МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1995

УДК 539.3

© 1995 г. Н. М. МАТЧЕНКО, Л. А. ТОЛОКОННИКОВ, А. А. ТРЕЩЁВ

# ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ИЗОТРОПНЫХ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩИХСЯ СРЕД. КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Сопротивление многих конструкционных материалов деформированию зависит от вида напряженного состояния [1—4] [1]. Для описания зависимостей между напряжениями и деформациями таких материалов за последние 30 лет был предложен ряд модельных соотношений как в квазилинейной постановке [4—12] [2], так и в нелинейной [12—16]. Однако, практически все известные модели имеют недостатки: различные аналитические представления для разных видов напряженного состояния или возникновение неопределенности закона упругости при некоторых из них [4, 5, 7—13]; наличие строгих взаимообусловливающих связей между некоррелируемыми механическими характеристиками материалов [5, 6, 8]; неудовлетворительное согласование экспериментальных и рекомендуемых расчетом диаграмм деформирования конкретных материалов при некоторых видах напряженного состояния. Последний из указанных недостатков наиболее весом, так как практически делает невозможным применение предлагаемых соотношений к описанию состояний разносопротивляющихся сред.

В публикуемой работе предложены соотношения между деформациями и напряжениями для упругих тел, механические характеристики которых зависят от вида напряженного состояния и допускающие линейную аппроксимацию экспериментальных зависимостей. На примере бетона с пределом прочности на осевое сжатие $R^- = 33{,}91$ МПа [1] показано, что полученные уравнения удовлетворительно предсказывают механическое поведение квазилинейных разносопротивляющихся материалов в широком диапазоне изменений напряженного состояния. Точность этих предсказаний заметно выше, чем для большинства моделей разномодульной теории упругости [5—12].

**1. Потенциал деформаций.** Рассмотрим класс состояний изотропных разносопротивляющихся сред. При этом плотность энергии упругой деформации $W$ будем считать функцией величины $S_0 = (\sigma^2 + \tau^2)^{1/2}$ — модуля вектора полного напряжения на октаэдрических площадках, фазы напряжений $\varphi$ и угла $\psi$ между нормалью к октаэдрической площадке и направлением вектора полного напряжения $S_0$. Здесь $\sigma = \sigma_{ij}\delta_{ij}/3$, $\tau = (s_{ij}s_{ij}/3)^{1/2}$, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma$ $(i, j = 1, 2, 3)$.

Положим

$$W = (b_1 + b_2\xi)\sigma^2 + (b_3 + b_4\xi + b_5\eta\cos 3\varphi)\tau^2 \quad (1.1)$$

$$\xi = \cos\psi = \sigma/S_0, \quad \eta = \sin\psi = \tau/S_0, \quad \cos 3\varphi = \sqrt{2}\det s_{ij}/\tau^3$$

где $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$, $b_5$ — константы, подлежащие определению.

Соответствующие потенциалу $W$ зависимости между деформациями и напряжениями имеют тензорно-нелинейный вид

$$e_{ij} = {}^2\!/_3(b_1 + b_2\xi)\sigma\delta_{ij} + {}^2\!/_3(b_3 + b_4\xi + b_5\eta\cos 3\varphi)s_{ij} +$$

$$+ {}^1\!/_3 b_3\xi(\eta^2\sigma\delta_{ij} - \xi^2 s_{ij}) + {}^1\!/_3 b_4\eta^2(\eta\tau\delta_{ij} - \xi s_{ij}) +$$

---

[1] См. также: *Касимов Р. Г.* Прочность и деформативность бетона при трехосном сжатии: Дис. ... канд. техн. наук: М., 1976. 180 с.

