

УДК 539.3

© 1995 г. В. Д. КЛЮШНИКОВ

ПРОБЛЕМА ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ И СОВРЕМЕННАЯ ТЕРМОМЕХАНИКА

Излагаются основные положения современной термодинамики. Обсуждается одно дополнение к ним для циклических процессов деформирования сплошных сред. Выявляются ограничения, накладываемые принципом термодинамического согласования на форму определяющих соотношений. В силу принципа локальной определенности основное место отводится исследованиям по термомеханике однородных процессов.

1. Как и в большинстве современных литературных источников будем рассматривать термодинамику как аксиоматическую науку, основанную на ряде постулатов не противоречащих экспериментам, наблюдениям и практике человеческой деятельности, первым из которых является закон сохранения энергии, который для замкнутой системы (изучаемое тело и окружающая среда) в современном представлении может быть записан в виде

$$E = W^e + Q^e, \quad (\dots) = d(\dots)/dt \quad (1.1)$$

Здесь E — так называемая полная энергия, Q^e — скорость подвода внешнего тепла, W^e — мощность работы внешних массовых F_i и поверхностных T_i сил, действующих в объеме V и на поверхности Σ тела

$$W^e = \int_{\Sigma} T_i v_i d\Sigma + \int_V \rho F_i v_i dV \quad (1.2)$$

где v_i — компоненты скорости перемещения частиц, ρ — плотность. Конечно, исходная классическая трактовка равенства (1.1) как сохранения суммы элементарных количеств совершенной над телом работы и подведенному к телу тепла требует конкретизации свойств среды. Однако соотношение (1.1) обладает очень важным специфическим свойством, которое и без детальной конкретизации среды позволяет выявить принципиальные черты термодинамических процессов, т. е. свойством эвристическим: хотя порознь W^e и Q^e , может быть, и не является полным производным по времени от каких-либо объектов, их сумма всегда такой производной является. Содержательность такого заключения будет раскрыта ниже, а сейчас запишем (1.1) в более удобном для дальнейшего виде.

Используя теорему живых сил

$$W^e = W^i + K, \quad W^i = \int_V \sigma_{ij} e_{ij} dV, \quad e_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (1.3)$$

где W^i мощность работы внутренних сил, K — кинетическая энергия, e_{ij} — тензор скоростей деформаций, и вводя обозначение

$$U = E - K \quad (1.4)$$

на основе (1.1) получим

$$U = W^i + Q^e \quad (1.5)$$

Это соотношение в дальнейшем и будем представлять как первый закон термодинамики. Здесь U так называемая внутренняя энергия, W^i может быть вычислено через мощность работы внешних сил и кинетическую энергию, а Q^e измерено в единицах мощности работы по скорости оттока тепла из окружающей тело среды. Что же касается прибывающего в само тело тепла, то скорость его притока Q^i регламентируется вторым законом термодинамики:

$$Q^i/T = S, \quad Q^i - Q^e = Q^* \geq 0 \quad (1.6)$$

где T — абсолютная температура, S — энтропия, Q^* — скорость некомпенсированного тепла. Все что в дальнейшем требуется в отношении понятия абсолютной температуры, которая как длина может измеряться в различных шкалах, это то, что она как и длина является величиной положительной. В однородном процессе она должна быть одинаковой во всех точках тела, как и другие, входящие в (1.5) и (1.6) величины. Откладывая на будущее обсуждение условий реальной осуществимости такого процесса, здесь будем полагать, что эти условия выполнены.

Главными качествами, по крайней мере для целей данного исследования, является то, что скорость притока тепла в теле Q^i не меньше скорости оттока тепла из окружающей среды Q^e и то, что хотя сама скорость Q^i не является, вообще, полной производной какого-либо объекта, частное отделение этой скорости на абсолютную температуру такой производной является. Следствием (1.6) является неравенство

$$S \geq Q^e/T \quad (1.7)$$

Естественно, что подчеркиваемое выше дифференциальное качество законов термодинамики, инструментом исследования может стать, только если существует способ распознавания того, является ли данная скорость изменения некой величины полной производной по времени или нет. В рамках классической термодинамики, где по определению величины U и S являются функциями состояния, т. е., функциями конечного набора внутренних параметров γ_k ($k=1, 2, \dots, n$) и, возможно, времени, этот вопрос решается просто на основе правила дифференцирования сложной функции. Для того, чтобы дифференциальная форма

$$Q = Q_k \dot{\gamma}_k + Q_0 \quad (1.8)$$

являлась полной производной по времени от какой-либо функции N , надо чтобы коэффициенты Q_k и Q_0 имели специальную структуру

$$Q_k = \partial N / \partial \gamma_k, \quad Q_0 = \partial N / \partial t \quad (1.9)$$

Очевидно, что скорости Q^i , Q^* , W^i а, следовательно, на основании (1.6) и Q^e представимы в форме (1.8), но, вообще, не удовлетворяют требованию (1.9).

В классической термодинамике выбор γ_k определяет качественные особенности термомеханического поведения среды. Так выбор γ_k в виде компонент тензора деформаций ϵ и абсолютной температуры T определяет класс термоупругих тел. Если сюда добавляются компоненты тензора скоростей деформаций $\dot{\epsilon}$, то это класс вязкоупругих материалов и т. д.

Однако существуют материалы, способные запоминать всю, или конечную часть, предыстории проходящего в них термомеханического процесса (наследственная упругость, пластичность и т. д.). Попытка расширения набора γ_k для адекватного описания поведения таких тел может быть не эффективной, а иногда, как это будет ясно из дальнейшего, невозможна вообще.

Применительно к таким телам классическая термодинамика оказывается бессильной, а потеря, как казалось, основного фактора — возможности представления внутренней энергии U , энтропии S и других термодинамических параметров в виде функций состояния могла поставить под сомнение содержательность самих законов термодинамики.

Однако существует возможность простого обобщения термодинамики на такие

сложные среды, не нарушающего указанное выше дифференциальное свойство соотношений (1.5)—(1.7), свойство, которое теперь полезно представить следующим образом. Для содержательности этих соотношений важна не столько конструкция самих объектов S , Q , Q^* , W , как то, что U и S обязательно являются полными производными по времени от объектов U и S .

Таким образом в качестве перечисленных и, возможно, других термодинамических объектов, могут выступать не только функции, но и функционалы (операторы) способные нести память об истории изменения внутренних параметров во времени. А если так, то нет необходимости специально утруждаться выбором параметров γ_k , как это было необходимо в классической трактовке законов термодинамики, а выбрать для деформируемых твердых тел (материалов) единый набор [2], например, в виде компонент тензора деформации ϵ и абсолютной температуры T , а конкретизацию свойств материалов производить выбором формы соответствующих функционалов.

В публикуемой работе для простоты условимся отмечать зависимость типа функции круглыми скобками, а типа функционала (оператора) — квадратными: $z = f(x)$ — функция, $z = f[x]$ — функционал. Напомним, что функция — это поточечная зависимость (точка x_0 отвечает точке z_0), а функционал — это зависимость линия—точка (линии $x(t)$ и точке $x_0(t_0)$ отвечает точка z_0). Для подтверждения содержательности, в указанном выше смысле, соотношений (1.5)—(1.7) надо определить структуру полной производной функционала по времени.

Рассмотрим, например, при достаточно гладком ядре φ_k функционал

$$z = \Psi[\gamma_k, t] = \int_0^t \varphi_k(t, \tau) d\gamma_k(\tau) = \int_0^t \varphi_k(t, \tau) \dot{\gamma}_k d\tau \quad (1.10)$$

По правилу дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом и зависящим от параметра подынтегральным выражением имеем:

$$\dot{z} = \varphi_k(t, t) \dot{\gamma}_k + \int_0^t \frac{\partial \varphi_k(t, \tau)}{\partial t} d\gamma_k(\tau) \quad (1.11)$$

Этот простейший пример подсказывает, что существует непустое множество функционалов, полная производная по времени которых может быть представлена в форме аналогичной производной функции

$$\dot{\Psi} = \frac{d}{dt} [\gamma_k, t] = \Psi_{\gamma_k} [\gamma_k, t] \dot{\gamma}_k + \Psi_t [\gamma_k, t] \quad (1.12)$$

где Ψ_{γ_k} и Ψ_t частные (в обобщенном смысле) производные от Ψ по γ_k и t соответственно. Так в рассмотренном выше примере

$$\Psi_{\gamma_k} [\gamma_k, t] = \varphi_k(t, t) \quad (1.13)$$

$$\Psi_t [\gamma_k, t] = \int_0^t \frac{\partial \varphi_k(t, \tau)}{\partial t} \dot{\gamma}_k(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{\partial \varphi_k(t, \tau)}{\partial t} d\gamma_k(\tau)$$

Нетрудно убедиться, что в рассмотренном примере и сам функционал и его частные производные обладают тем свойством, что при любом малом продолжении процесса их изменения малы вне зависимости от величины $\dot{\gamma}_k(t)$, т. е. значение этих функционалов в момент $t + \Delta t$ при $\Delta t \rightarrow 0$ совпадают со значениями в момент t . Это так называемая непрерывность справа, и в дальнейшем будут рассматриваться только такие среды с конечной памятью, которые этим свойством обладают.

