МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1995

УДК 531.8

© 1995 г. С. Н. БЫЧВАРОВ, С. Н. ПУЛЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЕРТИКАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ АВТОМОБИЛЯ, ВЫЗЫВАЕМЫХ РАБОТОЙ ДВИГАТЕЛЯ

Колебания транспортных систем рассматривались многими авторами [1—4] [1]. В настоящей работе определяется закон вертикальных колебаний рамы и кабины при учете движения конструктивных элементов двигателя. Неуравновешенные инерционные и двигательные силы и моменты вызывают ряд нелинейных эффектов, которые надо ограничить.

1. Постановка задачи. При исследовании вертикальных колебаний переднего моста автомобиля можно использовать физическую модель, представленную на фиг. 1. Она состоит из рамы (масса m_1), кабины (масса m_3) и одноцилиндрового двигателя внутреннего сгорания (ДВС). В точке O сосредоточена масса m_0 коленчатого вала и корпусных элементов двигателя. Масса коленчатого вала m_k, а J_k — его момент инерции относительно оси вращения. Масса шатуна m_s, а его момент инерции относительно оси, проходящей через центр инерции и перпендикулярной к плоскости чертежа J_s. Масса поршня m_0. Введены следующие обозначения: R — длина кривошипа; l — длина шатуна; $\lambda = R/l$; v — расстояние центра масс коленчатого вала от его оси ($v = OC_1$); ρ — коэффициент, определяющий местоположение центра тяжести шатуна ($AC_2 = \rho l$); c_1, b_1 — приведенные коэффициенты жесткости и демпфирования шин и рессор; c_2, b_2 — коэффициенты жесткости и демпфирования виброизоляторов двигателя; c_3, b_3 — коэффициенты жесткости и демпфирования виброизоляторов кабины.

Выбираем следующие обобщенные координаты: q_1, q_2, q_3 — вертикальные перемещения рамы, двигателя и кабины; q_4 — угловое перемещение коленчатого вала. В направлении первых трех координат совершаются малые колебания около равновесного состояния системы.

На коленчатый вал действует момент от двигателя, который является функцией q_4 и $\dot{q}_4$ [5]:

$$M_+ = H_1 - H_2\dot{q}_4 - H_3\dot{q}_4^2 + \sum_{i=1}^{n} (G_i \sin iq_4 + F_i \cos iq_4)$$

и момент сопротивления

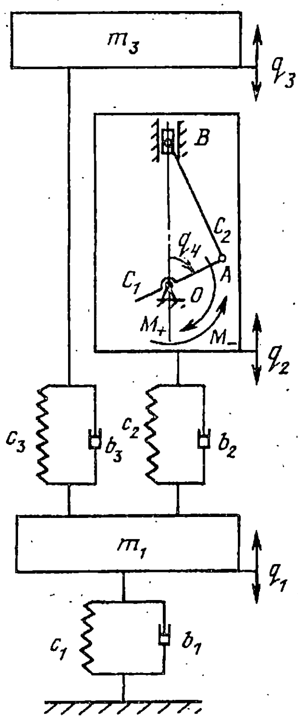
$$M_- = H_4 + H_5\dot{q}_4 + H_6\dot{q}_4^2$$

где H_1, H_2, H_3 — коэффициенты, входящие в аппроксимацию внешней характеристики двигателя; G_i и F_i получаются при гармоническом разложении момента от газовых сил; H_4, H_5, H_6 — заданные константы.

Если обозначить стационарную скорость коленчатого вала ω, то для стационарного момента будем иметь $M_* = H_1 - H_2\omega - H_3\omega^2 = H_4 + H_5\omega + H_6\omega^2$, откуда можно определить точное значение ω:

---

[1] См. также *Резвяков Е. М., Тольский В. Е.* Исследование вибраций кузова легкового автомобиля, вызываемых работой двигателя//Конструкция автомобилей. 1974. № 1.



Фиг. 1

$$\omega = \frac{-(H_2 + H_5) + [(H_2 + H_5)^2 + 4(H_1 - H_4)(H_3 + H_6)]^{1/2}}{2(H_3 + H_6)} \tag{1.1}$$

около которой колеблется текущая угловая скорость $\dot{q}_4$ в процессе движения. Значение ω для современных двигателей находится обычно в пределах 150 — 300 с.

Кинетическая, потенциальная энергия и диссипативная функция рассматриваемой механической системы представлены выражениями

$$T = \tfrac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 + \tfrac{1}{2}m_3\dot{q}_3^2 + \tfrac{1}{2}\{J_k + \tfrac{1}{2}(m_o + m_s)R^2 +$$
$$+ \tfrac{1}{2}(1-\rho)^2 m_s R^2 + \lambda\,[\tfrac{1}{2}(m_o + \rho m_s)R^2(\cos q_4 - \cos 3q_4) -$$
$$- \tfrac{1}{2}(m_o + m_s)Rl\cos 2q_4 - \tfrac{1}{2}m_s Rl(1-\rho)^2\cos 2q_4] +$$
$$+ \lambda^2\,[\tfrac{1}{8}\rho^2R^2(m_o + \rho^2 m_s)(1 - \cos 4q_4) + J_s\cos^2 q_4] +$$
$$+ \tfrac{1}{2}\lambda^4 J_s\cos^2 q_4(1 - \cos 2q_4)\}\,\dot{q}_4^2 + \lambda\,[l(m_o + m_s - m_k v/R)\sin q_4 +$$
$$+ \tfrac{1}{2}R(m_o + \rho m_s)\sin 2q_4]\,\dot{q}_2\dot{q}_4, \quad m_2 = m_0 + m_s + m_o$$

$$\Pi = \tfrac{1}{2}(c_1 + c_2 + c_3)q_1^2 + \tfrac{1}{2}c_2q_2^2 + \tfrac{1}{2}c_3q_3^2 - c_2q_1q_2 - c_3q_1q_3 -$$
$$-\lambda\,[lg(m_o + m_s - m_k v/R)(1 - \cos q_4) - \tfrac{1}{4}R(m_o + \rho m_s)(1 - \cos 2q_4)]$$

$$\Phi = \tfrac{1}{2}(b_1 + b_2 + b_3)\dot{q}_1^2 + \tfrac{1}{2}b_2\dot{q}_2^2 + \tfrac{1}{2}b_3\dot{q}_3^2 - b_2\dot{q}_1\dot{q}_2 - b_3\dot{q}_1\dot{q}_3$$

