H^2/\beta^2(p)]^{1/2}}{H^2}, & \tau > \dfrac{H}{\beta(p)} \end{cases} \tag{3.5}$$

Равенства (3.5) определяют обобщенный контур Каньяра C_p: $s = s(\tau)$. Далее, в точности повторяя выкладки, приведенные в [1] для чисто упругого случая, имеем из (3.3)—(3.5):

$$\bar{u}_y(p, x, z) = \frac{A}{2\pi\rho\beta^2(p)} \operatorname{Im} \int_{C_p} \frac{\exp[-p(sx + \eta|z|)]}{\eta}\, ds$$

Часть контура C_p, соответствующая промежутку $0 < \tau < H/\beta(p)$ не дает вклада в последнее выражение для $\bar{u}(p, x, z)$, поскольку подинтегральная функция вещественна на этом участке. Кроме того, имеем

$$ds/d\tau = i\eta\,(\tau^2 - H^2/\beta^2(p))^{-1/2}$$

вдоль C_p при $\tau > H/\beta(p)$. Поэтому, учитывая (3.5) предыдущее выражение для u_y можно переписать в виде

$$\bar{u}_y(p, x, z) = \frac{A}{2\pi\rho\beta^2(p)} \int_{H/\beta(p)}^{\infty} \frac{\exp(-p\tau)\, d\tau}{(\tau^2 - H^2/\beta^2(p))^{1/2}} \tag{3.6}$$

4. Делая в (3.6) замену переменной интегрирования $\tau \to \tau\beta_0/\beta(p)$ и учитывая (2.2), получим

$$\bar{u}_y(p, x, z) = \frac{A}{2\pi\rho\beta^2(p)} \int_{H/\beta_0}^{\infty} \frac{\exp[-p(1 + \tfrac{1}{2}\bar{\varphi}(p))\,\tau]}{(\tau^2 - H^2/\beta_0^2)^{1/2}}\, d\tau \tag{4.1}$$

Очевидно, что интеграл в правой части (4.1) представляет собой нелинейное преобразование Лапласа.

Далее, так как $\beta^2(p) = \beta_0^2/(1 + \bar{\Lambda}(p))$, то применение к (4.1) обратного преобразования Лапласа $L^{-1}_{p\to t}$ дает следующую точную формулу для решения поставленной зазачи:

$$u_y(t, x, z) = \frac{A}{2\pi\rho}(1 + \Lambda(t)*) \int_{H/\beta_0}^{\infty} \frac{L^{-1}_{p\to t-\tau} \exp[-\tfrac{1}{2}p\bar{\varphi}(p)\,\tau]}{(\tau^2 - H^2/\beta_0^2)^{1/2}}\, d\tau =$$

$$= \frac{A}{2\pi\rho}(1 + \Lambda(t)*) \int_{H/\beta_0}^{t} \frac{L^{-1}_{p\to t-\tau} \exp[-\tfrac{1}{2}p\bar{\varphi}(p)\,\tau]}{(\tau^2 - H^2/\beta_0^2)^{1/2}}\, d\tau \tag{4.2}$$

Замечание 1. По определению обратного преобразования Лапласа $L^{-1}_{p\to t-\tau} \exp[-\tfrac{1}{2}p\bar{\varphi}(p)\,\tau] = 0$ при $t - \tau < 0$.

Следовательно, интеграл в правой части (4.2) обращается в нуль при $t < H/\beta_0$. Таким образом, (4.2) может быть переписано в эквивалентном виде

$$u_y(t, x, z) =$$

$$= \frac{A}{2\pi\rho}(1 + \Lambda(t)*) \left\{ \Theta(t - H/\beta_0) \int_{H/\beta_0}^{t} \frac{L^{-1}_{p\to t-\tau} \exp[-\tfrac{1}{2}p\bar{\varphi}(p)\,\tau]}{(\tau^2 - H^2/\beta_0^2)^{1/2}}\, d\tau \right\} \tag{4.3}$$

где $\Theta(\ldots)$ — единичная функция Хевисайда.