Естественно, для практического использования представления (1.12), которое в ряде источников (см., например, [2]) называется цепным правилом, требуется расшифровка конструкций указанных частных производных, и для ряда функционалов такая расшифровка известна [2, 3].

2. Перепишем первое из (1.6) в виде

$$Q^e + Q^* = TS \quad (2.1)$$

и исключив отсюда с помощью (1.3) Q^e , получим

$$U - W^i + Q^* - TS = 0 \quad (2.2)$$

Введем новый термодинамический объект

$$F = U - ST \quad (2.3)$$

называемый свободной энергией, и преобразуем (2.2), с учетом (1.6) к виду

$$Q^* = W^i - F - ST, \quad Q^* \geq 0 \quad (2.4)$$

В дальнейшем, несколько вольно, будем называть первое из (2.4) условием термодинамического баланса¹. Заметим, что условие

$$W^i - F - ST \geq 0 \quad (2.5)$$

часто называют неравенством диссипации.

Как и выше при малых деформациях, будем считать F , так же, как U и S функционалами от независимых аргументов ϵ_{ij} , T , или, кратко, от ϵ и T (см., например, [2]) и отметим следующее.

В классической термодинамике, где U , S , F полагались функциями состояния, понятия замкнутого цикла (см., например, [1]) в принципиальном плане является одним из главных, если не решающим. Собственно, с помощью этого понятия (правда на примере весьма частного вида сред) выводятся условия (2.4), как следствия положения о невозможности осуществления вечного двигателя второго рода (тепловой машины, выделяющей механическую энергию из тепла одного нагревателя). Общей декларацией классической термодинамики является неизбежность положения, что эвристическую природу имеют лишь циклы, замкнутые по всем внутренним параметрам среды, хотя основные (если не все) результаты, связанные с понятием циклов, получены для сред типа термоупругих, где внутренними параметрами служат некий коэффициент деформации ϵ и температура T , или что-то подобное. Уже для среды с ньютоновской вязкостью пригодный в отношении классической термодинамики цикл должен быть замкнут по параметрам ϵ , $\dot{\epsilon}$, T . Для более сложных сред, например для пластичности, определить конечный набор параметров замыкания весьма трудно, если вообще возможно.

В этом отношении в современной термодинамике [2] представительным объектом для любой среды считается цикл замкнутый по одному и тому же набору параметров (ситуаций). Так в рамках механики сплошных сред в качестве такого набора можно взять деформации ϵ и абсолютную температуру T (и иногда ее градиент $T_{,i}$). Правда за такое упрощение приходится расплачиваться некоторой неопределенностью, устранение которой достигается либо на основе анализа свойств среды, либо, если такой анализ по каким-то причинам невозможен, введением нового постулата.

Рассмотрим некоторую тепловую машину с произвольным рабочим телом, получающую в цикле, замкнутом по ϵ и T , от нагревателя тепло Q^{v+} , отдающую холодильнику тепло Q^{v-} , и вырабатывающую энергию A . По определению коэффициент полезного действия (КПД) равен

$$\eta = A/Q^{v+} \quad (2.6)$$

Очевидно, что для цикла, в котором прирост кинетической энергии мал, или равен нулю, на основании (1.3):

¹ Не путать с уравнением баланса энергии — широко распространенным наименованием первого закона термодинамики.

$$A = -W^{vi} = - \int_{t_1}^{t_2} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV dt \quad (2.7)$$

Несложный расчет с учетом первого и второго законов термодинамики в виде

$$Q^{v-} = Q^{v+} - \Delta U + W^{vi}, \quad \Delta S \geq \int_{t_1}^{t_2} \frac{Q^e}{T} dt \quad (2.8)$$

где значком Δ отмечен прирост соответствующих величин за цикл, выполненный в [2], приводит к выражению

$$\eta = - \frac{W^{vi}}{Q^{v+}} \leq 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} - \frac{\Delta U - T_{\min} \Delta S}{Q^{v+}} \quad (2.9)$$

Последний член в (2.9) можно преобразовать введением свободной энергии. Поскольку в замкнутом цикле $\Delta T = 0$, то

$$\Delta U = \Delta(F + ST) = \Delta F + T_0 \Delta S$$

где T_0 — температура начала цикла, так что если положить $T_0 = T_{\min}$, т. е. за начало цикла считать момент с минимальной температурой, то последний член в (2.9) будет равен $\Delta F/Q^{v+}$, а само условие (2.9) принимает вид

$$\eta \leq 1 - T_{\min}/T_{\max} - \Delta F/Q^{v+} \quad (2.10)$$

Как известно [1] лучшая оценка КПД для упомянутых выше простейших сред представляется двумя первыми членами правой части (2.9) (цикл Карно для совершенного газа):

$$\eta = 1 - T_{\min}/T_{\max} < 1 \quad (2.11)$$

Исторический опыт наблюдений за работой различных тепловых машин не противоречит этой оценке. Следовательно, чтобы не испортить классическую оценку КПД следовало бы признать, что

$$\Delta F \geq 0 \quad (2.12)$$

Однако для произвольных термодинамических систем такое заключение было бы поспешным. Во-первых, в каком-то смысле тепловой машиной может быть названа и живая природа (и космическое мироздание)! Даже если для таких систем и выполняются первый и второй законы термодинамики в той (функциональной) трактовке, что принимаются здесь, утверждать безоговорочность выполнения (2.11), учитывая, например, способность этих систем к самоорганизации, нельзя. Во-вторых, даже для неживой природы и, в частности, для тепловых устройств, сконструированных (или могущих быть сконструированными) человеком, отмеченный выше исторический опыт утверждает несколько меньшее, чем то, что требует классика, а именно: чтобы общий или средний КПД непрерывно работающей тепловой машины, т. е. совершающей достаточно большое количество одинаковых циклов, был меньше единицы, в то время как КПД некоторых отдельных циклов может и не удовлетворять условию (2.11).

Общий или средний КПД естественно определить формулой

$$\eta = - \sum W_n^{vi} / \sum Q_n^{v+} \leq 1 - T_{\min}/T_{\max} - \sum \Delta F_n / \sum Q_n^{v+} \quad (2.13)$$

где суммы \sum берутся по номерам циклов n от 1 до N , так что выше сформулированное требование выражается условием

$$\eta^v < 1 \quad (2.14)$$

Это обстоятельство не привлекало особого внимания, пока в термодинамике ограничивались рассмотрением тел «без памяти». Для них все циклы одинаковы по результатам, так что свойства непрерывно работающего устройства вполне

определялись свойствами одного цикла. В телах с памятью о предыстории деформирования это не так. Например, уже в первом цикле КПД может превысить единицу, поскольку предшествующей циклу процесс может быть аномальным по накоплению свободной энергии. Так что математической формулировкой результата «исторического опыта» является не условие (2.12), а условие

$$\sum_{n=1}^N \Delta F_n \geq 0 \quad (2.15)$$

где N — количество циклов, которое должно быть достаточно большим, при одинаковых Q_n .

Отметим, что в результате сказанного, утверждение классической термодинамики о независимости максимального КПД цикла тепловой машины от свойств рабочего тела становится, вообще, не приемлемым. В некоторых случаях именно свойства этого рабочего тела позволяют оправдать классическое требование (2.11). Так, например, будет для всех совершенных тел, для которых ΔF в любом цикле обращается в нуль, и даже для некоторого весьма обширного класса тел с памятью при дополнительных условиях относительно вида процессов.