Движение рассматриваемой механической системы описывается системой дифференциальных уравнений

$$a_{11}\ddot{q}_1 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 + c_{13}q_3 = \lambda f_1(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) \tag{1.2}$$

$$a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 = \lambda f_2(q_4, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_4, \ddot{q}_4), \quad a_{33}\ddot{q}_3 + c_{31}q_1 + c_{33}q_3 = \lambda f_3(\dot{q}_1, \dot{q}_3)$$

$$\ddot{a_{44}q_4} = \sum_{i=1}^{n} (G_i \sin iq_4 + F_i \cos iq_4) + \lambda f_4 (q_4, \dot{q}_4, \ddot{q}_2, \ddot{q}_4) + \lambda^2 f_4'' + \ldots$$

$$a_{11} = m_1,\ a_{22} = m_2,\ a_{33} = m_3,\ a_{44} = J_k + R^2 [m_o + m_s (2 - \rho^2)]/2$$

$$c_{11} = c_1 + c_2 + c_3,\ c_{22} = -c_{12} = -c_{21} = c_2,\ c_{33} = -c_{13} = -c_{31} = c_3$$

В качестве малого параметра используем λ (отношение радиуса кривошипа к длине шатуна). Для разных двигателей величина λ находится в пределах 0,2—0,29.

Функции $f_1, f_2, f_3, f_4, f_4''$ имеют следующий вид:

$$f_1 = -(b_1' + b_2' + b_3')\, \dot{q}_1 + b_2'\dot{q}_2 + b_3'\dot{q}_3$$

$$f_2 = b_2' (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) - l (m_o + m_s - m_k v/R) (\dot{q}_4^2 \cos q_4 + \ddot{q}_4 \sin q_4) -$$
$$- R (m_o + \rho m_s) (\tfrac{1}{2}\ddot{q}_4 \sin 2q_4 + \dot{q}_4^2 \cos 2q_4)$$

$$f_3 = b_3' (\dot{q}_1 - \dot{q}_3),\ f_4 = H_1' - H_4' - (H_2' + H_5')\, \dot{q}_4 - (H_3' + H_6')\, \dot{q}_4^2 +$$
$$+ [\tfrac{1}{4}R^2 (m_o + \rho m_s)\, \dot{q}_4^2 - l (m_o + m_s - m_k v/R) (\ddot{q}_2 - g)] \sin q_4 -$$
$$- \tfrac{1}{4}R^2 (m_o + \rho m_s)\, \ddot{q}_4 \cos q_4 - \tfrac{1}{2}R \{ l [\rho (2 - \rho) m_s + m_o]\, \dot{q}_4^2 -$$
$$- (m_o + \rho m_s) (\ddot{q}_2 - g) \} \sin 2q_4 + \tfrac{1}{2}Rl [\rho (2 - \rho) m_s + m_o]\, \ddot{q}_4 \cos 2q_4 -$$
$$- \tfrac{3}{4}R^2 (m_o + \rho m_s) (\dot{q}_4^2 \sin 3q_4 + \tfrac{2}{3}\ddot{q}_4 \cos 3q_4)$$

$$f_4'' = -32J_s\dot{q}_4^2 \sin 2q_4 - 8J_s\ddot{q}_4 \cos 2q_4 - \tfrac{1}{4}R^2 (m_o + \rho m_s)\, \dot{q}_4^2 \sin 3q_4 +$$
$$+ \tfrac{1}{8}R^2 (m_o + \rho^2 m_s)\, \ddot{q}_4 \cos 4q_4$$

$$b_i' = b_i l/R, \quad H_i' = H_i l/R$$

Функции f_i объединяют все члены, характеризующие демпфирование и нелинейность.

Представим q_4 как сумму двух слагаемых

$$q_4 = \omega t + q_4^* (t) \tag{1.3}$$

Первое описывает равномерное вращение с постоянной стационарной скоростью (1.1), а второе — вибрационное слагаемое, примерно в десять раз меньшее λ.

2. Нулевое приближение. При $\lambda = 0$ получаем систему дифференциальных уравнений нулевого приближения

$$a_{11}\ddot{q}_1 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 + c_{13}q_3 = 0 \tag{2.1}$$
$$a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 = 0,$$
$$a_{33}\ddot{q}_3 + c_{31}q_1 + c_{33}q_3 = 0$$
$$a_{44}\ddot{q}_4 = \sum_{i=1}^{n} (G_i \sin iq_4 + F_i \cos iq_4)$$

Однородная система, соответствующая системе (2.1), имеет следующее характеристическое уравнение:

$$k^2 (\alpha k^6 + \beta k^4 + \gamma k^2 + \delta) = 0$$

$$\alpha = a_{11}a_{22}a_{33},\quad \beta = -a_{11}a_{22}c_{33} - a_{33} (a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11})$$
$$\gamma = c_{33} (a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11}) + c_{11}c_{22}a_{33} - a_{33}c_{12}^2 - a_{22}c_{13}^2$$
$$\delta = c_{33}c_{12}^2 + c_{22}c_{13}^2 - c_{11}c_{22}c_{33}$$

