МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1995

УДК 531.8

 И. В. БУРКОВ

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНОГО ПУТИ РОБОТА С АБСОЛЮТНО ЖЕСТКИМИ И УПРУГИМИ ЗВЕНЬЯМИ

Отслеживание программного пути в конфигурационном пространстве роботом-манипулятором является важной практической задачей и трудной теоретической проблемой из-за нелинейности и нестационарности уравнений объекта. Для решения этой задачи применительно к роботу с абсолютно жесткими звеньями предложен метод вычисляемого момента [1, 2]. Для формирования такого закона управления требуется знание массо-инерционных параметров робота и необходимо производить сложные вычисления в процессе движения робота. С целью преодоления первого требования предложены законы адаптивного управления, см., например, [1, 3, 4], однако, они требуют проведения еще более сложных вычислений в режиме реального времени. В [5] с использованием оригинальной функции Ляпунова математически строго обосновано применение сильной линейной обратной связи по положению и скорости; будет показано как этот результат можно значительно легче вывести используя теорию сингулярных возмущений, кроме того, теория сингулярных возмущений позволяет исследовать область притяжения и время переходного процесса, чего не сделано в [5].

С целью сокращения расчетов в реальном времени предложены регуляторы [6, 7]; сокращение основано на том, что ПД-компонента в управление входит аддитивно и может быть реализована аппаратно, однако, вычисления все равно остаются сложными.

На практике иногда используют законы управления типа «программный момент + линейная обратная связь по положению и скорости»; экспериментальные исследования такого закона управления смотри в [8, 9]. В [10, 11] численно исследовался регулятор типа «программный момент + линейная нестационарная обратная связь по положению и скорости».

Весьма актуальной задачей является разработка и исследование законов стабилизации робота с упругими звеньями. Предлагаются и исследуются законы стабилизации упругого плоского робота, использующие измерение моментов или ускорений (дополнительно к измерению скоростей и положений).

Доказательства устойчивости проводятся с помощью теории сингулярных возмущений дифференциальных уравнений. Об использовании этой теории для исследования систем управления с большими коэффицентами усиления см. обзоры [12—16] и [17]. Из последних работ такого рода отметим [18—20]. Большинство из этих работ относится к линейным системам.

К сожалению, хоть и доказательства теорем [21, 22] основаны на применении функций Ляпунова, довольно трудно извлечь из доказательств оценку на величину малости параметра.

1. Уравнения динамики объектов. Динамика робота с абсолютно жесткими звеньями описывается уравнениями Лагранжа второго рода (см., например, [11]):

$$(\partial K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})/\partial \dot{\mathbf{q}})^{\cdot} - \partial K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})/\partial \mathbf{q} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{M} \tag{1.1}$$

которое равносильно уравнению $A(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{M}$, где $\mathbf{q} \in R^n$ — вектор обобщенных координат, $A(\mathbf{q})$ — положительно определенная симметричная матрица инерции, $K = \dot{\mathbf{q}}^* A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}/2$ — кинетическая энергия, $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ — вектор потенциальных сил, $\mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ — вектор квадратичных членов по $\dot{\mathbf{q}}$ и потенциальных сил, $\mathbf{M}$ — вектор обобщенных управляющих сил. Пусть $\mathbf{q}_p(t) \in C^2[0, \infty)$ — вектор программного движения и пусть $\dot{\mathbf{q}}_p(t)$, $\ddot{\mathbf{q}}_p(t)$ ограничены на полуоси. Предположим, что матрицы $A(\mathbf{q})$, $A^{-1}(\mathbf{q})$, вектор $\mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ и их первые и вторые частные производные по q, $\dot{\mathrm{q}}$ равномерно ограничены в некоторой окрестности программного движения. Пусть $*$ означает транспонирование, $|\cdot|$ — евклидову норму вектора. Предположим также, что $|\dot{\mathrm{q}}^* A(\mathrm{q})\dot{\mathrm{q}}| \geq c_1 |\dot{\mathrm{q}}|^2$, $|\dot{\mathrm{q}}^* A^{-1}(\mathrm{q})\dot{\mathrm{q}}| \geq c_{-1} |\dot{\mathrm{q}}|^2$ $\forall \dot{\mathrm{q}} \in R^n$, где c_1, $c_{-1} = \mathrm{const} > 0$.