3. Полагая, что параметры U, F, S , так же как и Q^i, Q^e, Q^* обладают свойством аддитивности, т. е. представим через свои массовые значения в виде

$$U = \int_V \rho u dV, \quad F = \int_V \rho f dV, \quad S = \int_V \rho s dV, \quad Q = \int_V \rho q dV \quad (3.1)$$

и ограничиваясь в дальнейшем рассмотрении случая малых деформаций, т. е. когда можно полагать, что $e_{ij} = \varepsilon_{ij}$, $\rho = \text{const}$ первый закон термодинамики (1.5) с учетом закона сохранения массы перепишем в форме

$$\int_V (\rho u - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - \rho q^e) dV = 0$$

Откуда в силу произвольности объема для частицы среды следует

$$u = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} / \rho + q^e \quad (3.2)$$

Аналогичным образом запись второго закона термодинамики (1.6) приобретает вид

$$s = (q^e + q^*) / T, \quad q^* \geq 0 \quad (3.3)$$

а условие термодинамического баланса и неравенство диссипации запишутся в форме

$$q^* = w - f - sT \geq 0, \quad w = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} / \rho = \sigma \dot{\varepsilon} / \rho \quad (3.4)$$

где f удельная свободная энергия $f = u - sT$. Естественным образом переписывается и неравенство (2.15) для частицы среды

$$\sum_{n=1}^N \Delta f_n \geq 0 \quad (3.5)$$

В дальнейшем нас прежде всего будет интересовать вопрос о том, в какой мере включение в определяющее соотношение тепловых параметров, т. е. расширение механики до термомеханики, позволяет конкретизировать (или отбраковать) вид определяющего соотношения. Надежды на успех в этом деле основаны в первую очередь на том, что указанное расширение предполагает такое связанное с данным типом определяющего соотношения, задание свободной энергии и энтропии, которое, уже как минимум, должно удовлетворять условию термодинамического баланса². Это положение, которым в дальнейшем будем

² Возможны альтернативные варианты; например, задание свободной энергии и некомпенсированного тепла, и так далее.

постоянно пользоваться, можно назвать принципом термодинамического соглашения.

Рассмотрим некоторые модели сред. Простейшая из таких моделей — упругость, а точнее — термоупругость, определяется соотношением, где напряжения σ , деформации ϵ и температура T связаны конечным соотношением

$$\sigma = \sigma^0(\epsilon, T) \quad (3.6)$$

Для замыкания системы разрешающих уравнений требуется задать свободную энергию f , энтропию s и, возможно, некомпенсированное тепло q^* так, чтобы выполнялось условие (3.4).

В дальнейшем там, где это возможно (в соотношениях типа функций, как в рассматриваемом случае), будем пользоваться приемом, который можно назвать правилом равноприсутствия [2]: при задании указанных выше термодинамических функций будем считать их зависимыми от того же набора внутренних параметров, что и в определяющем соотношении. Так для термоупругости, положим, что f и s определяются конечным соотношением от деформаций и температуры

$$f = f(\epsilon, T), \quad s = s(\epsilon, T) \quad (3.7)$$

Поскольку при этом $f = f_\epsilon \epsilon + f_T T$, $f_\epsilon = \partial f(\epsilon, T)/\partial \epsilon$, $f_T = \partial f(\epsilon, T)/\partial T$, то неравенство диссипации можно представить в виде

$$(\sigma/\rho - f_\epsilon) \dot{\epsilon} - (s - f_T) \dot{T} \geq 0 \quad (3.8)$$

Напомним, что первый член — это свертка тензоров и в координатной форме состоит из шести слагаемых.

Величины в скобках, очевидно, не зависят от ϵ и T , и поэтому при произвольных ϵ , T неравенство (3.8) может быть выполнено только при условии, что эти скобки равны нулю, т. е. при

$$\sigma_{ij} = \rho \partial f / \partial \epsilon_{ij}, \quad \dot{s} = - \partial f / \partial T \quad (3.9)$$

а поскольку левая часть (3.8) по (3.4) равна q^* , то одновременно надо потребовать, чтобы

$$q^* = 0 \quad (3.10)$$

Полученный результат означает, что для термоупругого тела напряжения не являются произвольной тензорной функцией деформаций и температуры, а выражаются через последних посредством одной скалярной функции — свободной энергии, также как и энтропия, и что некомпенсированное тепло или внутренняя диссипация отсутствует. Тела обладающие этим последним свойством принято называть совершенными.

Как видно, уже в простейшем случае неравенство диссипации накладывает довольно сильные ограничения на определяющее соотношение, хотя начальные посылки были весьма неконкретными.

Для термоупругости в силу того, что свободная энергия является функцией (а не функционалом) от ϵ и T условие (3.5) выполняется автоматически, ибо при замкнутом по ϵ и T цикле Δf_n для любого номера цикла обращается в нуль.

Любое реальное тело в той или иной степени обладает свойством упругости. Поэтому свободная энергия, отвечающая свойству упругости, заслуживает особого внимания и детализации. В дальнейшем ее будем обозначать через f^0 , а конкретизация для малых деформаций и слабого изменения температуры, т. е. при условиях

$$|\epsilon| \ll 1, \quad T - T_0 \ll T_0 \quad (3.11)$$

где T_0 — температура начального недеформированного тела, заключается в сохранении в выражении для f^0 только линейных и квадратичных членов. С учетом того, что в исходном (естественном) состоянии $\epsilon = \sigma = 0$, а $T = T_0$, для

изотропного тела, при сделанных предположениях максимально общим будет задание f^0 в виде

$$f^0 = \frac{\lambda}{2\rho} \varepsilon_{(1)}^2 + \frac{\mu}{\rho} \varepsilon_2 - \frac{\alpha}{\rho} (3\lambda + 2\mu) (T - T_0) \varepsilon_{(1)} - \frac{C_e}{2T_0} (T - T_0)^2 - s_0^0 (T - T_0) + \text{const} \quad (3.12)$$

Отсюда на основании (3.9):

$$\sigma_{ij}^0 = \lambda \varepsilon_{(1)} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha (T - T_0) \delta_{ij} \quad (3.13)$$

$$s^0 = \frac{(3\lambda + 2\mu)}{\rho} \alpha \varepsilon_{(1)} + \frac{C_e}{T_0} (T - T_0) + s_0^0$$

где λ, μ — коэффициенты Ламе, α — коэффициент температурного расширения, $\varepsilon_{(1)}, \varepsilon_{(2)}$ — первый и второй инварианты тензора малых деформаций, s_0^0 — энтропия в исходном состоянии, C_e — материальная константа (теплоемкость при постоянном объеме).

Перейдем теперь к модели простейшей линейной вязкоупругости, с определяющим соотношением

$$\sigma = \sigma^0 + \mu_1 \dot{\varepsilon} \quad (3.14)$$

где σ^0 — определено соотношением (3.13), μ_1 — коэффициент вязкости. По правилу равноприсутствия $f = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, T)$, $s = s(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, T)$. В этом случае неравенство диссипации приводится к виду

$$(\sigma/\rho - f_\varepsilon) \dot{\varepsilon} - (s + f_T) T - f_\varepsilon \ddot{\varepsilon} + \mu_1 \dot{\varepsilon}^2 \geq 0 \quad (3.15)$$

Коэффициент при $\ddot{\varepsilon}$ для удовлетворения этого неравенства должен быть равным нулю, ибо остальные члены не зависят от $\ddot{\varepsilon}$, а последние произвольны. Значит на самом деле f не зависит от $\dot{\varepsilon}$. Далее, поскольку (3.15) должно выполняться при любых $\dot{\varepsilon}$ и, в частности, как угодно малых, то (3.15) должно выполняться и при отброшенном последнем члене. Остается удовлетворить неравенство $(\sigma^2/\rho - f_\varepsilon) \dot{\varepsilon} - (s + f_T) T \geq 0$. Поскольку f не зависит от $\dot{\varepsilon}$, а σ^0, f и s не зависят от T последнее неравенство можно удовлетворить лишь требованием равенства нулю обеих скобок. Следовательно, как и в упругости выполняются соотношения (3.9) при $f = f^0, s = s^0$, а условие (3.5) превращается в равенство $\Delta f = 0$.

Возвращаясь к (3.15) замечаем, что в левой части этого неравенства на основании сказанного выпали все члены за исключением последнего, который, как это следует из уравнения термодинамического баланса, представляет скорость некомпенсированного тепла. Следовательно при линейной вязкости

$$q^* = \mu_1 \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} / \rho, \quad \mu_1 \geq 0 \quad (3.16)$$

Отметим, что как видно, для линейной вязкости свободная энергия и энтропия определяются как для упругого тела. Это положение, обычно принимаемое как гипотеза Гиббса, здесь получено как простое следствие принципа термодинамического согласования.

В связи с этим важным положением интересно отметить следующее обстоятельство. В упомянутой в п. 2 одинаковости циклов при формулировке общего КПД тепловой машины имелась, очевидно, ввиду одинаковая геометрия циклов в пространстве ε, T , что же касается скорости прохождения таких циклов, то они в рамках выполнимости однородного процесса могут быть произвольны. И если в термоупругости в связи с выполнением условия (3.5) вопросов не возникало, то при линейной вязкости такой вопрос мог бы возникнуть. Однако то обстоятельство, что несмотря на зависимость от $\dot{\varepsilon}$ свободная энергия, как и в упругости,

есть функция только ϵ и T , условие (3.5) для N циклов, как и условие $\Delta f_n \geq 0$ для каждого отдельного цикла выполняется.