Его корни являются собственными частотами механической системы

$k_1 = 0, \quad k_i \neq 0 \quad (i = 2, 3, 4)$. Собственные формы принимают следующие значения:

$$\mu_1^{(1)} = \mu_2^{(1)} = \mu_3^{(1)} = \mu_4^i = 0, \mu_4^{(1)} = \mu_1^{(i)} = 1, \mu_2^{(i)} = \frac{k_i^2 a_{22} - c_{22}}{c_{21}}, \mu_3^{(i)} = \frac{c_{31}}{k_i^2 a_{22} - c_{22}} (i=2,3,4)$$

Первые три уравнения системы (2.1) не зависят от четвертого. Они имеют следующее решение:

$$q_i = \mu_i^{(2)} a_2 \cos \psi, \quad \psi = k_2 t + \alpha_i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{2.2}$$

После преобразования четвертого уравнения получаем выражения

$$\ddot{q}_4 = \frac{1}{a_{44}} \sum_{i=1}^{n} (G_i \sin iq_4 + F_i \cos iq_4) \tag{2.3}$$

$$\dot{q}_4^2 = \omega^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{ia_{44}} (-G_i \cos iq_4 + F_i \sin iq_4)$$

Подставляем (1.3) в (2.3) и разлагаем в степенные ряды. Сохраняя члены первого порядка, находим

$$\ddot{q}_4 = \frac{1}{a_{44}} \sum_{i=1}^{n} (G_i \sin i\omega t + F_i \cos i\omega t) + \frac{q_4^*}{a_{44}} \sum_{i=1}^{n} (G_i \cos i\omega t - F_i \sin i\omega t) \tag{2.4}$$

$$\dot{q}_4^2 = \omega^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{ia_{44}} (-G_i \cos i\omega t + F_i \sin i\omega t) + q_4^* \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{ia_{44}} (G_i \sin i\omega t + F_2 \cos i\omega t)$$

Амплитуды гармоник, входящих во вторые суммы (2.4), достаточно малы по сравнению с амплитудами гармоник, входящих в первые суммы. Поэтому выражения (2.4) запишем в виде

$$\ddot{q}_4 = \frac{1}{a_{44}} \sum_{i=1}^{n} (G_i \cos i\omega t + F_i \cos i\omega t) + \lambda q_4^* \sum_{i=1}^{n} (G_i' \sin i\omega t + F_i' \cos i\omega t)$$

$$\dot{q}_4^2 = \omega^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{ia_{44}} (-G_i \cos i\omega t + F_i \sin i\omega t) + \lambda q_4^* \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{i} (G_i' \sin i\omega t + F_2' \cos i\omega t)$$

$$G_i' = lG_i/(Ra_{44}), \quad F_i' = lF_i/(Ra_{44})$$

3. Первое приближение. Подставляем (2.2) и (2.5) в систему (1.2), для которой после преобразования получаем

$$a_{11}\ddot{q}_1 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 + c_{13}q_3 = \lambda f_1 (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) \tag{3.1}$$

$$a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 = \lambda f_2 (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \omega t) + \lambda^2 f_2^* (q_4^*, \omega t)$$

$$a_{33}\ddot{q}_3 + c_{31}q_1 + c_{33}q_3 = \lambda f_3 (\dot{q}_1, \dot{q}_3), \quad a_{44}\ddot{q}_4 = \lambda f_4 (\ddot{q}_2, \omega t) + \lambda^2 f_4^* (q_4^*, \omega t)$$

Согласно методу Крылова—Боголюбова [6], решение системы (3.1), соответствующее ненулевой основной частоте, ищем путем асимптотического разложения

$$q_i = \mu_i^{(1)} \omega t + \mu_i^{(2)} a_2 \cos \psi + \lambda U_i^{(1)} (a_2, \psi, \omega t) + \lambda^2 \ldots \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{3.2}$$

Функции $U_i^{(1)} (a_2, \psi, \omega t)$ периодические по ψ и ωt с периодом 2π, а амплитуда и фаза определяются из уравнений

$$da_2/dt = \lambda A_1 (a_2) + \lambda^2 \ldots, \quad d\psi/dt = k_2 + \lambda B_1 (a_2) + \lambda^2 \ldots \tag{3.3}$$

Задача свелась к определению функции $U_i^{(1)} (a_2, \psi, \omega t)$, $A_1 (a_2)$, $B_1 (a_2) \ldots$ таким образом, чтобы решение (3.2) удовлетворяло системе (3.1) каждый раз, когда a_2 и ψ удовлетворяют уравнениям (3.3).

Дифференцируем дважды ряд (3.2) с учетом (3.3) и полученный результат подставляем в левые части уравнений (3.1), которые разлагаются по степеням малого параметра. Приравняв коэффициенты при первой степени λ в разложениях левых и правых частей (3.1), получаем систему первого приближения

$$a_{11}\left(k_2^2\frac{\partial^2U_1^{(1)}}{\partial\psi^2}+2k_2\frac{\partial^2U_1^{(1)}}{\partial\psi\partial t}+\frac{\partial^2U_1^{(1)}}{\partial t^2}\right)+c_{11}U_1^{(1)}+c_{12}U_2^{(1)}+c_{13}U_3^{(1)}=$$

$$=f_{1,0}(a_2,\psi,\omega t)+2a_{11}k_2(A_1\sin\psi+a_2b_1\cos\psi)$$

$$a_{22}\left(k_2^2\frac{\partial^2U_2^{(1)}}{\partial\psi^2}+2k_2\frac{\partial^2U_2^{(1)}}{\partial\psi\partial t}+\frac{\partial^2U_2^{(1)}}{\partial t^2}\right)+c_{21}U_1^{(1)}+c_{22}U_2^{(1)}=$$