[2] См. также: *Матченко Н. М., Шерешевский Л. А., Легнау Н. А*: Вариант построения уравнений разномодульной теории упругости. Тула, 1981. 7 с. Деп. в ВИНИТИ 20.05.81, № 2352—81.

$$+ \tfrac{1}{3} b_5 [\xi^2 \eta s_{ij} \cos 3\varphi + \eta\tau\delta_{ij} (1{,}5\tau\partial \cos 3\varphi/\partial\sigma_{ij} - \xi\eta)] + 0{,}5 b_5 \eta\tau^2 \partial \cos 3\varphi/\partial\sigma_{ij} \quad (1.2)$$

Следствием (1.2) являются закон изменения объекта, закон изменения формы, соотношения, описывающие фазовую характеристику

$$\theta = \sigma/K_0 + \tau/D_0 \quad (1.3)$$

$$1{,}5\gamma = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\omega}\, (1{,}5\tau/G_0 + \sigma/D_0) \quad (1.4)$$

$$\operatorname{tg} \omega = 3b_5\eta \sin 3\varphi/(1{,}5\eta/G_0 + \xi/D_0) \quad (1.5)$$

$$1/K_0 = 2b_1 + b_2\xi (2 + \eta^2) - b_5\eta^3 \cos 3\varphi, \quad 1/D_0 = b_4\eta^3$$

$$1{,}5/G_0 = 2b_3 + \xi^3 (2b_4 - b_2) + b_5\eta (2 + \xi^2) \cos 3\varphi$$

$$\theta = e_{ij}\delta_{ij}, \quad \gamma = (\tfrac{4}{3}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij})^{1/2}, \quad \varepsilon_{ij} = e_{ij} - \theta\delta_{ij}/3$$

где $\omega$ — разность фаз напряжений и деформаций.

Заметим, что законы изменения объема (1.3) и формы (1.4) совместны. Т. е. полученные уравнения состояния (1.2) описывают дилатацию и учитывают влияние средних напряжений на формоизменение деформируемого тела в условиях простого нагружения. Влияние средних напряжений таково, что под действием гидростатического напряжения изменение формы не происходит (при $\tau = 0$ имеем $\gamma = 0$). Наличие подобных свойств у разносопротивляющихся материалов подтверждалось в ряде теоретических и экспериментальных исследований [2, 3, 5, 17, 18 ][3].

**2. Определение констант.** В опытах на одноосное растяжение измеряют осевое относительное удлинение $e_1^+$, поперечное относительное сужение $e_2^+$, осевую силу, вычисляют нормальные напряжения $\sigma_1^+$ и представляют опытные данные в виде

$$\sigma_1^+ = E^+ e_1^+, \quad e_2^+ = -\nu^+ e_1^+ \quad (2.1)$$

поэтому $E^+$, $\nu^+$ — экспериментально определенные константы. Аналогично проводят опыты на одноосное сжатие и соответственно определяют константы $E^-$, $\nu^-$ из уравнений

$$\sigma_1^- = E^- e_1^-, \quad e_2^- = -\nu^- e_1^- \quad (2.2)$$

С другой стороны, обратившись к потенциалу деформаций (1.1) и учитывая, что при одноосном растяжении $\xi = \sqrt{3}/3$, $\eta = \sqrt{6}/3$, $\cos 3\varphi = 1$, а при одноосном сжатии $\xi = -\sqrt{3}/3$, $\eta = \sqrt{6}/3$, $\cos 3\varphi = -1$, уравнения состояния (1.2) приведем к виду

$$e_1^+ = \tfrac{2}{9} (b_1 + \sqrt{3}\, b_2/3 + 2b_3 + 2\sqrt{3} b_4/3 + 2\sqrt{6} b_5/3)\, \sigma_1^+$$

$$e_2^+ = (b_1 + \sqrt{3}\, b_2 - b_3 - \sqrt{6}\, b_5)\, e_1^+/(b_1 + \sqrt{3}\, b_2/3 +$$
$$+ 2b_3 + 2\sqrt{3}\, b_4/3 + 2\sqrt{6}\, b_5/3)$$

$$e_1^- = \tfrac{2}{9} (b_1 - \sqrt{3}\, b_2/3 + 2b_3 - 2\sqrt{3}\, b_4/3 - 2\sqrt{6}\, b_5/3)\, \sigma_1^- \quad (2.3)$$

$$e_2^- = (b_1 - \sqrt{3}\, b_2 - b_3 + \sqrt{6}\, b_5)\, e_1^-/(b_1 - \sqrt{3}\, b_2/3 + 2b_3 - 2\sqrt{3}\, b_4/3 - 2\sqrt{6}\, b_5/3)$$