4. Следуя намеченному выше ряду повышения порядка вводимых в определяющее соотношений производных по времени от тензора деформаций, рассмотрим гипотетическое тело³, определяющим соотношением для которого является

$$\sigma = \sigma^0 + \mu_1 \dot{\epsilon} + \mu_2 \ddot{\epsilon} + \mu_0 \epsilon \quad (4.1)$$

где σ^0 определено формулой (3.13), μ_1, μ_2, μ_3 — материальные константы.

Для нужного задания термодинамических параметров полезны наводящие соображения, следующие из формы представления члена $\sigma \dot{\epsilon}$, входящего в уравнение термодинамического баланса. Представим этот член на основании (4.1) в форме

$$\sigma \dot{\epsilon} = \sigma^0 \dot{\epsilon} + \frac{1}{2} [\mu_2 \dot{\epsilon}^2 + \mu_3 (\dot{\epsilon}^2)'] + \mu_1 \dot{\epsilon}^2 - \mu_3 \ddot{\epsilon}^2$$

Теперь очевидно, что к удовлетворению неравенства диссипации может привести задание

$$f = f^0 + f^*, \quad f^* = \frac{1}{2} [\mu_2 \dot{\epsilon}^2 + \mu_3 (\dot{\epsilon}^2)'] / \rho \quad (4.2)$$

Внося эти представления в (2.4) убеждаемся, что принцип термодинамического согласования действительно выполняется, если принять

$$s = - \frac{\partial f^0}{\partial T}, \quad q^* = \frac{1}{\rho} (\mu_1 \dot{\epsilon}^2 - \mu_3 \ddot{\epsilon}^2) \quad (4.3)$$

В силу независимости $\dot{\epsilon}$ и $\ddot{\epsilon}$ из последнего следует, что

$$\mu_1 \geq 0, \quad \mu_3 \leq 0 \quad (4.4)$$

Не трудно проверить, что эти результаты в точности следуют из прямого анализа неравенства диссипации по типу того, что был приведен выше для линейной вязкости.

Условие (3.5) о неотрицательности общего прироста свободной энергии в N замкнутых по ϵ и T циклах в данном случае совпадает с подобным требованием для отдельно взятого цикла

$$\mu_2 \Delta (\dot{\epsilon}^2) + 2\mu_3 \Delta (\dot{\epsilon} \ddot{\epsilon}) \geq 0 \quad (4.5)$$

Поскольку никаких условий на $\dot{\epsilon}$ и $\ddot{\epsilon}$ в таком цикле не накладывается, то приросты величин в скобках независимы и произвольны как по величине, так и по знаку, а это означает, что неравенство можно удовлетворить только требованием

$$\mu_2 = \mu_3 = 0 \quad (4.6)$$

При неудовлетворении этих условий тепловая машина с рабочим телом, следующим соотношению (4.1) могла бы выдавать КПД большей единицы. Заметим, что в классической термодинамике в силу тождества $\Delta f \equiv 0$ условия (4.6) отсутствуют и даже нет ограничения на знак μ_2 . Имеют место лишь условия (4.4), которых недостаточно, чтобы обезопасить теорию от парадоксов, один из которых сейчас будет продемонстрирован.

Рассмотрим колебания массы M , закрепленной к неподвижному основанию через посредство невесомого стержня из материала (4.1).

Считаем стержень теплоизолированным, и процесс, в нем происходящий, однородным.

Однородный процесс в теплоизолированном стержне является, очевидно, ади-

³ Жидкость Ривлина — Эриксона по терминологии [2].

абатическим, для которого $q^e = 0$, и по первому закону термодинамики (3.2), с учетом того, что $u = f + sT$: $\dot{u} = \dot{f} + s\dot{T} + \dot{s}T = \sigma_1 \dot{\varepsilon}_1 / \rho$, где σ_1 и ε_1 — осевые компоненты напряжения и деформации. Сопоставления этого равенства и уравнения термодинамического баланса (3.4) приводит к заключению, что в данном процессе

$$T\dot{s} = q^* \quad (4.7)$$

На основании формул (4.3) и задания f^0 в виде, следующем из (3.12) в одномерном случае

$$f^0 = \frac{E}{2\rho} \varepsilon_1^2 - \frac{1}{\rho} E\alpha (T - T_0) \varepsilon_1 - \frac{C_\varepsilon}{2T_0} (T - T_0)^2 - s_0^0 (T - T_0) + \text{const} \quad (4.8)$$

где E — модуль Юнга, уравнение (4.7) приводится к виду

$$E\alpha T_0 \ddot{\varepsilon}_1 + \mu_1 \dot{\varepsilon}_1^2 - \mu_3 \ddot{\varepsilon}_1^2 + C_\varepsilon \rho T = 0 \quad (4.9)$$

В линейном приближении вторым и третьим членом в этом уравнении можно пренебречь и таким образом получить

$$T - T_0 = -E\alpha T_0 / (\rho C_\varepsilon) \quad (4.10)$$

где использовано условие, что в начальный момент при $\varepsilon = 0$ температура $T = T_0$.

Вспомним теперь, что $\sigma_1^0 = \rho \partial f^0 / \partial \varepsilon_1$, и пользуясь выражением (4.2) и формулой (4.10) на основании (4.1) получим

$$\sigma_1 = E_* \varepsilon_1 + \mu_1 \dot{\varepsilon}_1 + \mu_2 \ddot{\varepsilon}_1 + \mu_3 \ddot{\varepsilon}_1^2, \quad (4.11)$$

$$E_* = E (1 + E\alpha^2 T_0 / (\rho C_\varepsilon)) \quad (4.12)$$

носит название адиабатического модуля Юнга, в то время как E является модулем изотермическим.

Внося (4.11) в уравнение движения для описанной выше конструкции,

$$Mu + F\sigma_1 = 0 \quad (4.13)$$

где u — перемещение конца стержня, F — площадь его поперечного сечения, полагая $\varepsilon_1 = u/l$ получим

$$\mu_3 u + (\mu_2 + m) \ddot{u} + \mu_1 u + E_* u = 0 \quad (4.14)$$

$$m = Ml/F \quad (4.15)$$

Очевидно, что $E_* > 0$; для μ_1, μ_3 выполняются условия (4.4), и выбором параметров l, F, M всегда можно добиться, что бы $\mu_2 + m \geq 0$. А тогда характеристическое уравнение для (4.14) обязательно имеет один действительный и положительный корень, и, следовательно, решение (4.14) содержит экспоненциально убывающий от положения равновесия член⁴, что может быть использовано как даровой источник энергии без нарушения первого и второго законов в виде (3.2) и (3.3). Дополнительное требование (3.5) снимает этот парадокс, ибо из него на основании (4.6) следует, что введение в соотношение дифференциального типа (4.1) более высоких производных от деформаций по времени, чем первая, недопустимо⁵.

5. Рассмотренные выше примеры материалов не обладали памятью о том, что с ними произошло в конечно отдаленном прошлом. Вязкий и, вообще, материалы дифференциального типа обладают лишь памятью о бесконечно близ-

⁴ Подобная особенность для модели типа (4.1) была отмечена в [4].

⁵ Это, кстати, перекликается с принятым в теоретической механике положением о зависимости сил только от перемещения и его скорости.

ком прошлом (инфинитезимальная память), а упругие не обладают даже такой памятью.

Перейдем теперь к рассмотрению материалов с конечным запоминанием предыстории. Возвращаясь к операторной форме записи термодинамических параметров, представим

$$\sigma = \sigma [\varepsilon, T], \quad f = f [\varepsilon, T]; \quad s = s [\varepsilon, T], \quad q^* = q^* [\varepsilon, T] \quad (5.1)$$

где квадратные скобки, как это было принято ранее, означают операторную зависимость.

Будем полагать, что все рассматриваемые в дальнейшем функционалы, включая и (5.1) обладают свойством непрерывности справа (см. п. 1), а для свободной энергии выполняется цепное правило (1.12):

$$f(t) = f_\varepsilon [\varepsilon, T] \dot{\varepsilon}(t) + f_T [\varepsilon, T] \dot{T}(t) + f_i [\varepsilon, T] \quad (5.2)$$

Напомним, что поскольку непрерывность справа функционала означает его слабую зависимость от изменения в текущий момент ε и T , т. е. от $\dot{\varepsilon}$ и \dot{T} , то материалы, описываемые такими функционалами естественно назвать материалами с упругой мгновенной реакцией.