$$=f_{2,0}(a_2,\psi,\omega t)+2\mu_2^{(2)}a_{22}k_2(A_1\sin\psi+a_2b_1\cos\psi)$$

$$a_{33}\left(k_2^2\frac{\partial^2U_3^{(1)}}{\partial\psi^2}+2k_2\frac{\partial^2U_3^{(1)}}{\partial\psi\partial t}+\frac{\partial^2U_3^{(1)}}{\partial t^2}\right)+c_{31}U_1^{(1)}+c_{33}U_3^{(1)}= \tag{3.4}$$

$$=f_{3,0}(a_2,\psi,\omega t)+2\mu_3^{(2)}a_{33}k_2(A_1\sin\psi+a_2b_1\cos\psi)$$

$$a_{44}\left(k_2^2\frac{\partial^2U_4^{(1)}}{\partial\psi^2}+2k_2\frac{\partial^2U_4^{(1)}}{\partial\psi\partial t}+\frac{\partial^2U_4^{(1)}}{\partial t^2}\right)=f_{4,0}(a_2,\psi,\omega t)$$

$$f_{i,0}=S_i\sin\psi\quad(i=1,3) \tag{3.5}$$

$$f_{2,0}=S_2\sin\psi+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=-2}^{2}[C_{i,j}^{(2)}\sin(i+j)\,\omega t+E_{i,j}^{(2)}\cos(i+j)\,\omega t]$$

$$f_{4,0}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=-3}^{3}[C_{i,j}^{(4)}\sin(i+j)\,\omega t+E_{i,j}^{(4)}\cos(i+j)\,\omega t]+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=-1}^{1}L_{i,j}\sin(i\omega t+j\psi)$$

$$S_1=a_2\,[b_1'+(1-\mu_2^{(2)})\,b_2'+(1-\mu_3^{(2)})\,b_3'],\ \ S_2=a_2b_2'(1-\mu_2^{(2)}),$$

$$S_3=a_2b_3'(1-\mu_3^{(2)})$$

$$E_{1,0}^{(2)}=l\omega^2(m_o+m_s-m_kv/R),\qquad E_{2,0}=-R\omega^2(m_o+\rho m_s)$$

$$C_{i,\pm1}^{(2)}=\frac{lF_i(2\pm i)(m_o+m_s-m_kv/R)}{2ia_{44}},\quad E_{i,\pm1}^{(2)}=-\frac{l(2\pm i)\,G_i(m_o+m_s-m_kv/R)}{2ia_{44}}$$

$$C_{i,\pm2}^{(2)}=-\frac{F_i(4\pm i)(m_o+\rho m_s)R}{4ia_{44}},\quad E_{i,\pm2}^{(2)}=\frac{G_i(4\pm i)(m_o+\rho m_s)R}{4ia_{44}}$$

$$C_{1,0}^{(4)}=\frac{R^2}{4}\left(m_o+\rho m_s\right)\omega^2+lg\left(m_o+m_s-m_k\frac{v}{R}\right)-\frac{H_2'+H_5'+2\omega(H_3'+H_6')}{a_{44}\omega}F_1$$

$$C_{2,0}^{(4)}=\frac{1}{2}lR\,[\rho(2-\rho)\,m_s+m_o]\,\omega^2+\frac{1}{2}R(m_o+\rho m_s)\,g-$$

$$-\frac{H_2'+H_5'+2\omega(H_3'+H_6')}{2a_{44}\omega}F_2$$

$$C_{3,0}^{(4)}=-\frac{3}{4}R\omega^2(m_o+\rho m_s)-\frac{H_2'+H_5'+2\omega(H_3'+H_6')}{3a_{44}\omega}F_3$$

$$C_{i,0}^{(4)}=-\frac{H_2'+H_5'+2\omega(H_3'+H_6')}{ia_{44}\omega}F_i,\quad E_{i,0}^{(4)}=\frac{H_2'+H_5'+2\omega(H_3'+H_6')}{ia_{44}\omega}G_i$$

$$C^{(4)}_{i,\pm 1} = -\frac{R^2 (m_o + \rho m_s)(i \pm 2) G_i}{8ia_{44}}, \quad E^{(4)}_{i,\pm 1} = -\frac{R^2 (m_o + \rho m_s)(i \pm 2) F_i}{8ia_{44}}$$

$$C^{(4)}_{i,\pm 2} = \frac{lR\,[m_o + \rho (2-\rho) m_s](i \pm 2) G_i}{4ia_{44}}, \quad E^{(4)}_{i,\pm 2} = \frac{lR\,[m_o + \rho (2-\rho) m_s](i \pm 2) F_i}{4ia_{44}}$$

$$C^{(4)}_{i,\pm 3} = \frac{R^2 (m_o + \rho m_s)(i \pm 3) G_i}{4ia_{44}}, \quad E^{(4)}_{i,\pm 3} = \frac{R^2 (m_o + \rho m_s)(i \pm 3) F_i}{4ia_{44}}$$

$$L_{1,\pm 1} = {}^1\!/_2 l \mu_2^{(2)} a_2 k_2^2 (m_o + m_s - m_k v/R), \quad L_{2,\pm 1} = {}^1\!/_4 \mu_2^{(2)} a_2 k_2^2 R (m_o + \rho m_s)$$

Функции $U_i^{(1)}(a_2, \psi, \omega t)$ будем искать в виде

$$U_i^{(1)} = U_{i,1} \sin\psi + U_{i,2} \cos\psi \quad (i = 1, 3)$$

$$U_2^{(1)} = U_{2,1} \sin\psi + U_{2,2} \cos\psi + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=-2}^{2} [V_{i,j}^{(2)} \sin (i+j)\omega t +$$

$$+ W_{i,j}^{(2)} \cos (i+j)\omega t], \quad U_4^{(1)} = U_{4,1} \sin\psi + U_{4,2} \cos\psi + \tag{3.6}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=-3}^{3} [V_{i,j}^{(4)} \sin (i+j)\omega t + W_{i,j}^{(4)} \cos (i+j)\omega t] + \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=-1}^{1} Z_{i,j} \sin (i\omega t + j\psi)$$

где коэффициенты $U_{i,j}$, $V_{i,j}$, $W_{i,j}$, $Z_{i,j}$ неизвестны.