Подстановка экспериментально определенных деформаций $e_m^\pm$ (2.1), (2.2) в соотношения (2.3) позволяет получить четыре уравнения для вычисления четырех констант $b_n$ потенциала (1.1). Пятую константу принято представлять через модуль сдвига $G_1$, полученный по результатам обработки опыта на простой сдвиг. Однако, применительно к потенциалу (1.1), эта характеристика не может быть независимой константой, так как из опытов на одноосное растяжение и одноосное сжатие имеем

$$b_3 = 0{,}75\, [(1 + \nu^+)/E^+ + (1 + \nu^-)/E^-] \quad (2.4)$$

[3] См. указ. публ. *Касимов Р. Г.* ... с. 73.

а из опыта на простой сдвиг

$$b_3 = 0{,}75/G_1 \tag{2.5}$$

Таким образом, модуль сдвига $G_1$ должен вычисляться согласно условию

$$G_1 = 1/[(1+\nu^+)/E^+ + (1+\nu^-)/E^-] \tag{2.6}$$

Проблему определения пятой константы можно решить используя более сложный опыт, отличный от простого сдвига и одноосных растяжений и сжатия. К настоящему времени такие эксперименты проведены лишь для небольшого класса разносопротивляющихся материалов. Поэтому целесообразным в этом плане представляется априорное вычисление пятой константы. Предположим, что формы записи закона изменения объема разносопротивляющейся среды при всестороннем равномерном сжатии и всестороннем равномерном растяжении должны совпадать с формой, вытекающей из обобщенного закона Гука. Из обобщенного закона Гука при всестороннем растяжении и всестороннем сжатии имеем

$$\theta^+ = 3(1-2\nu^+)\sigma^+/E^+, \quad \theta^- = 3(1-2\nu^-)\sigma^-/E^- \tag{2.7}$$

С другой стороны, обратившись к потенциалу деформаций (1.1), для всестороннего растяжения при $\xi = 1$, $\eta = 0$ и всестороннего сжатия при $\xi = -1$, $\eta = 0$ из уравнения (1.3) вытекают следующие соотношения

$$\theta^+ = 2(b_1 + b_2)\sigma^+, \quad \theta^- = 2(b_1 - b_2)\sigma^- \tag{2.8}$$

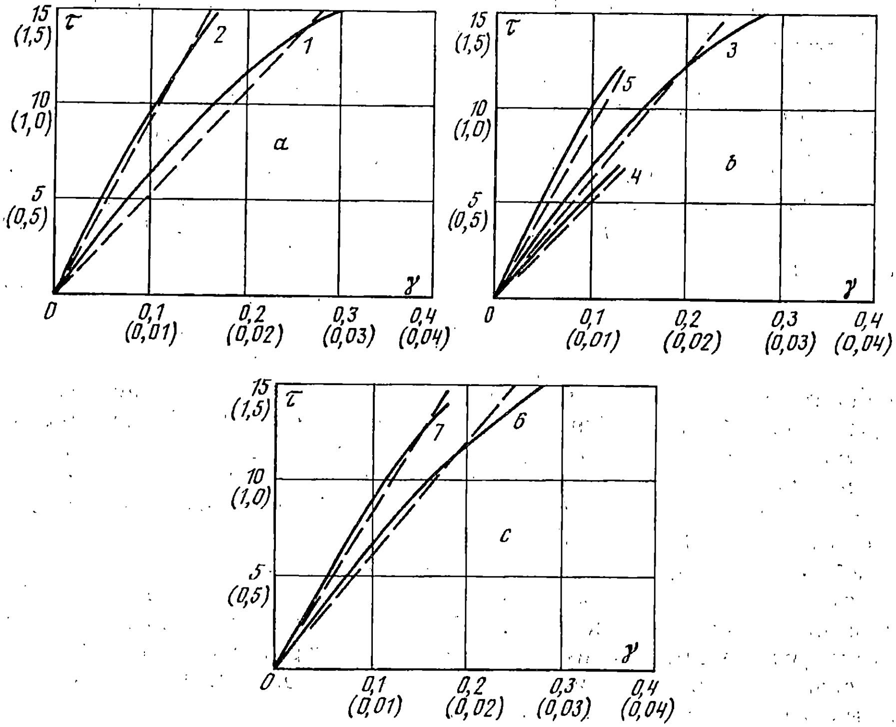
Таким образом, обрабатывая результаты экспериментов по одноосному растяжению и одноосному сжатию, а также сопоставляя выражения (2.7) и (2.8), для констант потенциала получим