Как убедимся в дальнейшем класс таких материалов достаточно широк и его простейшим представителем являются термоупругие материалы. Однако все материалы того дифференциального типа, которые были рассмотрены выше в этот класс не попадают. Можно предвидеть, что к классу материалов с упругой мгновенной реакцией попадут все материалы, для определяющего соотношения которых выполняется условие

$$\dot{\sigma}(t) = a \dot{\varepsilon}(t) + b \dot{T}(t) \quad (5.3)$$

где $a [\varepsilon, T]$, $b [\varepsilon, T]$ не зависящие от $\dot{\varepsilon}$, \dot{T} коэффициенты (тензоры, или скаляры).

Безотносительно к конкретной структуре определяющего соотношения на основании (5.2) для таких материалов неравенство диссипации (3.4) приводится к виду

$$(\sigma/\rho - f_\varepsilon [\varepsilon, T]) \dot{\varepsilon}(t) - (s + f_T [\varepsilon, T]) \dot{T}(t) - f_i [\varepsilon, T] = q^* \geq 0 \quad (5.4)$$

Откуда в силу независимости коэффициентов при $\dot{\varepsilon}$ и \dot{T} , а также последнего члена левой части от самих $\dot{\varepsilon}$ и \dot{T} вытекает, что выражения в круглых скобках должны быть равны нулю, а последний член в силу этого должен быть с обратным знаком равен скорости некомпенсированного тепла. В результате условие термодинамического согласования приводит к соотношениям

$$\sigma = \rho f_\varepsilon [\varepsilon, T], \quad s = -f_T [\varepsilon, T], \quad q^* = -f_i [\varepsilon, T] \quad (5.5)$$

Таким образом для материалов с упругой мгновенной реакцией, текущие значения напряжений и энтропии полностью определяются заданием свободной энергии соотношениями потенциального типа. Кроме того легко заметить, что полная производная по времени от свободной энергии представляется в виде

$$\dot{f} = f_\varepsilon \dot{\varepsilon} + f_T \dot{T} - q^* \quad (5.6)$$

так что, если $\dot{\varepsilon} = \dot{T} = 0$ на каком-либо отрезке процесса, то

$$\dot{f} \leq 0 \quad (5.7)$$

т. е. в процессе-константа, в котором текущие значения ε и T не изменяются, свободная энергия не возрастает. Отметим, что условие (5.7), как и понятие о процессе-константе содержательно только для материалов, свойства которых зависят от масштаба времени. Для упругих и пластических тел при фиксированных ε и T никакого процесса нет, а условие (5.7) вырождается в очевидное $\dot{f} = 0$.

Если весь процесс, происходящий с материалом, был процессом-константой

(вечный процесс-константа), то во всей предыстории выполнялось условие (5.7) и предельное, при $t \rightarrow \infty$, значение f :

$$f_0 = f(t) \Big|_{t \rightarrow \infty} = \min f(t) \quad (5.8)$$

Ограничиваясь рассмотрением материалов, для которых выполнено условие (5.7), вдобавок к этому наложим еще и дополнительное условие на свойства материала — затухающую память, состоящее в требовании, чтобы значение f_0 достигалось не только вечным процессом-константой, но и в продолжении произвольного процесса процессом-константой, начиная с $t = t_0$.

Отсюда немедленно следует [5] (теорема Колемана), что в текущий момент произвольного процесса значения свободной энергии не может быть меньше предельного f_0 . Действительно, если бы в момент t произвольного процесса это было не так, то в продолжении процессом-константой, где выполняется условие (5.7), достигнуть значения f_0 было бы невозможно.

Таким образом для материала с упругой мгновенной реакцией, удовлетворяющему указанному выше условию затухающей памяти из множества процессов, оканчивающихся в состоянии ϵ , T вечному процессу-константе отвечает минимальное значение f .

Следовательно, если теперь продолжить вечный процесс-константу каким-либо замкнутым циклом по ϵ и T , то прирост свободной энергии в нем будет неотрицательным

$$\Delta f \geq 0 \quad (5.9)$$

ибо указанный составной процесс — один из возможных произвольных процессов, кончающихся в той же точке, что и вечный процесс-константа.

Очевидно, что приведенная аргументация действует и при любом количестве повторов указанных циклов, так что для материалов с затухающей памятью выполняется как классическое требование для КПД ($\eta < 1$), так и требование (2.14) $\eta < 1$.

Из условия (5.9) для изотермического цикла, когда $T = 0$ и неравенства диссипации (3.4) следует что

$$\int_{t_1}^{t_2} \sigma \dot{\epsilon} dt \geq 0 \quad (5.10)$$

где t_1, t_2 — время начала и конца замкнутого по ϵ цикла. Это означает, что в изотермическом цикле, продолжающем вечный процесс-константу работа внутренних сил неотрицательна.

Характерным примером сред, удовлетворяющим всем высказанным выше требованиям, в том числе и нетривиальным процессом-константой, является так называемая наследственная упругость с определяющим соотношением типа Больцмана

$$S = \int_0^t R(t - \tau) d\mathcal{E}(\tau) \quad (5.11)$$

где в предположении об изотропии среды ядро R -скалярная монотонно убывающая функция, удовлетворяющая условиям

$$R'(\theta) < 0, \quad R(0) = 2G, \quad \int_0^{\infty} R^2(\theta) \cdot d\theta \leq M < \infty \quad (5.12)$$

где S и \mathcal{E} — девиаторы напряжений и деформаций, G — модуль упругого сдвига. Функция R полагается зависящей от температуры.

Поскольку в данном случае выполняются условия (5.3) и, следовательно, (5.2) с заменой $\sigma \rightarrow S$, $\epsilon \rightarrow \mathcal{E}$, то имеют место соотношения потенциального типа (5.5). Поэтому термодинамическое оснащение наследственной упругости дости-

гается заданием одного термодинамического объекта — свободной энергии. Так, полагая [6]:

$$f = \frac{1}{4\rho G} \left(\int_0^t R(t-\tau) d\mathcal{E}(\tau) \right)^2 \quad (5.13)$$

на основе (5.5) кроме соотношения (5.11) получим

$$\begin{aligned} q^* &= -\frac{1}{4\rho G} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^t R(t-\tau) d\mathcal{E}(\tau) \right)^2 = \\ &= -\frac{1}{2\rho G} \int_0^t R(t-\tau) d\mathcal{E}(\tau) \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} R(t-\tau) d\mathcal{E}(\tau). \end{aligned} \quad (5.14)$$

так что требование $q^* \geq 0$ в силу первого из условий (5.12) выполняется.

Отметим, наконец, среди обширных исследований по материалам с затухающей памятью один результат [7], касающийся аппроксимации функционала типа (5.11) для замедленных движений, что в математическом плане отвечает замене $t \rightarrow \lambda t$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Этот результат состоит в том, что при таких движениях функционал можно аппроксимировать определяющим соотношением дифференциального типа порядка n с ошибкой $o(\lambda^n)$ (теорема Келемана — Нолла). В математическом плане это не вызывает опасений. Но в плане физическом — это перевод соотношений из класса со слабой мгновенной реакцией в класс этим свойством не обладающий, и для которого, как это было показано в п. 4, уже повышение порядка за $n=1$ представляется недопустимым.

6. Уругопластическая среда по ряду качеств отличается от рассмотренных выше. Во-первых, поведение такой среды инвариантно по отношению к масштабу времени: результат процесса деформирования, геометрия которого фиксирована в пространстве деформаций, не зависит от скорости проведения процесса. Следовательно для таких тел, как уже отмечалось, содержательность понятия процесса-константы теряется. Во-вторых, в связи с концепцией предельных поверхностей реакция на изменение направления процесса является специфической, а именно: коэффициенты a и b в соотношении типа (5.3) уже нельзя считать независимыми от ϵ ($\delta\epsilon$), T (δT).

Однако несомненно, что пластичность — это идеализация свойств тел, обладающих свойством слабой мгновенной реакции. Малым изменением деформации нельзя вызывать большое изменение напряжений и поэтому возможна разработка, обобщающая для пластичности результаты полученные выше при постоянстве коэффициентов a и b . Так например, для изотермических процессов и сценарий, и роли, и результат представляются довольно очевидными. В основу действия надо положить сравнение, например, свободной энергии для пары процессов, один из которых максимально прост. А это (вместо процесса-константы) — лучевой процесс из первоначально изотропного недеформированного состояния. По сравнению с другими процессами из этого же состояния он должен обладать экстремальными свойствами, и довольно трудно себе представить, что на нем свободная энергия не будет минимальной. А тогда для любого замкнутого по ϵ цикла, приведенного из конца указанного лучевого процесса будет выполнено условие

$$\Delta f \geq 0 \quad (6.1)$$

Сложнее обстоит дело с выводом формул типа (5.5). Но мы не станем останавливаться на этом вопросе поскольку и то, что можно здесь получить для «вязких» сред, в отношении целей конкретизации формы определяющих соотношений, недостаточно и требует введения частных и разноплановых предположений. На успех в этой проблеме, скорее, надо рассчитывать ориентируясь на следствия, вытекающие именно из поведения материала в циклах. Идея эта появилась давно и первое ее математическое оформление

Друккером [8] ранее преподносилось как гипотеза термодинамического толка, хотя затем и сам Друккер и его последователи от такой трактовки отказались, по-видимому, из-за того, что работа по Друккеру не находила себе места среди обычных термодинамических объектов.