Подставляя (3.6) в (3.4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, получаем следующие алгебраические системы:

$$\begin{aligned} &(c_{11} - k_2^2 a_{11}) U_{1,1} + c_{12} U_{2,1} + c_{13} U_{3,1} = S_1 + 2a_{11} k_2 A_1 \\ &c_{21} U_{1,1} + (c_{22} - k_2^2 a_{22}) U_{2,1} = S_2 + 2\mu_2^{(2)} a_{22} k_2 A_1 \\ &c_{31} U_{1,1} + (c_{33} - k_2^2 a_{33}) U_{3,1} = S_3 + 2\mu_3^{(2)} a_{33} k_2 A_1, \quad -k_2^2 a_{44} U_{4,1} = 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} &(c_{11} - k_2^2 a_{11}) U_{1,2} + c_{12} U_{2,2} + c_{13} U_{3,2} = 2a_{11} k_2 a_2 b_1 \\ &c_{21} U_{1,2} + (c_{22} - k_2^2 a_{22}) U_{2,2} = 2\mu_2^{(2)} a_{22} k_2 a_2 B_1 \\ &c_{31} U_{1,2} + (c_{33} - k_2^2 a_{33}) U_{3,2} = 2\mu_3^{(2)} a_{33} k_2 a_2 B_1, \quad -k_2^2 a_{44} V_{4,2} = 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$[c_{22} - (i+j)^2 \omega^2 a_{22}] V_{i,j}^{(2)} = C_{i,j}^{(2)}$$

$$[c_{22} - (i+j)^2 \omega^2 a_{22}] W_{i,j}^{(2)} = E_{i,j}^{(2)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n, \ j = 0, \pm 1, \pm 2)$$

$$-(i+j)^2 \omega^2 a_{44} V_{i,j}^{(4)} = C_{i,j}^{(4)}$$

$$-(i+j)\omega^2 a_{44} W_{i,j}^{(4)} = E_{i,j}^{(4)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n, \ j = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4)$$

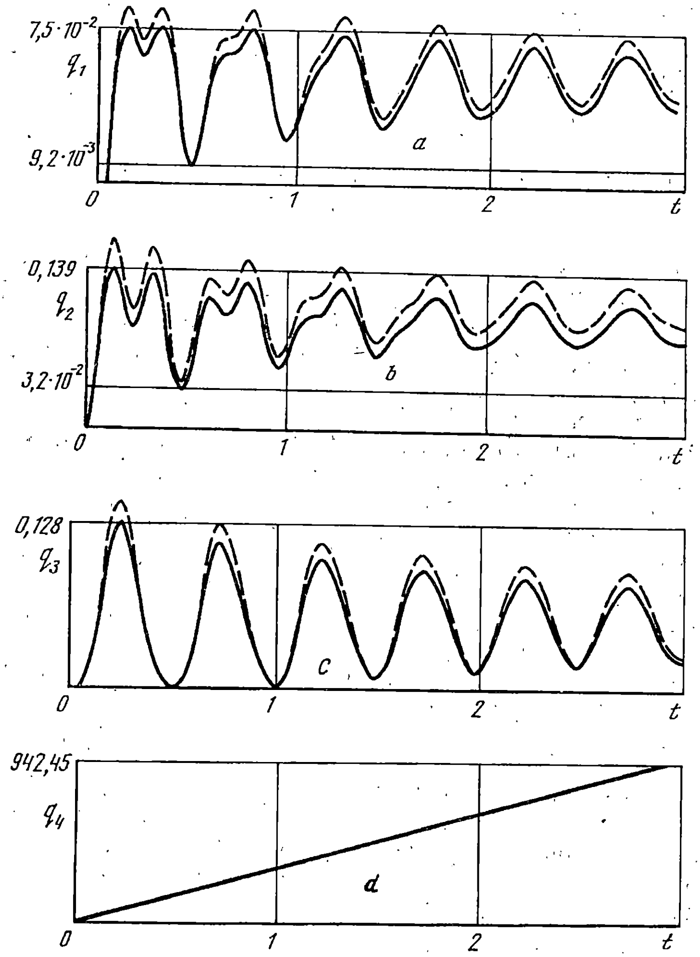
$$-(i\omega + jk_2)^2 a_{44} Z_{i,j} = L_{i,j} \quad (i = 1, 2, \ j = \pm 1)$$

Так как детерминанты систем (3.7) и (3.8) равны нулю, то коэффициенты A_1 и B_1 выбираем так, чтобы эти системы удовлетворялись произвольными, но краевыми значениями $U_{i,1}$ и $U_{i,2}$. Для этого умножаем каждое из уравнений соответственно на $\mu_i^{(2)}$ и складываем. Левые части равны нулю и для A_1 и B_1 находим

$$A_1 = -\frac{h}{\lambda} a_2, \quad h = \frac{b_1 + b_2 (\mu_2^{(2)} - 1)^2 + b_3 (\mu_3^{(2)} - 1)^2}{2 (a_{11} - a_{22} \mu_2^{(2)2} + a_{33} \mu_3^{(2)2})}, \quad B_1 = 0$$

При начальных условиях $t_0 = 0$, $a_2(t_0) = a_0$, $\psi(t) = \alpha_0$. Соблюдая (3.3), получаем $a_2 = a_0 e^{-ht}$, $\psi = k_2 t + \alpha_0$.