$$\begin{aligned} b_1 &= 0{,}75\,[(1-2\nu^+)/E^+ + (1-2\nu^-)/E^-] \\ b_2 &= 0{,}75\,[(1-2\nu^+)/E^+ - (1-2\nu^-)/E^-], \\ b_3 &= 0{,}75\,[(1+\nu^+)/E^+ + (1+\nu^-)/E^-] \\ b_4 &= 0{,}375\,\{\sqrt{3}\,(3-4\nu^+)/E^+ - (3-4\nu^-)/E^-] - \\ &- 3\,[(1-2\nu^+)/E^+ - (1-2\nu^-)/E^-]\} \\ b_5 &= 0{,}75\sqrt{2}\,\{0{,}5\,[(1-2\nu^+)/E^+ - (1-2\nu^-)/E^-] + \sqrt{3}\,(\nu^+/E^+ - \nu^-/E^-)\} \end{aligned} \tag{2.9}$$

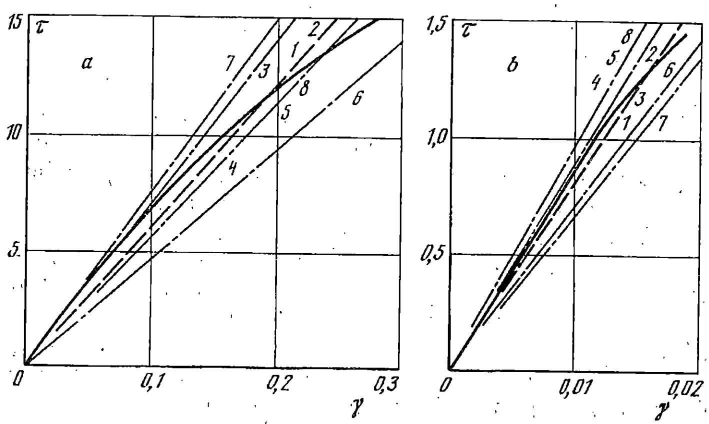
Пользуясь предложенной методикой определения констант, и ограничиваясь результатами испытаний на осевое растяжение и осевое сжатие для тяжелого бетона [1], получим $b_1 = 4{,}883\cdot10^{-5}$ МПа$^{-1}$, $b_2 = 0{,}728\cdot10^{-5}$ МПа$^{-1}$, $b_3 = 1{,}0315\cdot10^{-4}$ МПа$^{-1}$, $b_4 = -2{,}59\cdot10^{-5}$ МПа$^{-1}$, $b_5 = -1{,}173\cdot10^{-5}$ МПа$^{-1}$.

**3. Оценка качества потенциала (1.1) для описания сложных напряженных состояний.** Обоснованием применимости потенциала деформаций (1.1), очевидно, может служить лучшее, по сравнению с известными соотношениями, согласование расчетных диаграмм «напряжение — деформация» с экспериментальными. Кроме одноосных испытаний бетона в работе [1] приводятся сведения опытов для широкого диапазона плоских напряженных состояний, выполненных при пропорциональном нагружении. Для удобства анализа экспериментальных диаграмм [1] перестроим их в осях универсальных инвариантов $\tau - \gamma$ (фиг. 1, сплошные кривые). Характер представленных диаграмм при различных сочетаниях главных напряжений позволяет утверждать о существенной зависимости механических характеристик бетона [1] от вида напряженного состояния. Однако, в осях инвариантов $\sigma - \theta$ такого широкого «веера» диаграмм не наблюдается (диаграммы не приводятся). Т. е. изменение объема происходит по закону близкому к линейно-упругому.