Но как бы там не было, сейчас главным для нас будет то, что все рассмотренные до сих пор примеры среды, либо удовлетворяют условию (6.1), либо благодаря ему становятся термодинамически допустимыми, как в примере п. 4. Правда там, где удастся доказать выполнимость (6.1), накладываются требования на вид процесса, предшествовавшего циклированию, и от этого ограничения хотелось бы избавиться. Конечно, как это уже отмечалось в п. 2, нельзя ожидать, что при циклировании из конца произвольного процесса в первом же цикле условие (6.1) будет обязательно выполняться. Но начиная с какого-то номера цикла это условие обязано выполняться, ибо в противном случае может быть нарушено условие (2.14), гарантирующее невозможность создания вечного двигателя второго рода с рабочим телом, свойства которого определяются лишь ϵ и T .

Теперь становится ясно, что для снятия ограничений на вид процесса, предшествовавшего циклированию, надо заменить условие (6.1) на условие (3.5). И хотя это последнее, а именно:

$$\sum_{n=1}^N \Delta f_n \geq 0 \quad (6.2)$$

и является прямым следствием требования (2.14) и, надеемся, надежно подготовлено проведенным выше анализом свойств тел с упругой мгновенной реакцией, его, строго говоря, надо признать независимым постулатом термодинамики. Принятие в качестве такового (6.2) и есть та расплата за простоту устройства цикла тепловой машины, о которой предупреждалось в п. 2.

Эффективность использования условия (6.2) для упрочняющейся упругопластической среды сейчас будет продемонстрирована в предположении изотермичности процессов. Концепции предельных поверхностей (см., например, [9]) применительно к пространству деформаций означает существование в любой момент деформирования поверхности

$$\psi(\epsilon, N^p) = 0 \quad (6.3)$$

ограничивающей все состояния, которые могут быть достигнуты из данного чисто упругим деформированием — пассивным процессом. В таком процессе операторы N^p , отражающие память о предыстории деформирования, остаются неизменными, а вместе с ними неизменна и форма поверхности (6.3). Выход состояния вне этой поверхности может быть совершен лишь активным процессом, сопровождающимся необратимой деформацией, изменением операторов N^p и самой предельной поверхности. Очевидно, что на любом отрезке активного процесса мгновенное состояние ϵ принадлежит изменяющейся (текущей) предельной поверхности, и из любого такого состояния по целому пучку направлений можно произвести пассивный процесс — упругую разгрузку.

Рассмотрим в пространстве деформаций процесс деформирования из произвольного состояния, лежащего внутри предельной поверхности, с малым выходом за эту поверхность и с последующим возвращением в исходное состояние. Указанный малый выход изменит саму предельную поверхность, отодвинув ее в новое положение, так что последующее повторение цикла будет проходить уже по чисто упругому закону. Таким образом для принятой формы цикла условие (6.2) сводится к условию (6.1) для первого цикла, а это, с учетом изотермичности, на основании неравенства диссипации (3.4) сводится к условию (5.10), которое для упругопластической среды, ввиду инвариантности по отношению к масштабу времени, удобней записать в виде

$$\oint \sigma d\epsilon \geq 0 \quad (6.4)$$

Это условие совпадает с тем, что под наименованием постулата пластичности было предложено Ильюшиным [10], и как теперь ясно, является прямым следствием условия (6.2) и, следовательно, термодинамики.

Известно [8], что из условия (6.4) следует невознугность предельной поверхности, а в точке ее гладкости (в естественном предположении о независимости свойств упругости от пластических деформаций) — ортогональность вектора прироста пластических деформаций к этой поверхности (известный принцип градиентальности). С деталями конкретизации соотношений пластичности; основанных на следствиях из условия (6.4) можно познакомиться, например, в [9], а здесь мы остановимся на одной из простейших моделей пластичности.

Пусть уравнение предельной поверхности в пространстве девиатора напряжений, или, как принято говорить, поверхности нагружения, имеет вид расширяющейся сферы

$$\varphi = p(r) - \kappa^p, \quad r^2 = S_{ij}S_{ij}, \quad \kappa^p = \int \sqrt{d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p} \quad (6.5)$$

где S_{ij} — девиатор напряжений, κ^p — длина дуги пластического деформирования (параметр Одквиста). Для градиента φ в данном случае имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} &= \frac{\partial \varphi}{\partial S_{mn}} \frac{\partial S_{mn}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \varphi}{\partial S_{mn}} \left(\frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{1}{3} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_{mn}} \delta_{ij} \right) = \\ &= p'(r) \frac{\partial r}{\partial S_{mn}} \left(\delta_{im} \delta_{jn} - \frac{1}{3} \delta_{mn} \delta_{ij} \right) = p'(r) \frac{S_{ij}}{r} \end{aligned}$$

и по принципу градиентальности

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} \quad (6.6)$$

Далее условие непрерывности изменения поверхности нагружения дает

$$p'(r) dr = d\alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} \right)^{1/2} = p'(r) d\alpha$$

так что в результате имеем

$$d\varepsilon^p = p'(r) (S/r) dr \quad (6.7)$$

Это соотношение широко известной теории изотропного упрочнения обладает редким среди соотношений регулярной пластичности (ассоциированных законов) свойством, когда один вид механических параметров — в данном случае деформаций, выражается полностью через другой — напряжения. Вследствие этого соотношения (6.7), с учетом $\varepsilon^p = \varepsilon^0$, можно представить в той же векторно-функциональной форме, что и в предыдущем параграфе

$$\varepsilon = \varepsilon^0 + \varepsilon^p, \quad \varepsilon^p = \varepsilon^p[\sigma, T] = \int p'(\lambda) \frac{S(\lambda)}{\lambda} d\lambda \quad (6.8)$$

с той разницей, что деформации и напряжения поменялись местами и, естественно, возникла другая форма конструкции функционала. А это дает возможность дополнить (6.8) атрибутами термодинамики (диссипация, энтропия и др.) тем же путем, как это проделано для соотношения типа Больцмана в предыдущем параграфе. Для этого нужно изменить принятую до сих пор систему постулатов термодинамики, переориентируя их на задание в качестве независимых аргументов не набора ε, T , а набора σ, T . Никаких особых усилий для этого не потребуется; надо лишь вместо свободной энергии f ввести так называемый потенциал Гиббса

$$\chi = f - \sigma \varepsilon / \rho \quad (6.9)$$

так что уравнения термодинамического баланса и неравенство диссипации будут теперь представляться соотношением

$$q^* = -\dot{\chi} - \varepsilon \dot{\sigma} / \rho - sT \geq 0 \quad (6.10)$$

где все входящие члены в качестве независимых аргументов имеют σ , T . Для упругого тела соответствующий потенциал $\chi^0 = f^0 - \sigma \varepsilon^0 / \rho$; деформация ε^0 и энтропия могут быть вычислены как функции σ и T на основании формул (3.12), (3.13):

$$\begin{aligned} \chi^0 &= \frac{1}{2\rho E} [\nu \sigma_{(1)}^2 - (1 + \nu) \sigma_{(2)}] - \frac{\alpha}{\rho} (T - T_0) \sigma_{(1)} - \\ &- \frac{C_\sigma}{2T_0} (T - T_0)^2 - s_0^0 (T - T_0) + \text{const} \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\varepsilon_{ij}^0 = -\rho \frac{\partial \chi^0}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \sigma_{(i)} \delta_{ij}] + \frac{\alpha}{\rho} (T - T_0) \delta_{ij}$$

$$s^0 = -\frac{\partial \chi^0}{\partial T} = \frac{\alpha}{\rho} \sigma_{(1)} + \frac{C_\sigma}{T_0} (T - T_0) + s_0^0$$

где $\sigma_{(1)}$ и $\sigma_{(2)}$ — первый и второй инварианты тензора напряжений, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, C_σ — материальная константа (теплоемкость при постоянном давлении)

$$E = \frac{\mu (3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad C_\sigma = C_\varepsilon - \frac{3}{2} \frac{\alpha^2}{\rho} (3\lambda + 2\mu) T_0 \quad (6.12)$$