Замечание 2. В частности, если

$$\varphi(t) = kt^{-\alpha}/\Gamma(1 - \alpha) \quad \text{при } t > 0 \tag{4.4}$$

имеем $p\varphi(p) = kp^\alpha$, и формула (4.2) приобретает вид

$$u_y(t, x, z) = \frac{A}{2\pi\rho}(1 + \Lambda(t)*) \int_{H/\beta_0}^{t} \frac{(2/(k\tau)^{1/\alpha} u_\alpha[(t-\tau)/(\tfrac{1}{2}k\tau)^{1/\alpha}]\, d\tau}{(\tau^2 - H^2/\beta_0^2)^{1/2}} \tag{4.5}$$

$$u_\alpha(t) = L^{-1}_{p\to t} \exp(-p^\alpha)$$

По поводу прифронтового поведения $u_y(t, x, z)$ при условии (4.4) см. [3].

5. Перейдем теперь к трехмерному случаю. Подобно тому как это делается для чисто упругой среды в [1], рассмотрим SH-волну от точечного источника, расположенного в наследственно-упругом пространстве (охарактеризованном в п. 1).

Пусть x, y, z — декартовы координаты в рассматриваемом наследственно-упругом пространстве, r, ψ, z — соответствующие цилиндрические координаты ($r = (x^2 + z^2)^{1/2}$, ψ — азимут). Считаем, что точечный источник типа центра вращения расположен в начале координат. Тогда в декартовых координатах соответствующая объемная сила представима в виде

$$\mathbf{f} = \nabla \times (0, 0, X) \tag{5.1}$$

где X — осесимметричный потенциал (т. е. $X = X(t, r, z)$ в цилиндрических координатах).

В декартовых координатах соответствующее поле смещений представимо в виде [1]:

$$\mathbf{u} = \nabla \times (0, 0, \chi) \tag{5.2}$$

где χ также осесимметричный потенциал. Из (5.2) вытекают следующие формулы для цилиндрических координат смещения $\mathbf{u}$:

$$u_r = 0, \quad u_\psi = -\partial\chi/\partial r, \quad u_z = 0 \tag{5.3}$$

Подставляя (5.1), (5.2) в (1.1), получаем следующее волновое уравнение с памятью для потенциала χ:

$$\partial^2\chi/\partial t^2 - \beta_0^2(1 - h(t)*)\Delta\chi = X/\rho \tag{5.4}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа по пространственным переменным x, y, z; β_0 определяется формулой (1.5).

Теперь для определенности, как и в [1], предположим, что

$$X = A\Theta(t)\,\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z) = A\Theta(t)\frac{\delta(r)}{2\pi r}\delta(z) \tag{5.5}$$

где $A = \text{const} \neq 0$, $\Theta(t)$ — единичная функция Хевисайда. Кроме того, считаем, что

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{при} \quad t < 0 \tag{5.6}$$

Как и в классическом упругом случае [1], применим к (5.4)—(5.6) интегральное преобразование Фурье — Лапласа

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\xi x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\eta y)\, dy \int_{0}^{\infty} \exp(-pt)\, dt$$

В результате приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2}{dz^2} F_{x, y\to\xi,\eta}\bar{\chi} = -\frac{A}{\rho\beta^2(p)\,p}\delta(z) + n^2 F_{x, y\to\xi,\eta}\bar{\chi} \tag{5.7}$$

$$n^2 = \xi^2 + \eta^2 + p^2/\beta^2(p), \qquad \beta(p) = \beta_0(1 + \tfrac{1}{2}\varphi(p))^{-1}$$

Далее, при условии $\operatorname{Re} n > 0$ решение уравнения (5.7), описывающее распространение возмущений с конечной скоростью, очевидно, имеет вид

$$F_{x,\, y\to\xi,\, \eta}\bar{\chi} = \frac{A}{2\rho\beta^2(p)\, pn} \exp(-n|z|)$$

откуда следует

$$\bar{\chi}(p, x, y, z) = \frac{A}{8\pi^2\rho\beta^2(p)\, p} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\xi x + i\eta y - n|z|)\, d\eta}{n} \tag{5.8}$$