Приводы, реализующие непосредственно обобщенные силы пока еще применяются редко, чаще применяются электродвигатели постоянного тока с независимым возбуждением, динамика которых описывается уравнением

$$T_a\dot{\mathrm{M}} + \mathrm{M} + R\dot{\mathrm{q}} = \mathrm{U} \tag{1.2}$$

где T_a, R — диагональные матрицы с положительными элементами на диагонали; U — вектор управляющих напряжений. Отметим, что $t_{a_{ii}}$ весьма малы. В дальнейшем, при рассмотрении уравнений (1.2) будем предполагать, что $\mathrm{q}_p \in C^3 [0, \infty)$ и $\dot{\mathrm{q}}_p(t)$, $\ddot{\mathrm{q}}_p(t)$, $\dddot{\mathrm{q}}_p(t)$ ограничены на полуоси.

При определенных предположениях [23] динамика плоского упругого манипулятора с электроприводом описывается уравнением

$$R_{ct}\dot{\mathrm{M}} + \mathrm{M} + R\dot{\mathrm{q}} = \mathrm{W} \tag{1.3}$$

где R_{ct} — трехдиагональная матрица с постоянными элементами, ее элементы на главной диагонали и двух ближайших к главной диагонали положительны, R — диагональная матрица с положительными элементами на диагонали, W — вектор управляющих напряжений. В отличие от уравнения (1.2) положительные элементы матрицы R_{ct} не малы.

Приведем простейший пример, иллюстрирующий модель (1.1), (1.3). Пусть на вал, угловая координата которого есть q, насажен диск с моментом инерции a. Вал диска соединяется через упругий элемент с жесткостью k с валом электродвигателя. Уравнения системы есть

$$a\ddot{q} = m, \; m = k(\varphi - q), \; t_a\dot{m} + m + r\dot{\varphi} = u$$

где m — крутящий момент, φ — координата вала двигателя. Исключая φ с помощью алгебраического уравнения, получим дифференциальные уравнения $a\ddot{q} = m$, $(t_a + 1/k)\dot{m} + m + r\dot{\varphi} = u$.

Программная обобщенная сила определяется формулой

$$\mathrm{M}_p(t) = A(\mathrm{q}_p)\ddot{q}_p + \mathrm{b}(\mathrm{q}_p, \dot{\mathrm{q}}_p) \tag{1.4}$$

Определим программное напряжение

$$\mathrm{U}_p(t) = T_a\dot{\mathrm{M}}_p + \mathrm{M}_p + R\dot{\mathrm{q}}_p \tag{1.5}$$

Определим программное напряжение для уравнений (1.1), (1.3) формулой

$$\mathrm{W}_p(t) = R_{ct}\dot{\mathrm{M}}_p + \mathrm{M}_p + R\dot{\mathrm{q}}_p \tag{1.6}$$

Физический смысл вектор-функций времени $\mathrm{M}_p(t)$, $\mathrm{U}_p(t)$, $\mathrm{W}_p(t)$ — решение обратной задачи динамики для соответствующих уравнений. Эти функции можно вычислить до реального движения и запомнить, например, в виде сплайна.

Введем переменные отклонения $\mathrm{x} = \mathrm{q} - \mathrm{q}_p$, $\mathrm{y} = \dot{\mathrm{q}} - \dot{\mathrm{q}}_p$, $\mathrm{z} = \mathrm{M} - \mathrm{M}_p$.