Преобразуем (6.8) к форме максимально близкой к (5.11) введением функций

$$m'(r) = p'(r)/r \quad (6.13)$$

$$\varepsilon^0 = \varepsilon^\varepsilon, \quad \varepsilon^{0*} = m(r) S(r), \quad \varepsilon^* = -\int m(\lambda) dS(\lambda)$$

так что

$$\varepsilon = \varepsilon^0 + \varepsilon^p = \varepsilon^0 + \varepsilon^{0*} + \varepsilon^* \quad (6.14)$$

Представляя теперь потенциал Гиббса в виде такой же суммы

$$\chi = \chi^0 + \chi^{0*} + \chi^* \quad (6.15)$$

заданием

$$\rho \chi^{0*} = -\int m(\lambda) S(\lambda) dS(\lambda), \quad \rho \chi^* = \frac{\varepsilon^* \varepsilon^*}{2m(r)} \quad (6.16)$$

попытаемся удовлетворить неравенство диссипации (6.10), которое при $T = 0$ для такого задания имеет вид

$$\rho q^* = -(\rho \dot{\chi}^0 + \varepsilon^0 \dot{\sigma}) - (\rho \dot{\chi}^{0*} + \varepsilon^{0*} \dot{\sigma}) - (\rho \dot{\chi}^* + \varepsilon^* \dot{\sigma}) \geq 0 \quad (6.17)$$

Заметим, что в приведенных формулах масштаб времени, как и вообще в пластичности, несущественен. В данном случае его роль, может быть возложена на параметр r . Но он, в противоположность естественному времени, не является независимым. Хотя в предыдущем и используется запись типа $S(r)$, но для произвольного процесса аргумент r указывает только текущую длину вектора S на пути нагружения в девiatorном пространстве. Наоборот, на основании (6.5) $r = |S|$, так что, например, возникают сомнения в возможности представления типа (5.2), ибо там все аргументы (ε , T , t) были независимы. Тем не менее в данном случае представление такого типа остается справедливым, что показывают следующие выкладки.

Считая, что независимыми аргументами являются компоненты вектора S

(или, более обще — напряжения σ), с учетом (6.11) и того, что $\partial r / \partial S = S/r$, на основе (6.13) и (6.16) найдем

$$\begin{aligned} \rho \dot{\chi}^0 &= -\varepsilon^0 \dot{\sigma}, & \rho \dot{\chi}^{0*} &= \rho \frac{d\chi^{0*}}{dt} = -m \dot{S} S = -\varepsilon^{0*} \dot{S} \\ \rho \dot{\chi}^* &= \rho \frac{d\chi^*}{dt} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{2m(r)} \right) \dot{r} \varepsilon^* \varepsilon^* + \frac{1}{m} \varepsilon^* \dot{\varepsilon}^* = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m(r)} \right)' \frac{\partial r}{\partial S_{ij}} \dot{S}_{ij} \varepsilon_{mn}^* \varepsilon_{mn}^* + \frac{1}{m} \varepsilon_{mn}^* \dot{\varepsilon}_{mn}^* = -\frac{m'(r)}{2m^2(r)} \varepsilon^* \varepsilon^* \dot{r} - \varepsilon^* \dot{S} \end{aligned} \quad (6.18)$$

Подстановка этих выражений в (6.17) при учете того, что

$$\varepsilon^{0*} \dot{S} = \varepsilon_{ij}^{0*} \dot{S}_{ij} = \varepsilon_{ij}^{0*} \dot{\sigma}_{ij} = \varepsilon^{0*} \dot{\sigma}, \quad \varepsilon \dot{S} = \varepsilon^* \dot{\sigma} \quad (6.19)$$

приводит к тому, что первые две скобки обращаются в нуль, а остаток третьей скобки представляет скорость некомпенсированного тепла

$$q^* = \frac{m'(r)}{2\rho m^2(r)} \varepsilon^* \varepsilon^* \dot{r} \quad (6.20)$$

Одновременно с этим подтверждается справедливость представления типа (5.2), т. е. цепного правила (1.12):

$$\dot{\chi} = \frac{\partial \chi}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial \chi}{\partial r} = \chi_\sigma \dot{\sigma} + \chi_r \quad (6.21)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial \sigma} = -\frac{1}{\rho} \varepsilon, \quad \frac{\partial \chi}{\partial r} = -q^*, \quad (\dots) = \frac{d(\dots)}{dr}$$

где заменен смысл полной производной и в соответствии с этим $\dot{r} = 1$, а q^* — измерение некомпенсированного тепла с ростом r , и вычисления χ_σ и χ_r производятся при формальной независимости σ (а точнее S) и r . Отметим так же, что все выписанные выше соотношения относятся к активному процессу $\dot{r} \geq 0$.

Как видно, для теории изотропного упрочнения возможно термодинамическое оснащение, подобно наследственной упругости, заданием одного термодинамического объекта. По-видимому это возможно и для более сложных моделей пластичности, хотя до сих пор [11—13] оно достигается независимым заданием нужных объектов при условии удовлетворения неравенства диссипации.

7. Для того чтобы в какой-то мере завершить проблему о термодинамической согласованности определяющих соотношений, надо решить вопрос об условиях реального осуществления однородных процессов, рассмотренных выше. А этот вопрос можно решить только на основании более общего термодинамического подхода — теории неоднородных процессов, без которой, кроме того, не обойтись и при замыкании разрешающих уравнений краевых и начальных задач о деформации тел и конструкций.

Первое, что отличает неоднородный процесс от рассмотренных выше — это явление перетока тепла от частицы к частице, вызванного неравным нулю градиентом температуры, т. е. возникновения нового термодинамического объекта — вектора потока тепла q . Если выделить в теле некоторый произвольный объем V , то при неоднородном температурном поле общая скорость подвода тепла будет осуществляться помимо действия массовых источников тепла с производительностью q еще потоком тепла q через поверхность Σ замыкающую выделенный объем. Следовательно общая скорость внешнего притока тепла Q^e теперь будет

$$Q^e = - \int_{\Sigma} q_{iV} d\Sigma + \int_V \rho q dV \quad (7.1)$$

где q_i — компоненты вектора \mathbf{q} , v_i — как и прежде, компоненты внешней нормали к Σ . Знак минус перед первым членом в (7.1) отражает то, что \mathbf{q} направлен в объем V извне. Преобразуя поверхностный интеграл в объемный, используя принятое выше условие аддитивности термодинамических объектов в виде (3.1) и произвольность объема V , в качестве первого закона термодинамики вместо (3.2) будем иметь

$$\dot{u} = w - q_{i,i}/\rho + q \quad (7.2)$$

Модернизируя второй закон (3.3) на случай неоднородных процессов мы должны заметить, что в нем фигурируют не сами скорости притока тепла, а их отношение к абсолютной температуре, так сказать, нормированные потоки. Поэтому применительно к объему V второй закон термодинамики должен выглядеть как

$$S = \int_V \rho s dV = - \int_{\Sigma} \frac{q_i v_i}{T} d\Sigma + \int_V \rho \frac{q + q^*}{T} dV \quad (7.3)$$

что для частицы среды означает

$$\dot{s} = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{q_i}{T} \right)_{,i} + \frac{q + q^*}{T}, \quad q^* \geq 0 \quad (7.4)$$

где, как и прежде, q^* скорость некомпенсированного тепла⁶, однако с другим, чем в однородных процессах математическим представлением. Действительно, исключая из (7.4) массовые притоки тепла q с помощью (7.2) и вводя свободную энергию, обобщенное условие термодинамического баланса и неравенство диссипации получим в виде

$$q^* = w - f - sT - q_i T_{,i} / \rho T \geq 0 \quad (7.5)$$

Но для тех материалов, которые рассматривались в предыдущих параграфах и для которых выполняется принцип локального действия так же, имеет место неравенство (3.4), которое теперь можно переписать в виде

$$\delta = w - f - sT \geq 0 \quad (7.6)$$

где δ — так называемая внутренняя диссипация, а само условие (7.6) применительно к неоднородным процессам носит название неравенства Планка.

Таким образом для неоднородных процессов обобщенное неравенство диссипации (7.5) для рассматриваемого класса тел распадается на два отдельных; на неравенство внутренней диссипации (7.6) и неравенство

$$q_i T_{,i} \leq \rho T \delta \quad (7.8)$$

которое для совершенных тел ($\delta = 0$) совпадает с известным неравенством Фурье

$$q_i T_{,i} = \mathbf{q} \text{ grad } T \leq 0 \quad (7.9)$$

Последнее означает, что для совершенных сред, к которым относится, например, термоупругий материал, переток тепла от менее нагретой частицы к соседней более нагретой невозможен. В то же время для несовершенных сред такой переток, в принципе, возможен без нарушений требования термодинамики, и его интенсивность может быть тем выше, чем больше значение внутренней диссипации. Например, для вязкоупругих тел

$$\mathbf{q} \text{ grad } T \leq \rho T \mu_1 \epsilon^2 \quad (7.10)$$

Необычность такого результата рождает подозрение в справедливости принятого предположения о локальности действия, и прежде всего в той части, которая

⁶ Этим отличается представление (7.3) для S от такового в [1]. Условие $q^* \geq 0$ персводит (7.3) в известное [2] неравенство Клаузиуса — Дюгема.