Воспользуемся теперь заменой переменных, введенной де Хупом (см. [1]):

$$\xi = (w\cos\psi - q\sin\psi)\, p, \quad \eta = (w\sin\psi + q\cos\psi)\, p \tag{5.9}$$

Здесь ψ — азимут в цилиндрических координатах, введенных выше в пространстве xyz; q и w — новые переменные, введенные вместо ξ и η. Так как $x = r\cos\psi$, $y = r\sin\psi$ и $d\xi\, d\eta = p^2\, dw\, dq$, из (5.8), (5.9) следует

$$\bar{\chi}(p, x, y, z) = \frac{A}{8\pi^2\rho\beta^2(p)} \int_{-\infty}^{\infty} dw \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ipwr - pN|z|)}{N}\, dq \tag{5.10}$$

$$N = (\beta^{-2}(q) + q^2 + w^2)^{1/2}, \quad \operatorname{Re} N > 0$$

Далее, как и в [1], полагаем $s = -iw$. Тогда (5.10) принимает вид

$$\bar{\chi}(p, x, y, z) = \frac{A}{2\pi^2\rho\beta^2(p)} \int_0^{\infty} dq\, \operatorname{Im} \int_0^{i\infty} \frac{\exp[-p(sr + N|z|)]\, ds}{N}$$

$$N = (\beta^{-2}(p) + q^2 - s^2)^{1/2}, \quad \operatorname{Re} N > 0 \tag{5.11}$$

Далее, вспоминая, что правые части формул (3.3) и (3.6) оказались равны, заменим в них x на $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, а $\beta^{-2}(p)$ на $\beta^{-2}(p) + q^2$. Тогда получим

$$\operatorname{Im} \int_0^{i\infty} \frac{\exp[-p(sr + N|z|)]}{N}\, ds = \int_{\omega}^{\infty} \frac{\exp(-p\tau)}{(\tau^2 - \omega^2)^{1/2}}\, d\tau$$

$$R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \quad \omega = R\,[\beta^{-2}(p) + q^2]^{1/2}$$

Поэтому соотношение (5.11) может быть переписано в виде

$$\bar{\chi}(p, x, y, z) = \frac{A}{2\pi^2\rho\beta^2(p)} \int_0^{\infty} dq \int_{\omega}^{\infty} \frac{\exp(-p\tau)\, d\tau}{(\tau^2 - \omega^2)^{1/2}} \tag{5.12}$$

Изменяя в (5.12) порядок интегрирования получим

$$\bar{\chi}(p, x, y, z) = \frac{A}{2\pi^2\rho\beta^2(p)} \int_{R/\beta(p)}^{\infty} \exp(-p\tau)\, d\tau \int_0^{\varkappa} \frac{dq}{(\tau^2 - \omega^2)^{1/2}} \tag{5.13}$$

$$\varkappa = (\tau^2/R^2 - 1/\beta^2(p))^{1/2}$$

Видно, что внутренний интеграл в (5.13) равен $\pi/2R$. Подставляя это значение в (5.13), имеем

$$\bar{\chi}(p, x, y, z) = \frac{A}{4\pi R\rho\beta^2(p)} \int_{R/\beta(p)}^{\infty} \exp(-p\tau)\, d\tau = \frac{A\exp[-pR/\beta(p)]}{4\pi R\rho\beta^2(p)\, p}$$

или, что то же самое

$$\bar{\chi}(p, x, y, z) = \frac{A(1 + \tfrac{1}{2}\bar{\varphi}(p))^2}{4\pi R\mu p} \exp\left[-p(1 + \tfrac{1}{2}\bar{\varphi}(p))\frac{R}{\beta_0}\right] \tag{5.14}$$