2. Стабилизация программного пути робота с абсолютно жесткими звеньями, управляемого непосредственно обобщенными силами. Рассмотрим регулятор

$$\mathrm{M} = \mathrm{M}_p(t) - \gamma(K_0\mathrm{x} + \varkappa K_1\mathrm{y}) \tag{2.1}$$

где K_0, K_1 — диагональные матрицы с положительными элементами на диагонали.

Теорема 2.1. Замкнутая система (1.1), (2.1) равномерно (по времени) асимптотически устойчива по отношению к переменным x, y при всех достаточно больших γ, $\varkappa > 0$.

Доказательство. Замкнутая система (1.1), (2.1) может быть записана в виде

$$\dot{\mathrm{x}} = \mathrm{y}, \; \dot{\mathrm{y}} = -\ddot{\mathrm{q}}_p + A^{-1}(\mathrm{x} + \mathrm{q}_p)[-\gamma K_0\mathrm{x} - \gamma\varkappa K_1\mathrm{y} + \mathrm{M}_p - \mathrm{b}(\mathrm{x} + \mathrm{q}_p, \mathrm{y} + \dot{\mathrm{q}}_p)]$$

Разложим ее правую часть в ряд Тейлора по степеням x, $\dot{y}$:

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -\ddot{q}_p + (A^{-1}(q_p) + A_q^{-1}(q_p)x + \ldots)\,[-\gamma K_0 x - \gamma \varkappa K_1 y + A(q_p)\ddot{q}_p -$$
$$- b_q(q_p, \dot{q}_p)\,x - b_{\dot{q}}(q_p, \dot{q}_p)\,y + \ldots]$$

Здесь $(A_{ij}^{-1})_q$ — вектор-строка с элементами $(A_{ij}^{-1})_{q_1}$, $A_q^{-1}x$ — матрица с элементами $(A_{ij}^{-1})_q x$, b_q — матрица с элементами $(b_i)_{q_j}$, $b_{\dot{q}}$ — матрица с элементами $(b_i)_{\dot{q}_j}$, многоточие означает квадратичные члены, значки q, $\dot{q}$ в нижних индексах означают частное дифференцирование. Раскрывая скобки и сокращая члены, получим

$$\dot{x} = y,\ \dot{y} = (-A^{-1}(q_p)\,\gamma K_0 + L(t))\,x + (-A^{-1}(q_p)\,\gamma\varkappa K_1 + \check{M}(t))\,y + \ldots$$

$$L(t) := -A^{-1}(q_p)\,b_q(q_p, \dot{q}_p) + A_q^{-1}(q_p)\,A(q_p)\,\ddot{q}_p$$

$$\check{M}(t) := -A^{-1}(q_p)\,b_{\dot{q}}(q_p, \dot{q}_p)$$

Вырожденная система линейного приближения [22] при $\gamma = \infty$ есть

$$\dot{x} = y,\ 0 = -A^{-1}(q_p(t))\,K_0 x - A^{-1}(q_p(t))\,\varkappa K_1 y$$

Эта система равносильна асимптотически устойчивому уравнению $\dot{x} = -\varkappa^{-1}K_1^{-1}K_0 x$. Укороченная система линейного приближения будет $\dot{y} = -\varkappa A^{-1}(q_p(t))\,K_1 y$. Для доказательства равномерной асимптотической устойчивости укороченной системы рассмотрим функцию Ляпунова $V = y^* A(q_p(t))\,y/2$. Ее производная в силу укороченной системы есть $\dot{V} = -\varkappa y^* K_1 y + y^* \dot{A}(q_p(t))\,y/2$. При сделанных предположениях $\dot{A}(q_p(t))$ — ограниченная матрица-функция времени. При всех достаточно больших $\varkappa$, функция $\dot{V}$ будет отрицательно определенной функцией и функции V, $\dot{V}$ удовлетворяют оценкам, характерным для квадратичных форм [24], что влечет равномерную асимптотическую устойчивость укороченной системы. Доказательство окончено.