Таким образом, решение системы (3.1) в первом приближении будет иметь вид



Фиг. 2

$$q_i = \mu_i^{(2)} a_0 e^{-ht} \cos(k_2 t + \alpha_0) + \lambda\, [U_{i,1} \sin(k_2 t + \alpha_0) + U_{i,2} \cos(k_2 t + \alpha_0)] \quad (i = 1, 3)$$

$$q_2 = \mu_2^{(2)} a_0 e^{-ht} \cos(k_2 t + \alpha_0) + \lambda \{ U_{2,1} \sin(k_2 t + \alpha_0) + U_{2,2} \cos(k_2 t + \alpha_0) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=-2}^{2} [V_{i,j}^{(2)} \sin(i + j)\,\omega t + W_{i,j}^{(2)} \cos(i + j)\,\omega t]\}$$

$$q_4 = \omega t - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2 \omega a_{44}} (G_i \sin i\omega t + F_i \cos i\omega t) + \lambda \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=-3}^{3} [V_{i,j}^{(4)} \sin(i + j)\,\omega t + W_{i,j}^{(4)} \cos(i + j)\,\omega t] \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=-1}^{1} Z_{i,j} \sin(i\omega t + j\psi)\right\}$$

Оно состоит из двух частей. Первая — экспоненциально затухающее во времени движение и вторая — высокочастотные колебания. При стационарном режиме коленчатый вал совершает равномерное вращение, на которое накладываются высокочастотные угловые колебания. На устойчивость движения влияет параметр h. Он должен быть положительным и достаточно большим.

4. Численное решение. Система дифференциальных уравнений (1.2) решена численно по методу Рунге—Кутта при следующих значениях параметров ме-

P	$P_p^{(i)}$ $(i = 2, 4)$	$Q_p^{(i)}$ $(i = 2, 4)$
1	$c_{1,0}^{(i)} + c_{2,-1}^{(i)} + c_{3,-2}^{(i)} + c_{4,-3}^{(i)}$	$E_{i,0}^{(i)} + E_{2,-1}^{(i)} + E_{3,-2}^{(i)} + E_{4,-3}^{(i)}$
2	$c_{2,0}^{(i)} + c_{1,1}^{(i)} + c_{3,-1}^{(i)} + c_{4,-2}^{(i)} + c_{5,-3}^{(i)}$	$E_{2,0}^{(i)} + E_{1,1}^{(i)} + E_{3,-1}^{(i)} + E_{4,-2}^{(i)} + E_{5,-3}^{(i)}$
3	$c_{3,0}^{(i)} + c_{1,2}^{(i)} + c_{2,1}^{(i)} + c_{4,-1}^{(i)} + c_{5,-2}^{(i)} + c_{6,-3}^{(i)}$	$E_{3,0}^{(i)} + E_{1,2}^{(i)} + E_{2,1}^{(i)} + E_{4,-1}^{(i)} + E_{5,-2}^{(i)} + E_{6,-3}^{(i)}$

ханической системы: $m_2 = 100$ кг, $J_s = 0{,}07$ кг·м², $b_1 = 230$ Н·с/м, $m_k = 2{,}7$ кг, $J_k = 0{,}09$ кг·м², $b_2 = 290$ Н·с/м, $m_s = 1{,}8$ кг, $R = 0{,}07$ м, $b_3 = 360$ Н·с/м, $m_o = 2{,}2$ кг, $v = 0{,}03$ м, $c_1 = 100000$ Н/м, $m_3 = 298$ кг, $\lambda = 0{,}21$, $c_2 = 140000$ Н/м, $m_1 = 69{,}5$ кг, $\rho = 0{,}3$, $c_3 = 60000$ Н/м. Начальные условия $q_{i0} = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, $\dot{q}_{i0} = 0$ $(i = 1, 2, 3)$, $q_{40} = 314$ с$^{-1}$.

Коэффициенты момента от двигателя $F_1 = 316{,}2$ Н·м, $F_2 = 124{,}7$ Н·м, $F_3 = -21{,}3$ Н·м, $G_1 = 217{,}9$ Н·м, $G_2 = 130{,}1$ Н·м, $G_3 = -26{,}5$ Н·м. Численное решение системы (1.1) представлено графически на фиг. 2 (сплошные кривые).

Считая числовое решение достаточно точным, авторы сравнили с ним полученное одночастотное асимптотическое решение (штриховые кривые). Частотный анализ показывает удовлетворительное совпадение частот. Устанавливается небольшая разница по амплитудам и декременту затухания. Имея в виду это, можно сделать вывод, что первое приближение дает практически приемлемую точность.

5. Резонансные случаи. Анализ системы (3.1) показывает, что возможен резонанс по обертону внешней частоты

$$k_2 = p\omega \quad (p = 1, 2, 3 \ldots) \tag{5.1}$$

Здесь удобно ввести в рассмотрение разность фаз между собственным колебанием и внешним воздействием $\theta = \psi - p\omega t$. Она может оказывать существенное влияние на изменение амплитуды и частоты колебания. Поэтому будем представлять da_2/dt и $d\theta/dt$ как функции не только a_2, но также и θ.

Гармоники, которые входят в (3.5) и удовлетворяют условие (5.1) можем записать в виде

$$P_p^{(i)} \sin p\omega t + Q_p^{(i)} \cos p\omega t = P_p^{(i)} \sin (\psi - \theta) + Q_p^{(i)} \cos (\psi - \theta) =$$

$$= (P_p^{(i)} \cos \theta + Q_p^{i} \sin \theta) \sin \psi + (Q_p^{(i)} \cos \theta - P_p^{(i)} \sin \theta) \cos \psi \quad (i = 2, 4)$$

Значения коэффициентов P_p и Q_p для первых трех резонансных случаев представлены в таблице.

