МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1995

УДК 539.3

© 1995 г. Г. З. ШАРАФУТДИНОВ

ОБ ОПИСАНИИ БОЛЬШИХ УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Изучение процессов деформирования с учетом как физической, так и геометрической нелинейности приобретает в настоящее время исключительно важное значение [1, 2]. Следует заметить, что вопросы, связанные с процессами физически нелинейного деформирования в современной научной литературе рассмотрены достаточно глубоко; в частности, предложены различные формы определяющих соотношений, исследованы постановки соответствующих классов задач, разработаны теоретические и экспериментальные методы их решения и решен ряд задач [2—5].

Процессы геометрически нелинейного деформирования представлены в значительно меньшей степени, причем основное внимание, даже для упругих материалов, уделяется, теоретическим исследованиям. В результате этого образовался существенный разрыв между экспериментальными и теоретическими исследованиями, что затрудняет дальнейшее развитие этого раздела механики деформируемых тел.

Несмотря на то, что наибольшую ценность в данной ситуации имеют экспериментальные результаты, особенно систематического характера, определенное значение, если не для адекватного представления процесса деформирования, то, по крайней мере, для выработки концепции подхода к изучению нелинейных процессов деформирования, имеет анализ известных экспериментальных данных.

1. В теоретических исследованиях конечных или больших деформаций для характеристики напряженно-деформированного состояния могут быть использованы и используются различные определения тензоров напряжений и деформаций. В практических приложениях предпочтение отдают, как правило, наиболее простым формам определений напряжений и деформаций. При этом надо заметить формы таких определений иногда выбираются произвольно, без их взаимного согласования, что приводит к нарушению основных принципов построения образа процесса [6]. Подобный подход может привести к противоречиям, как очевидным, так и внешне вполне незаметным. Так, например, применение истинных напряжений и использование линейной меры деформаций Коши в [7] приводит к переменности коэффициента Пуассона и изменению модуля Юнга в рассматриваемом диапазоне деформаций. Ясно, что применение в таких случаях линейной теории упругости однородных тел нельзя признать удачным.

Другое проявление несогласованности выбора определений напряжений и деформаций заключается в нарушении соответствия величины работы внешних сил и работы деформации. Из теоремы живых сил следует, что в условиях статического равновесия величина работы деформации

$$\int_V \int_0^{\varepsilon} \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij}\, dV$$

не может превосходить величины работы внешних сил

$$\int_S \int_0^{u} \mathrm{P}\, d\mathrm{u}\, dS$$

обусловивших данную деформацию.

n	F	l	b	h	σ	ε_1	ε_2	W	W_1	W_2	ε
1	0	20,6	33,4	2,15	0	0	0	0	0	0	0
2	19,6	22,7	31,9	2,05	0,30	10,2	9,71	2,06	2,26	2,15	9,3
3	34,3	24,4	30,8	1,98	0,56	18,4	16,9	6,64	7,52	6,76	16,6
4	51,0	26,4	29,6	1,90	0,91	28,2	24,8	15,2	18,1	15,3	25,4
5	63,7	28,4	28,7	1,84	1,21	37,9	32,1	26,6	33,2	26,7	32,4
6	75,5	30,4	27,8	1,78	1,53	47,6	38,9	40,6	52,9	40,5	38,7
7	88,1	32,9	26,7	1,71	1,92	59,7	46,8	61,0	83,9	60,7	45,9
8	98,1	34,7	25,8	1,65	2,30	68,4	52,1	77,8	111,2	77,4	52,1
9	105,0	36,2	25,3	1,62	2,56	75,7	56,4	93,0	137,5	92,6	56,1

Приводимые в [7] экспериментальные данные, полученные на оптически чувствительном материале — полиуретановой резине СКУ-6, позволяют вычислить величины работы внешних сил и работы деформации, которые в условиях однородного напряженного состояния и равномерного распределения усилий и перемещений по поверхности имеют следующие представления:

$$\int_0^u \mathrm{F}\, d\mathrm{u} = W, \quad \int_0^\varepsilon \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij} V = W_1$$

при определении компоненты ε_{11} при одноосном растяжении по формуле $\varepsilon_{11} = \lambda - 1$, где λ — степень удлинения.

Определяя величины W интегрированием при помощи формулы трапеций, получаем следующие результаты (см. таблицу). В ней четыре первые колонки содержат исходные экспериментальные данные, приводимые в [7]. Следующая колонка содержит значения истинных напряжений, реализуемых на каждом этапе нагружения. Две последующие колонки содержат значения деформаций; в первой воспроизведены значения деформаций, вычисляемые в цитируемой работе, во второй — определяемые как логарифм от степени удлинения. В трех следующих колонках приведены значения работы внешних сил ($W \times 10^2$ Н·м), и значения работы деформации (W_1, $W_2 \times 10^2$ Н·м), соответствующих применению указанных определений компонент тензора деформаций, с использованием линейной меры Коши $\varepsilon_{11} = \lambda - 1$ и по Генки $\varepsilon_{11} = \ln \lambda$.