Следствие:

$$\chi(t, x, y, z) = \frac{A}{4\pi R\mu}(1 + \Lambda(t)*) L^{-1}_{p\to t_1}\left\{\frac{\exp(-\frac{1}{2}\overline{\varphi}(p) R/\beta_0)}{p}\right\}$$

$$u_\psi(t, x, y, z) = -\frac{A}{4\pi\mu}(1 + \Lambda(t)*)\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{R} L^{-1}_{p\to t_1}\left\{\frac{\exp(-\frac{1}{2}p\overline{\varphi}(p) R/\beta_0)}{p}\right\}$$

$$t_1 = t - R/\beta_0 \tag{5.15}$$

6. Попробуем теперь найти прифронтовую асимптотику u_ψ. Для этого вернемся к p-представлению. Из (5.3), (5.14), используя очевидное равенство $R = (r^2 + z^2)^{1/2}$, имеем

$$\overline{u}_\psi = -\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{A(1 + \frac{1}{2}\overline{\varphi}(p))^2}{4\pi R\mu p}\exp\left[-p(1 + \tfrac{1}{2}\overline{\varphi}(p))\frac{R}{\beta_0}\right]\right\} \sim$$

$$\sim \frac{Ar}{4\pi R^2\mu\beta_0}\exp\left(\frac{-pR}{\beta_0}\right)\exp\left[\frac{-\frac{1}{2}p\overline{\varphi}(p) R}{\beta_0}\right] \quad \text{при} \quad p \to +\infty \tag{6.1}$$

так как $\overline{\varphi}(p) \to 0$ при $p \to +\infty$.

Далее, снова ограничимся специальным случаем степенного ядра (4.4). Тогда (6.1) принимает вид

$$\overline{u}_\psi(p, x, y, z) \sim \frac{Ar}{4\pi R^2\mu\beta_0}\exp\left(\frac{-pR}{\beta_0}\right)\exp\left(\frac{-\frac{1}{2}p^\alpha kR}{\beta_0}\right) \quad \text{при} \quad p \to +\infty$$

откуда при $t_1 \to +0$:

$$u_\psi(t, x, y, z) \sim \frac{Ar}{4\pi R^2\mu\beta_0} L^{-1}_{p\to t_1}\left\{\exp\left[\frac{-\frac{1}{2}p^\alpha kR}{\beta_0}\right]\right\} \tag{6.2}$$

Однако [6]:

$$L^{-1}_{p\to t}\exp(-p^\alpha) \sim \frac{\alpha^{1/2\alpha_1}}{[2\pi(1-\alpha)]^{1/2}} t^{\alpha_2}\exp\left[-(1-\alpha)\alpha^{\alpha\alpha_1}t^{-\alpha\alpha_1}\right]$$

$$\alpha_1 = 1/(1-\alpha), \quad \alpha_2 = -1 - \tfrac{1}{2}\alpha/(1-\alpha)$$

Поэтому из (6.2) следует

$$u_\psi(t, x, y, z) \sim \mathrm{const}_1 rR^{\alpha_3}t_1^{\alpha_2}\exp\left[-\mathrm{const}_2 R^{\alpha_1}t_1^{-\alpha\alpha_1}\right], \quad t_1 \to +0 \tag{6.3}$$

$$\mathrm{const}_1 = \frac{A}{4\pi\mu\beta_0}\frac{\alpha^{1/2\alpha_1}}{[2\pi(1-\alpha)]^{1/2}}\left(\frac{k}{2\beta_0}\right)^{1/2\alpha_1}$$

$$\mathrm{const}_2 = (1-\alpha)\alpha^{\alpha\alpha_1}\left(\frac{k}{2\beta_0}\right)^{\alpha_1}, \quad \alpha_3 = -2 + \frac{1}{2(1-\alpha)}$$

7. Отметим, что для наследственных сред основной интерес представляют не громоздкие точные формулы, даваемые обобщенным методом Каньяра — Хупа, а скорее прифронтовая асимптотика, по характеру которой можно судить о свойствах пород, встреченных волной на своем пути.

Отметим, что, переходя от (4.1) к (4.2), фактически производится перестановка двух несобственных интегралов. Корректность такой перестановки будет обоснована ниже, причем будет существенно использоваться предположение о том, что особенность функции памяти $\varphi(t)$ при $t \to +0$ сильнее логарифмической. Итак, пусть $p = c + iq$, $c > 0$. Тогда

$$L^{-1}_{p\to t}\int_{H/\beta_0}^{\infty}\frac{\exp[-p(1 + \frac{1}{2}\overline{\varphi}(p))\tau]}{(\tau^2 - H^2/\beta_0^2)^{1/2}}d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(pt)\, dp \int\limits_{H/\beta_0}^{\infty} \frac{\exp[-p(1 + \frac{1}{2}\overline{\varphi}(p))\tau]}{(\tau^2 - H^2/\beta_0^2)^{1/2}} d\tau =$$