Приведем пример, показывающий, что требование достаточно сильных коэффициентов усиления по координатам существенно для асимптотической устойчивости. Рассмотрим маятник единичной длины с точечной единичной массой на конце и находящейся в поле силы тяжести, у которого единичное ускорение свободного падения. Пусть $q_p(t) = \mathrm{const}$. Уравнение динамики маятника $\ddot{q} + \sin q = M$. Закон управления выглядит следующим образом $M = \sin q_p - k_0 x - k_1\dot{x}$. Замкнутая система запишется в виде $\ddot{x} + \sin(q_p + x) = \sin q_p - k_0 x - k_1\dot{x}$. Разлагая в ряд Тейлора в окрестности точки q_p, получим

$$\ddot{x} + \cos q_p x + \ldots = -k_0 x - k_1\dot{x}$$

Линейное приближение запишется в виде

$$\ddot{x} + k_1\dot{x} + (\cos q_p + k_0)\,x = 0$$

Для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы k_0 было достаточно велико при определенных значениях q_p.

Рассмотрим теперь регулятор, не требующий вычисления $M_p(t)$, и, следовательно, не требующий знания точного вида уравнений динамики

$$M = -\gamma\,(K_0 x + K_1 y) \tag{2.2}$$

Теорема 2.2. Для любой ε-трубки ($\varepsilon > 0$) программного пути $(q_p(t))$, $(\dot{q}_p(t))$ движение системы (1.1), (2.2) будет находиться на ней $\forall t \geq 0$ при всех достаточно больших $\gamma > 0$ и при условии, что начальное рассогласование $|x(0)| + |y(0)|$ достаточно мало. Если же начальное рассогласование не мало, то для $\forall t_0 > 0$ существует $\gamma^* > 0$ такое, что при всех $\gamma > \gamma^*$ движение будет находиться в ε-трубке при $t \geq t_0$.

Доказательство. Запишем замкнутую систему в отклонениях

$$\dot{x} = y$$

$$\mu\dot{y} = -\mu\ddot{q}_p + A^{-1}(x+q_p)\,[-K_0x - K_1y - \mu b(x+q_p,\ y+\dot{q}_p)]\ (\mu := 1/\gamma)$$

Вырожденная система при $\mu = 0$ запишется в виде $\dot{x} = y$, $0 = A^{-1}(x + q_p)(-K_0x - K_1y)$, что равносильно уравнению $\dot{x} = -\varkappa^{-1}K_1^{-1}K_0x$. Ясно, что оно имеет тривиальное решение $x = 0$, т. е. $q = q_p(t)$.

Условие применимости теоремы [21] на полубесконечном интервале времени подтверждается следующей выкладкой:

$$\check{A}(t) := (f_x - f_y g_y^{-1} g_x)\Big|_{\substack{\mu=0\\ x(t)=0\\ y(t)=0}} = 0 - E(-A^{-1}K_1)^{-1}(-A^{-1}K_0) = -K_1^{-1}K_0$$

$$f(t,\ x,\ y,\ \mu) = y$$

$$g(t, x, y, \mu) = -\mu\ddot{q}_p + A^{-1}(x+q_p)\,[-K_0x - K_1y - \mu b(x+q_p,\ y+\dot{q}_p)]$$

Ясно, что $\check{A}(t)$ — гурвицева матрица.

Другое условие применимости теоремы [21] вытекает из применения следующей простой леммы.

Лемма. Собственные числа матрицы $-BK$, где B — положительно-определенная симметричная вещественная матрица, а $K = \operatorname{diag}\{k_1, \ldots, k_n\}$ диагональная матрица с положительными элементами на диагонали, есть отрицательные числа.