Поскольку работа деформации не может превосходить величины работы внешних сил, то приводимые результаты означают: при использовании понятия истинных напряжений, применение линейной меры Коши для определения компонент тензора деформаций недопустимо; поведение материала в рассматриваемом диапазоне деформаций и напряжений можно расценивать как упругое, что, кстати говоря, подтверждается независимыми исследованиями свойств данного материала. Кроме того, поскольку экспериментальные результаты получены в условиях одноосного растяжения, данные выводы следует рассматривать как предельный или частный случай и их распространение на произвольные процессы деформирования следует производить с осторожностью и должным обоснованием.

Аналогичные заключения можно сделать и в отношении каучука [8]. В этой работе изучаются свойства каучука до степеней растяжения $\lambda = 8$ и до $\lambda = 0{,}36$ в случае сжатия. В частности, при $\lambda = 7{,}72$ (это соответствует деформации растяжения по Коши, равной 6,72 и по Генки — второй случай — 2,04) имеем $W = 12{,}4$; $W_1 = 71{,}4$ и $W_2 = 12{,}4$ (Н·м). Соответственно, при $\lambda = 0{,}36$ (деформация по Коши равна $-0{,}64$, по Генки равна $-1{,}02$) получаем 0,574; 0,302 и 0,572 (Н·м).

2. Приводимые выше экспериментальные данные получены на образцах из полимерных материалов, находящихся в стадии высокоэластичности. Как известно [9], путем уменьшения температуры полимеры могут быть переведены в пере-

ходную зону и область стеклования, в которых их механические свойства приобретают ярко выраженный неупругий характер [9]. В связи с этим представляет определенный интерес при изучении конечных и больших упругих деформаций использовать в качестве соотношений связи между напряжениями и деформациями предельный случай определяющих соотношений, учитывающих физическую нелинейность деформируемого материала.

К числу последних можно отнести предложенные в [4, 10, 11] кусочно-линейные и кусочно-аналитические функциональные формы определяющих соотношений, которые достаточно удовлетворительно описывают процессы одноосного деформирования как полимеров (целлулоид, поликарбонат), так и металлов при повышенных температурах (алюминиевый сплав Д16 и др.) при достаточно развитых малых деформациях (до 0,1—0,2).

Рассмотрим первый член кусочно-аналитической функциональной зависимости, являющийся конечным представлением нелинейного аналитического функционала при помощи двух линейных функционалов [12]. В одномерном случае он может быть записан в виде [13]:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t K(t, \tau)\, \sigma(\tau) \left[1 + \int_0^t K_1(\tau, \tau_1)\, \sigma(\tau_2)\, d\tau_1 \right]^{-1} d\tau \tag{2.1}$$

где $\varepsilon = \ln\lambda$ — деформация, σ — напряжение, t — время; K и K_1 — ядра операторов, представляющие собой некоторые материальные функции.

Для высокоэластического состояния это соотношение упрощается

$$\varepsilon = K\sigma/(1 + K_1\sigma) \tag{2.2}$$

где K и K_1 представляют собой некоторые константы. В линейной области знаменатель в (2.2) равен 1 и поэтому величина K представляет собой обратный модуль Юнга. Ее значение может быть определено на начальном этапе деформирования, при невысоких уровнях деформаций. На последующих этапах определяется вторая константа. Другой способ определения констант заключается в приведении (2.2) к системе двух уравнений

$$\sigma_i K - \varepsilon_i \sigma_i K_1 = \varepsilon_i \quad (i = 1,2) \tag{2.3}$$

для двух различных значений напряжений и соответствующих им деформаций.

С использованием данных, полученных в экспериментах с полиуретановой резиной СКУ-6 [7], были определены первым способом коэффициенты K и K_1. Именно, на начальном этапе было установлено значение модуля упругости; его значение равно 3,05 МПа и $K = 0{,}328$ 1/МПа. Значение второго коэффициента, определенное как среднее арифметическое при более высоком уровне напряжений, оказалось равным 0,194 1/МПа, т. е. имеем следующее выражение для продольной деформации:

$$\varepsilon = 0{,}328\sigma/(1 + 0{,}194\sigma) \tag{2.4}$$

С его помощью были вычислены значения деформации для указанных уровней напряжения. Они приведены в последней колонке таблицы.