относится к термическим эффектам. Поэтому допустим, что среди независимых параметров присутствует и параметр $\text{grad } T$, хотя очевидно, что включение такого нелогичного параметра сильно осложнило бы проблему экспериментального определения термомеханических характеристик материала, т. е. проблему установочного эксперимента. Применительно к линейной вязкоупругости таким обобщением (3.16) служит задание

$$\sigma = \sigma^0(\epsilon, T, g) + \mu_1 \dot{\epsilon}, \quad f = f^0(\epsilon, \dot{\epsilon}, T, g), \quad s = s^0(\epsilon, \dot{\epsilon}, g, T) \quad (7.11)$$

$$g = \text{grad } T \quad (7.12)$$

Внося это в обобщенное неравенство диссипации (7.5) получим

$$\left(\frac{\sigma^0}{\rho} - f_g^0 \right) \dot{\epsilon} - (s + f_T^0) \dot{T} - f_{\dot{\epsilon}}^0 \dot{\epsilon} - f_g^0 \dot{g} - \frac{1}{\rho} qg + \frac{\mu_1}{\rho} \dot{\epsilon}^2 \geq 0 \quad (7.13)$$

При произвольных $\dot{\epsilon}$, \dot{T} , $\dot{\epsilon}$ и \dot{g} выполнение неравенства возможно только при обращении в нули первых двух скобок и двух последующих членов, так что остаточное неравенство совпадает с (7.10), а σ^0 и s^0 выражаются через свободную энергию так же, как и в однородных процессах, т. е. по (3.16). Аналогичным качеством обладают и другие среды и, в частности материалы со слабой мгновенной реакцией.

Удостоверившись таким образом, что природа неравенства (7.8) не связана с предложением о локальном термодинамическом действии, отметим, что введенный выше поток q является новым объектом, в математическом плане подобным напряжению, и требует своего задания через систему независимых термодинамических параметров, которыми при неоднородных процессах являются ϵ , T и g . Таким образом расширяя рамки механики до термомеханики, надо определять среду надлежащим заданием не только $\sigma = \sigma[\epsilon, T]$, но и заданием $q = q[\epsilon, T, g]$. Неодинаковость аргументов этих представлений отражают их разное отношение к однородности и неоднородности происходящих процессов. Если для σ , в силу сказанного выше, вид процесса не существенен, то q только и возникает при неоднородности. Здесь же отметим и неравноправие по отношению к этим объектам требований термодинамики, которая как это было видно из предыдущего, довольно сильно конкретизировала вид зависимости для σ и почти ничего, кроме условия (7.8), не накладывает на q .

Обычно в предположении термической изотропии используется закон Фурье

$$q_i = -\kappa g_i \quad (7.14)$$

где κ — коэффициент теплопроводности, вообще, может зависеть от температуры. Этот закон хорошо описывает, по крайней мере, класс совершенных тел, для которых, как это следует из (7.9):

$$\kappa \geq 0 \quad (7.15)$$

Наконец, вопрос о реализации однородного процесса. В принципе он решается просто. Применительно к установочному эксперименту, дополнительно к хорошо отработанной методике создания однородного деформированного состояния, нужно предусмотреть надежную теплоизоляцию эталонного образца. При такой изоляции образец в тепловом отношении будет представлен самому себе и единственное, что регулируется извне — изменение во времени деформированного состояния, в силу его однородности, не может нарушить теплового равновесия его частицы, и, следовательно, тепловых потоков. Можно сказать, что при однородном деформировании теплоизолированного тела процесс является адиабатическим в каждой частице.

В действительности надежную теплоизоляцию образца осуществить не просто и обычно установочный эксперимент, производимый для определения деформативных свойств и прочности твердых тел производят без специальных мер по теплоизоляции. Для быстрых процессов такая беззаботность оправдана, ибо в них отток тепла с

поверхности образца происходит не успеваает. Однако в таких процессах, не говоря уже о технических трудностях с измерениями, выявить свойства памяти весьма затруднительно, если, вообще, возможно. Для этого нужен набор процессов с широким диапазоном изменения скоростей деформаций, а в них без теплоизоляции обязательно должны возникать тепловые потоки и только в очень медленном процессе можно рассчитывать на сохранение термической однородности в образце. Что же касается промежуточных между очень быстрым и очень медленным процессами, то строго говоря, однородное деформирование образца будет сопровождаться неоднородностью напряжений, и для расшифровки результатов установочного эксперимента, представляемым усредненными характеристиками напряжений нужно, как минимум, иметь решение уравнения теплопроводности, которое при условии выполнимости (7.14) получается исключением из (7.6) с помощью (7.2) мощности работы и представляется в виде

$$\kappa T_{,ii} = \rho (T_s - \delta - q) \quad (7.16)$$

Для обычных эталонных образцов, когда задача является одномерной, решение (7.16) не составляет особого труда, если для данной среды известны энтропия и внутренняя диссипация. Имеющиеся к настоящему времени результаты по таким моделям тел как упругость, линейная вязкость, наследственность можно в качественном смысле охарактеризовать следующим образом: учет в правой части уравнения теплопроводности членов, содержащих малую деформацию ϵ , дает относительно малый вклад в распределение температуры. А это, по крайней мере в первом приближении, позволяет говорить о несвязности термомеханической задачи: поле температур можно определять независимо от механических параметров, а применительно к эталонному образцу считать поле температуры однородным.

Это, конечно, не исключает существования условий деформирования, при которых влияние механических параметров в уравнении теплопроводности будет существенным. Так, например, будет при больших деформациях пластических тел (прокатка, прессование), возможно, при резком изменении направления процесса, при соударении твердых тел. Поэтому указанным выше упрощением можно пользоваться только тогда, когда отсутствует заметный интегральный разогрев образца, а само это упрощение конечно не значит, что в механическом поведении таких материалов можно исключить зависимость от температуры. Более того, именно такая зависимость позволила включить механику в термодинамику со всеми вытекающими отсюда последствиями.

Наконец, хотелось бы отметить, что автору не пришлось делать усилий, чтобы избежать использования таких терминов как обратимость и равновесность. И это может служить одним из аргументов того, что возникшие в последнее время споры физиков и механиков, связанные с этими понятиями, существа дела по крайней мере в термомеханике, не касаются.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-17658).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1973. Т. 1. 536 с.; Т. 2. 584 с.
2. Трудделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
3. Дэй У. А. Термодинамика простых сред с памятью. М.: Мир, 1974. 190 с.
4. Coleman B. D., Daffin R. J., Mizel V. J. Instability, uniqueness nonexistence theorems for the equation $u = u - u$ on a strip // Arch. Ration. Mech. Anal. 1965. V. 19. No. 2. P. 100—116.
5. Coleman B. D. Thermodynamics of materials with memory // Arch. Ration. Mech. Anal. 1964. V. 17. No. 1. P. 1—46.
6. Ильюшин А. А., Победра Б. Е. Основы математической теоретической вязкоупругости. М.: Наука, 1979. 280 с.

7. *Coleman B. D., Noll W.* An approximation theorem for functionals, with applications in continuum mechanics//Arch. Ration. Mech. Anal. 1960. V. 6. No. 5. P. 355—370.
8. *Drucker D. C.* A more fundamental approach to plastic stress — strain relations//Proc. I-st US Nat. Congr. Appl. Mech. 1951. Chicago: ASME, 1952. P. 487—491.
9. *Клюшников В. Д.* Математическая теория пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1979. 207 с.
10. *Ильюшин А. А.* О приращении пластической деформации и поверхности текучести//ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 4. С. 663—666.
11. *Григорян С. С.* О некоторых вопросах термодинамики сплошных сред//ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 4. С. 652—662.
12. *Naghdi P. M.* Stress—strain relations in plasticity and thermoplasticity//Plasticity. Proc. Second Sympos. Naval Structur. Mech. 1960. P. 121—167.
13. *Green A. E., Naghdi P. M.* A general theory of an elastic — plastic continuum//Arch. Ration. Mech. Anal. 1965. V. 18. No. 4. P. 251—281.

Москва

Поступила в редакцию
7.XII.1993