$$= \frac{\exp(ct)}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dq \int\limits_{H/\beta_0}^{\infty} f(\tau, q)\, d\tau \tag{7.1}$$

$$f(\tau, q) = \frac{\exp(iqt) \exp[-(c + iq)\tau] \exp[-\frac{1}{2} p\overline{\varphi}(p)\tau]}{(\tau^2 - H^2/\beta_0^2)^{1/2}}, \quad p = c + iq \tag{7.2}$$

Задача состоит в том, чтобы оценить сверху модуль функции (7.2). Имеем

$$|f(\tau, q)| \le \frac{\exp(-c\tau)}{(\tau^2 - H^2/\beta_0^2)^{1/2}} |\exp[-\frac{1}{2} p\overline{\varphi}(p)\tau]|, \quad p = c + iq \tag{7.3}$$

Заметим, однако, что (см. [5, лемма 3.4]): $\mathrm{Re}\,(p\overline{\varphi}(p)) \le \varphi(\pi/2|q|) \times \exp(-\frac{1}{2}c\pi/|q|)$, $q \ne 0$, $\mathrm{Re}\,(p\varphi(p)) \le 0$, $q = 0$. Поэтому из (7.3) следует, что при $q \ne 0$:

$$|f(\tau, q)| \le \frac{\exp(-c\tau)}{(\tau^2 - H^2/\beta_0^2)^{1/2}} \exp\left[-\frac{\tau}{2}\varphi\left(\frac{\pi}{2|q|}\right)\exp\left(\frac{-\frac{1}{2}c\pi}{|q|}\right)\right] \le$$

$$\le \frac{\exp(-c\tau)}{(\tau^2 - H^2/\beta_0^2)^{1/2}} \exp\left[-\varphi\left(\frac{\pi}{2|q|}\right)\frac{H}{2\beta_0}\right]$$

(поскольку $\tau \ge H/\beta_0$). Если же $q = 0$, то

$f(\tau, 0) \le \exp(-c\tau)/(\tau^2 - H^2/\beta_0^2)^{1/2}$

Таким образом

$$|f(\tau, q)| \le f_1(\tau) f_2(q), \quad f_1(\tau) = \frac{\exp(-c\tau)}{(\tau^2 - H^2/\beta_0^2)^{1/2}} \tag{7.4}$$

$$f_2(q) = \begin{cases} \exp\left[-\varphi\left(\frac{\pi}{2|q|}\right)\frac{H}{2\beta_0}\right], & q \ne 0 \\ 1, & q = 0 \end{cases} \tag{7.5}$$

Ясно, что $f_1(\tau)$ абсолютно интегрируема по $d\tau$ на луче $[H/\beta_0, \infty)$. Кроме того, $f_2(q)$ абсолютно интегрируема по dq на прямой $(-\infty, \infty)$, поскольку $\varphi(t)$ имеет при $t \to +0$ особенность более сильную, чем логарифмическая (см. п.1). Из (7.4), (7.5) и следует возможность перестановки интегралов в правой части (7.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аки К., Ричердс П.* Количественная сейсмология. Т. 1. М.: Мир, 1983. 519 с.
2. *Столл Р. Д.* Акустические волны в водонасыщенных осадках//Акустика морских осадков. М.: Мир, 1977. С. 28—46.
3. *Локшин А. А., Лопатников С. Л., Рок В. Е.* Метод Каньяра — Хупа для поглощающих сред//Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 5. С. 188—190.
4. *Баринова Т. Я.* Об асимптотическом методе решения динамических задач теории неидеальной упругости//Изв. АН СССР. Физика Земли. 1975. № 1. С. 30—37.
5. *Локшин А. А., Суворова Ю. В.* Математическая теория распространения волн в средах с памятью. М.: Изд-во МГУ, 1982. 151 с.
6. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарные связанные величины. М.: Наука, 1965. 524 с.

Москва

Поступила в редакцию
21.I.1993