Соотношение (2.2) было использовано также для описания процессов одноосного деформирования каучука [8]. Для этого материала получено соотношение

$$\varepsilon = 0{,}859\sigma/(1 + 0{,}406\sigma) \quad (1 \le \lambda \le 7{,}72) \tag{2.5}$$

позволяющее получить расчетные значения деформаций с ошибкой не более 5% относительно экспериментальных значений в указанном диапазоне растяжения. Соотношения (2.4) и (2.5) получены при использовании значений истинных напряжений и деформаций, определяемых как натуральный логарифм от степени растяжения.

3. Рассмотрим теперь наиболее простой случай зависимости между главными компонентами тензоров деформаций и напряжений при соосности этих тензоров

и неизменности главных направлений в процессе деформирования, т. е. будем считать справедливыми соотношения

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (i = 1, 2, 3)$$

Предположим, что эти функции дифференцируемы, что позволяет воспользоваться формулой Тейлора, в которой учтем также и вторые производные. Считая выполненным набор необходимых для такого случая предположений, выпишем полученные формулы

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= a\sigma_1 + b(\sigma_2 + \sigma_3) + c\sigma_1^2 + d\sigma_1\sigma_2 + e\sigma_2^2 + d\sigma_1\sigma_3 + e\sigma_3^2 + f\sigma_2\sigma_3 \\ \varepsilon_2 &= a\sigma_2 + b(\sigma_1 + \sigma_3) + c\sigma_2^2 + d\sigma_1\sigma_2 + e\sigma_1^2 + d\sigma_2\sigma_3 + e\sigma_3^2 + f\sigma_1\sigma_3 \\ \varepsilon_3 &= a\sigma_3 + b(\sigma_1 + \sigma_2) + c\sigma_3^2 + d\sigma_1\sigma_3 + e\sigma_1^2 + d\sigma_1\sigma_2 + e\sigma_2^2 + f\sigma_1\sigma_2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $a, \ldots, f$ — константы, определяемые по исходному состоянию. Структура этих формул ясно указывает на используемые в них предположения об изотропии и симметрии.

Если сложить эти три уравнения, то получим в левой части первый инвариант тензора деформаций I_1, а в правой — его представление через инварианты тензора напряжений

$$I_1 = (a + 2b)J_1 + (c + 2e)j_2 + (f + 2d)J_2 \tag{3.2}$$

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \qquad j_2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2, \qquad J_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$$

Учитывая связь между инвариантами $j_2 = J_1^2 - 2J_2$ вместо (3.2) имеем

$$I_1 = (a + 2b)J_1 + (c + 2e)J_1^2 + (f + 2d - 2c - 4e)J_2 \tag{3.3}$$

Разделим теперь обе части этого соотношения на 3 и вычтем из каждого соотношения (3.1). В результате получим в левой части компоненты девиатора деформаций, однако в правой части к девиаторным компонентам тензора напряжений будут добавлены некоторые слагаемые.

Отсюда следует, что в нелинейном случае соотношения связи между напряжениями и деформациями не могут быть формально разложены на раздельные группы соотношений для девиаторных и шаровых частей; подобное разделение справедливо, строго говоря, лишь для тензоров напряжений и деформаций с бесконечно малыми компонентами, а в данном частном случае, при выполнении следующих условий: $f + 2d - 2c - 4e = 0$, $c + 2e = 0$, налагаемых на материальные константы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Грин А., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Наука, 1965. 455с.
2. *Поздеев А. А., Трусов П. В., Няшин Ю. И.* Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. М.: Наука, 1986. 232 с.
3. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
4. *Шарафутдинов Г. З.* Об определяющих соотношениях вязкоупругости и вязкопластичности.//Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 3. С. 125—133.
5. *Шарафутдинов Г. З.* Фотовязкоупругость. М.: Изд-во МГУ, 1987. 199 с.

6. *Ильюшин А. А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1978. 287 с.
7. *Фельдман Г. И., Майская М. А., Горелик Б. М.* Определение напряжений в резиновых технических изделиях методом фотоупругости. М.: Химия, 1976. 110 с.
8. *Трелоар Л.* Физика упругости каучука. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 240 с.
9. *Бартенев Г. М., Зеленев Ю. В.* Физика и механика полимеров. М.: Высш. шк., 1983. 391 с.
10. *Шарафутдинов Г. З.* Об одной форме определяющих соотношений вязкопластичности.//Проблемы прочности. 1985. № 9. С. 97—102.
11. *Шарафутдинов Г. З.* Исследование метода фотовязкопластичности.//Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 1. С. 114—123.
12. *Леви П.* Конкретные проблемы функционального анализа. М.: Наука, 1967. 510 с.
13. *Победря Б. Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1981. 343 с.

Москва

Поступила в редакцию
20.V.1993