Решение системы (3.1) ищем в виде

$$q_i = \mu_i^{(1)}\omega t + \mu_i^{(2)} a_2 \cos (p\omega t + \theta) + \lambda U_i^{(1)} (a_2, \theta, \omega t) + \lambda^2 \ldots \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{5.2}$$

где амплитуду и разность фаз будем определять как решения дифференциальных уравнений вида

$$da_2/dt = \lambda A_1 (a_2, \theta) + \lambda^2 \ldots, \quad d\theta/dt = k_2 - p\omega + \lambda B_1 (a_2, \theta) + \lambda^2 \ldots \tag{5.3}$$

Определим функции $A_1 (a_2, \theta)$, $B_1 (a_2, \theta)$, $U_i^{(1)} (a_2, \theta, \omega t) \ldots$ так, чтобы решение (5.2) удовлетворяло системе (3.1).

Система первого приближения имеет следующий вид:

$$a_{11} [(k_2 - p\omega)^2 \partial^2 U_1^{(1)}/\partial\theta^2 + 2 (k_2 - p\omega) \partial^2 U_1^{(1)}/\partial\theta\partial t + \partial^2 U_1^{(1)}/\partial t_2] +$$

$$+ c_{11} U_1^{(1)} + c_{12} U_2^{(1)} + c_{13} U_3^{(1)} = f_{1,0}' (a_2, \psi, \omega t) +$$

$$+ a_{11} [2k_2 A_1 + a_2 (k_2 - p\omega) \partial B_1/\partial\theta] \sin \psi + a_{11} [2a_2 k_2 B_1 - (k_2 - p\omega) \partial A_1/\partial\theta] \cos \psi \tag{5.4}$$

$$a_{22} [(k_2 - p\omega)^2 \partial^2 U_2^{(1)}/\partial\theta^2 + 2 (k_2 - p\omega) \partial^2 U_2^{(1)}/\partial\theta\partial t + \partial^2 U_2^{(1)}/\partial t^2] +$$

$$+ c_{21} U_1^{(1)} + c_{22} U_2^{(1)} = f_{2,0}' (a_2, \psi, \omega t) + a_{22}\mu_2^{(2)} [2k_2 A_1 + a_2 (k_2 - p\omega) \partial B_1/\partial\theta] \sin \psi +$$

$$+ a_{22}\mu_2^{(2)} [2a_2k_2B_1 - (k_2 - p\omega)\, \partial A_1/\partial\theta] \cos\psi$$

$$a_{33} [(k_2 - p\omega)^2 \partial^2 U_3^{(1)}/\partial\theta^2 + 2(k_2 - p\omega)\, \partial^2 U_3^{(1)}/\partial\theta\partial t + \partial^2 U_3^{(1)}/\partial t^2] +$$

$$+ c_{31}U_1^{(1)} + c_{33}U_3^{(1)} = f_{3,0}'(a_2, \psi, \omega t) + a_{33}\mu_3^{(2)} [2k_2A_1 + a_2(k_2 - p\omega)\, \partial B_1/\partial\theta] \sin\psi +$$

$$+ a_{33}\mu_3^{(2)} [2a_2k_2B_1 - (k_2 - p\omega)\, \partial A_1/\partial\theta] \cos\psi$$

$$a_{44} [(k_2 - p\omega)^2 \partial^2 U_4^{(1)}/\partial\theta^2 + 2(k_2 - p\omega)\, \partial^2 U_4^{(1)}/\partial\theta\partial t + \partial^2 U_4^{(1)}/\partial t^2] = f_{4,0}'(a_2, \psi, \omega t)$$

Функции $f_{i,0}'$ находим из (3.5) не учитывая гармоник, удовлетворяющих условию (5.1).

Функции $U_i^{(1)}(a_2, \theta, \omega t)$ будем искать в виде

$$U_i^{(1)} = U_{i,1} \sin\psi + U_{i,2} \cos\psi \quad (i = 1, 3) \tag{5.5}$$

$$U_2^{(1)} = U_{2,1} \sin\psi + U_{2,2} \cos\psi + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=-2}^{2} [V_{i,j}^{(2)} \sin(i + j)\,\omega t + W_{i,j}^{(2)} \cos(i + j)\,\omega t]$$

$$U_4^{(1)} = U_{4,1} \sin\psi + U_{4,2} \cos\psi + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=-3}^{3} [V_{i,j}^{(4)} \sin(i + j)\,\omega t +$$

$$+ W_{i,j}^{(4)} \cos(i + j)\,\omega t] + \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=-1}^{1} Z_{i,j} \sin(i\omega t + j\psi)$$

где коэффициенты $U_{i,j}$, $V_{i,j}$, $W_{i,j}$, $Z_{i,j}$ — неизвестны.

Подставляя (5.5) в (5.4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, получаем следующие системы:

$$(c_{11} - k_2^2a_{11})\, U_{1,1} + c_{12}U_{2,1} + c_{13}U_{3,1} = S_1 + a_{11} [2k_2A_1 + a_2(k_2 - p\omega)\, \partial B_1/\partial\theta]$$

$$c_{21}U_{1,1} + (c_{22} - k_2^2a_{22})\, U_{2,1} = S_2 + P_p^{(2)} \cos\theta + Q_p^{(2)} \sin\theta + \mu_2^{(2)}a_{22} [2k_2A_1 + a_2(k_2 -$$

$$- p\omega)\, \partial B_1/\partial\theta] \tag{5.6}$$

$$c_{31}U_{3,1} + (c_{33} - k_2^2a_{33})\, U_{3,1} = S_3 + \mu_3^{(2)}a_{33} [2k_2A_1 + a_2(k_2 - p\omega)\, \partial B_1/\partial\theta]$$