Доказательство леммы. Рассмотрим уравнение относительно λ:

$$\det(-BK - \lambda E) = 0 \tag{2.3}$$

Оно равносильно уравнению $\det(-BK^{1/2} - \lambda K^{-1/2}) = 0$, которое в свою очередь равносильно уравнению

$$\det(-K^{1/2}BK^{1/2} - \lambda E) = 0 \tag{2.4}$$

$$K^{1/2} = \operatorname{diag}\{k_1^{1/2}, \ldots, k_n^{1/2}\},\ K^{-1/2} = \operatorname{diag}\{k_1^{-1/2}, \ldots, k_n^{-1/2}\}$$

Докажем, что $K^{1/2}BK^{1/2}$ — положительно определенная матрица. Запишем ее поэлементно

$$\left\|\begin{matrix} k_1^{1/2}b_{11}k_1^{1/2} & k_2^{1/2}b_{12}k_1^{1/2} & \ldots & k_n^{1/2}b_{1n}k_1^{1/2} \\ k_1^{1/2}b_{21}k_2^{1/2} & k_2^{1/2}b_{22}k_{12}^{1/2} & \ldots & k_n^{1/2}b_{2n}k_2^{1/2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_1^{1/2}b_{n1}k_n^{1/2} & k_2^{1/2}b_{n2}k_n^{1/2} & \ldots & k_n^{1/2}b_{nn}k_n^{1/2} \end{matrix}\right\|$$

Используя предположение о положительности главных миноров матрицы B, легко получим, что все главные диагональные миноры $K^{1/2}BK^{1/2}$ положительны, и, следовательно, по критерию Сильвестра матрица $K^{1/2}BK^{1/2}$ положительно определенная. Отсюда имеем, что все корни уравнения (2.4) отрицательны. Доказательство леммы и теоремы окончено.

Примечание 1. Результат также верен, если в левую часть уравнения (1.1) входит ограниченная помеха.

Примечание 2. Поскольку с уменьшением μ, с такой же скоростью (линейно) уменьшается разность между решениями вырожденной и исходной систем, то управление M будет ограниченным при росте γ (при условии достаточной малости начального рассогласования).

3. Стабилизация программного пути робота с абсолютно жесткими звеньями, управляемого электродвигателями постоянного тока с независимым возбуждением. Рассмотрим регулятор

$$U = U_p(t) - \gamma(K_0x + \varkappa K_1y) \tag{3.1}$$

Теорема 3.1. Замкнутая система (1.1), (1.2), (3.1) является равномерно асимптотически устойчивой по отношению к переменным x, y, z при всех достаточно больших γ, $\varkappa$ и всех достаточно малых T_a.

Доказательство. В переменных $\mathbf{z} = \mathbf{M} - \mathbf{M}_p$, x, y система записывается в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{y},\ \dot{\mathbf{y}} = -\ddot{\mathbf{q}}_p + A^{-1}(\mathbf{x} + \mathbf{q}_p)(\mathbf{z} + \mathbf{M}_p - \mathbf{b}(\mathbf{x} + \mathbf{q}_p, \mathbf{y} + \dot{\mathbf{q}}_p))$$

$$T_a\dot{\mathbf{z}} = -\mathbf{z} - R\mathbf{y} - \gamma(K_0\mathbf{x} - \varkappa K_1\mathbf{y})$$

Поскольку T_a весьма мала, то можно применить теорему об устойчивости систем сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений [22]. Вырожденная система при $T_a = 0$ запишется в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{y}$$

$$\dot{\mathbf{y}} = -\ddot{\mathbf{q}}_p + A^{-1}(\mathbf{x} + \mathbf{q}_p)(-\gamma K_0\mathbf{x} - (\gamma\varkappa K_1 + R)\mathbf{y} + \mathbf{M}_p - \mathbf{b}(\mathbf{x} + \mathbf{q}_p, \mathbf{y} + \dot{\mathbf{q}}_p))$$

Повторяя рассуждения теоремы 2.1, получим, что последняя система равномерно асимптотически устойчива. Следовательно, и исходная система равномерно асимптотически устойчива.