Для оценки качества потенциала (1.1), с учетом вычисленных констант $b_1, \ldots, b_5$, были проведены расчеты состояний бетона [1] при разных сочетаниях главных напряжений. Рассчитанные рекомендуемые диаграммы $\tau - \gamma$




Фиг. 1




Фиг. 2

представлены на фиг. 1 в виде штриховых прямых. Очевидно, что диаграммы, приведенные на фиг. 1, *a* принимались во внимание при определении констант, а сочетание экспериментальных и расчетных диаграмм на фиг. 1, *b*, *c* может служить оценкой качества теоретических предсказаний по (1.2).

Таким образом, можно считать, что фиг. 1, *b*, *c* иллюстрируют адекватный характер потенциальных соотношений (1.1) реальным состояниям бетона [1].

Для демонстрации преимуществ потенциала деформаций (1.1) аналогичные вычисления были выполнены по формулам ряда наиболее известных моделей разномодульной теории упругости [5—12][4]. Для корректности сравнения проведенных расчетов константы указанных моделей также определялись из

[4] См. указ. публ. *Матченко Н. М.* ... с. 73.

| $N$ | $-1:-1$ | $-1:-0{,}5$ | $-1:+0{,}25$ | $+1:+0{,}5$ | $+1:+1$ | $\Sigma K\cdot 10^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (1.1) | 0,472 | 1,929 | 2,92 | 8,73 | 3,78 | 17,831 |
| [5] | 0,472 | 4,501 | 7,86 | 13,199 | 3,26 | 21,292 |
| [6] | 26,27 | 17,899 | 20,12 | 25,21 | 16,218 | 105,717 |
| [7] | 9,69 | 19,36 | 6,51 | 4,73 | 11,27 | 51,56 |
| [9] | 13,42 | 4,501 | 7,86 | 13,199 | 3,82 | 42,8 |
| * | 9,89 | 19,29 | 3,82 | 4,73 | 11,27 | 48,94 |
| [11] | 18,61 | 18,006 | 2,99 | 44,95 | 20,81 | 105,366 |
| [12] | 9,79 | 19,41 | 2,92 | 4,73 | 11,27 | 48,12 |

опытов на одноосное растяжение и одноосное сжатие, а модуль сдвига вычислялся по формуле (2.6). Рассчитанные по различным моделям [5—12] рекомендуемые диаграммы (штрих-пунктирные прямые) для двух характерных видов напряженного состояния бетона [1] ($\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : -1 : 0$; $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = +1 : +1 : 0$) изображены на фиг. 2, *a*, *b*. Заметим, что параметры $\tau$ на фиг. 1, 2 измерялись в МПа, а $\gamma$ — в %.

Сравнительный характер аппроксимаций экспериментальных диаграмм соотношениями [5—12] и (1.2) при других видах напряженного состояния практически сохраняется. Точность аппроксимаций экспериментальных диаграмм соответствующими уравнениями оценивалась величиной критериального параметра $K$, представляющего собой величину относительной энергетической погрешности принятых моделей определяющих соотношений:

$$K = |U_e - U_t| / U_e \tag{3.1}$$

$$U_e = \int_0^{\gamma_p} \tau_e d\gamma_e, \quad U_t = \int_0^{\gamma_p} \tau_t \gamma_t$$

где $\tau_e$, $\gamma_e$ — октаэдрические касательные напряжения и октаэдрический сдвиг, определенные по результатам эксперимента; $\tau_t$, $\gamma_t$ — тоже, но вычисленные согласно уравнениям (1.2) или по одному из вариантов соотношений [5—12]; $\gamma_p$ — деформационная граница интервала аппроксимаций.

Критериальная оценка определялась отдельно по каждому виду напряженного состояния (фиг. 1, *b*, *c*) и в совокупности в форме суммарного параметра $\Sigma K$. Критериальные оценки погрешности $K\cdot 10^2$ для каждого варианта $N$ определяющих соотношений и для различных видов напряженного состояния ($\sigma_1 : \sigma_2$ ($\sigma_3 = 0$)) сведены в таблицу.