$$-k_2^2a_{44}U_{4,1} = P_p^{(4)} \cos\theta + Q_p^{(4)} \sin\theta$$

$$(c_{11} - k_2^2a_{11})\, U_{1,2} + c_{12}U_{2,2} + c_{13}U_{3,2} = a_{11} [2a_2k_2B_1 - (k_2 - p\omega)\, \partial A_1/\partial\theta] \tag{5.7}$$

$$c_{21}U_{1,2} + (c_{22} + k_2^2a_{22})\, U_{2,2} = Q_p^{(2)} \cos\theta - P_p^{(2)} \sin\theta + \mu_2^{(2)}a_{22} [2a_2k_2B_1 - (k_2 -$$

$$- p\omega)\, \partial B_1/\partial\theta]$$

$$c_{31}U_{1,2} + (c_{33} - k_2^2a_{33})\, U_{3,2} = \mu_3^{(2)}a_{33} [2a_2k_2B_1 - (k_2 - p\omega)\, \partial B_1/\partial\theta]$$

$$-k_2^2a_{44}U_{4,2} = Q_p^{(4)} \cos\theta - P_p^{(4)} \sin\theta$$

Так как детерминанты систем (5.6) и (5.7) равны нулю, то коэффициенты A и B выбираем так, чтобы эти системы удовлетворялись произвольными, но краевыми значениями $U_{i,1}$ и $U_{i,2}$. Для этого умножаем каждое из уравнений соответственно на $\mu_2^{(2)}$ и складываем. Левые части равны нулю и для A_1 и B_1 получаем систему

$$\varkappa [2k_2A_1 + a_2(k_2 - p\omega)\, \partial B_1/\partial\theta] = -S_1 - S_2\mu_2^{(2)} - S_3\mu_3^{(2)} - P_p^{(2)}\mu_2^{(2)} \cos\theta - Q_p^{(2)}\mu_2^{(2)} \sin\theta$$

$$\varkappa [2k_2a_2B_1 - (k_2 - p\omega)\, \partial A_1/\partial\theta] = -\mu_2^{(2)}Q_p^{(2)} \cos\theta + \mu_2^{(2)}P_p^{(2)} \sin\theta \tag{5.8}$$

$$\varkappa = a_{11} + {\mu_2^{(2)}}^2 a_{22} + {\mu_3^{(2)}}^2 a_{33}$$

Коэффициенты A_1 и B_1 ищем в виде

$$A_1 = r_1 + r_2 \cos\theta + r_3 \sin\theta \tag{5.9}$$

$$B_1 = r_4 + r_5 \cos\theta + r_6 \sin\theta$$

Подставляем (5.9) в систему (5.8), приравняем коэффициенты при одинаковых гармониках, определяем r_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) и находим

$$A_1 = a_2 \frac{b_1'+b_2' (\mu_2^{(2)}-1)^2+b_3' (\mu_3^{(2)}-1)^2}{2\varkappa} - \frac{P_p^{(2)}\mu_2^{(2)}}{\varkappa(k_2+p\omega)} \cos\theta - \frac{Q_p^{(2)}\mu_2^{(2)}}{\varkappa(k_2+p\omega)} \sin\theta \quad (5.10)$$

$$B_1 = \frac{Q_p^{(2)}\mu_2^{(2)}}{\varkappa a_2 (k_2 + p\omega)} \cos\theta + \frac{P_p^{(2)}\mu_2^{(2)}}{\varkappa a_2 (k_2 + p\omega)} \sin\theta$$

Так как при стационарном режиме выполнены условия $da_2/dt = 0$ и $d\theta/dt = 0$, из (5.3) и (5.10) находим

$$a_2 = \frac{2\mu_2^{(2)}}{k_2 + p\omega} \left[\frac{{P_p^{(2)}}^2 + {Q_p^{(2)}}^2}{[b_1 + b_2 (\mu_2^{(2)} - 1)^2 + b_3 (\mu_3^{(2)} - 1)^2]^2 + 4\varkappa (k_2 - p\omega)^2 \lambda^{-2}} \right]^{1/2}$$

$$\theta = -\mathrm{arctg} \frac{2\varkappa (k_2 - p\omega) P_p^{(2)} + [b_1 + b_2 (\mu_2^{(2)} - 1)^2 + b_3 (\mu_3^{(2)} - 1)^2] \lambda Q_p^{(2)}}{2\varkappa (k_2 - p\omega) Q_p^{(2)} - [b_1 + b_2 (\mu_2^{(2)} - 1)^2 + b_3 (\mu_3^{(2)} - 1)^2] \lambda P_p^{(2)}}$$

В резонансном случае нет необходимости определять полное решение системы (3.1), так как коэффициенты при нерезонансных гармониках не влияют существенно на колебания механической системы. Эффект резонанса сказывается при небольших значениях коэффициента p ($p = 1, 2, 3$).

Резонансную амплитуду можно уменьшить путем увеличения параметров m_i и b_i ($i = 1, 2, 3$), учитывая требования комфортабельности движения и экономии материалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Силаев А. А.* Спектральная теория подрессоривания транспортных машин. М.: Машиностроение, 1972. 192 с.
2. *Ротенберг Р. В.* Подвеска автомобиля. Колебания и плавность хода. М.: Машиностроение, 1972. 392 с.
3. Динамика системы дорога — шина — автомобиль — водитель/Под ред. А.А. Хачатурова. М.: Машиностроение, 1976. 535 с.
4. *Цитович И. С., Альгин В. Б.* Динамика автомобиля. Минск: Наука и техника, 1981. 191 с.
5. *Вейц В. Л., Кочура А. Е.* Динамика машинных агрегатов с двигателями внутреннего сгорания. Л.: Машиностроение, 1976. 383 с.
6. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963. 410 с.

София

Поступила в редакцию 5.V.1992