Как видно из таблицы и фиг. 2 точность уравнений (1.2) при описании зависимостей между деформациями и напряжениями для бетона [1] существенно выше ($\Sigma K = 0{,}17831$), чем точность наиболее известных моделей разномодульной теории упругости [5—12] [5].

Таким образом, можно утверждать, что предложенный потенциал деформаций (1.1) вполне применим для расчета напряженно-деформированного состояния конструкций, выполненных на основе бетона, имеющего слабо нелинейные участки диаграмм. Однако, при выходе на ветви упрочнения погрешность квазилинейных уравнений возрастает, что требует постулирования нелинейных физических соотношений.

---

[5] Звездочкой в таблице отмечены результаты, полученные в работе Матченко Н. М., цитированной на с. 73.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tasuji M. E., Slate F. O., Nilson A. H.* Stress-Strain Response and Fractur of Concrete in Biaxial Loading/ACI J. Proc. 1979. V. 76. No. 7. P. 806—812.
2. *Kupfer H. B., Hilsdof H. K., Rusch H.* Behavior of Concrete Under Biaxial Stresses/ACI J. Proc. 1969. V. 66. No. 8. P. 656—666.
3. *Леонов М. Я., Паняев В. А., Русинко К. Н.* Зависимости между деформациями и напряжениями для полухрупких тел//Инж. ж. МТТ. 1967. № 6. С. 26—32.
4. *Березин А. В., Ломакин Е. В., Строков В. И., Барабанов В. Н.* Сопротивление деформированию и разрушению изотропных графитовых материалов в условиях сложного напряженного состояния//Проблемы прочности. 1979. № 2. С. 60—65.
5. *Амбарцумян С. А.* Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982. 320 с.
6. *Матченко Н. М., Толоконников Л. А.* О связи между напряжениями и деформациями в разномодульных изотропных средах//Инж. ж. МТТ. 1968. № 6. С. 108—110.
7. *Jones R. M.* Stress-Strain Relation for Materials With Different Moduli in Tension and Compression//AIAA J. 1977. V. 15. No. 1. P. 16—25.
8. *Ломакин Е. В., Работнов Ю. Н.* Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела//Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 6. С. 29—34.
9. *Бригадиров Г. В., Матченко Н. М.* Вариант построения основных соотношений разномодульной теории упругости//Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 5. С. 109—111.
10. *Цвелодуб И. Ю.* К разномодульной теории упругости изотропных материалов//Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР. 1977. Вып. 32. С. 123—131.
11. *Туровцев Г. В.* О построении определяющих уравнений для изотропных упругих сред с усложненными свойствами//Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР. 1981. Вып. 53. С. 132—143.
12. *Шапиро Г. С.* О деформации тел, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию//Инж. ж. МТТ. 1966. № 2. С. 123—125.
13. *Ломакин Е. В.* Нелинейная деформация материалов, сопротивление которых зависит от вида напряженного состояния//Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 4. С. 92—99.
14. *Матченко Н. М., Толоконников Л. А.* О нелинейных соотношениях разномодульной теории упругости//Сб. работ по теории упругости. Тула: Изд-во политехн. ин-та. 1968. С. 69—72.
15. *Пономарев Б. В.* Изгиб прямоугольных пластин из нелинейно-упругих материалов, неодинаково работающих на растяжение и сжатие//Прикл. механика. 1968. Т. 4. Вып. 2. С. 20—27.
16. *Петров В. В., Макеев А. Ф., Овчинников И. Г.* Изгиб прямоугольных пластин из нелинейно-упругого разносопротивляющегося растяжению и сжатию материала//Изв. вузов. Строительство и архитектура. 1980. № 8. С. 42—47.
17. *Быков Д. Л.* Основные уравнения и теории для одной модели физически нелинейной среды//Инж. ж. МТТ. 1966. № 4. С. 58—64.
18. *Козачевский А. И.* Модификация деформационной теории пластичности бетона и плоское напряженное состояние железобетона с трещинами//Строительная механика и расчет сооружений. 1983. № 4. С. 12—16.

Тула

Поступила в редакцию
17.XII.1992