Отметим, что рассмотренный регулятор для электромеханической системы (1.1), (1.2) проще в реализации, чем описанный формулой (1.16) из [25, часть II], либо формулой (3.12б) из [1].

Рассмотрим теперь регулятор, не требующий для реализации знания точного вида уравнений динамики

$$\mathbf{U} = -\gamma(K_0\mathbf{x} + K_1\mathbf{y}) \tag{3.2}$$

Теорема 3.2. Пусть Re Spectra $A^{-1}(\mathbf{q}) > \mathrm{const} > 0$ $\forall\mathbf{q} \in R^n$. Тогда $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ $\exists\gamma^* > 0$ $\exists t_a^* > 0$ такие, что, если норма начального рассогласования $|\mathbf{x}(0)| + |\mathbf{y}(0)| + |\mathbf{z}(0)| < \delta$ и $\gamma > \gamma^*$, $t_{a_{ii}} < t_a^*$, то вектор $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{M})$ будет находиться внутри ε-трубки вектора $(\mathbf{q}_p(t), \dot{\mathbf{q}}_p(t), \mathbf{M}_p(t))$ при $t \in [0, \infty)$. Если же начальное рассогласование не является малым, то вектор $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{M})$ будет находиться в ε-трубке программного движения при $t \in [t_0, \infty)$, $t_0 > 0$. За счет увеличения коэффициента усиления γ и уменьшения постоянных времени T_a время переходного процесса t_0 можно сделать сколь угодно малым.

Доказательство может быть проведено по аналогии с доказательством теоремы 3.1 двухкратным применением по малым параметрам $1/\gamma$, T_a теории сингулярных возмущений для бесконечного интервала времени [21] (несколько ослабленный вариант этой теории для случая, когда малый параметр не входит в правую часть дифференциальных уравнений см. в [26]).

4. Стабилизация программного пути упругого робота, управляемого электроприводами при доступности измерения моментов в шарнирах. Рассмотрим регулятор

$$\mathbf{W} = -\upsilon[\gamma(K_0\mathbf{x} + \varkappa K_1\mathbf{y}) + K_2(\mathbf{M} - \mathbf{M}_p(t))] + \mathbf{W}_p(t) \tag{4.1}$$

где K_i — диагональные матрицы с положительными коэффициентами на диагонали, υ, γ, $\varkappa \gg 0$.

Теорема 4.1. Пусть матрица $R_{ct}^{-1}K_2$ — гурвицева. Тогда при всех достаточно больших υ, γ, $\varkappa > 0$ замкнутая система (1.1), (1.3), (1.6), (4.1) равномерно асимптотически устойчива по отношению к переменным x, y, z.

Доказательство. Запишем замкнутую систему в отклонениях

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{y},\ \dot{\mathbf{y}} = -\ddot{\mathbf{q}}_p + A^{-1}(\mathbf{x} + \mathbf{q}_p)(\mathbf{z} + \mathbf{M}_p - \mathbf{b}(\mathbf{x} + \mathbf{q}_p, \mathbf{y} + \dot{\mathbf{q}}_p))$$

$$R_{ct}\dot{\mathbf{M}} + \mathbf{M} + R\dot{\mathbf{q}} = R_{ct}\dot{\mathbf{M}}_p + \mathbf{M}_p + R\dot{\mathbf{q}}_p - \upsilon[\gamma(K_0\mathbf{x} + \varkappa K_1\mathbf{y}) + K_2(\mathbf{M} - \mathbf{M}_p(t))]$$

Последнее уравнение равносильно уравнению $R_{ct}\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{z} + R\mathbf{y} = -\upsilon[\gamma(K_0\mathbf{x} + \varkappa K_1\mathbf{y}) + K_2\mathbf{z}]$, а оно в свою очередь равносильно уравнению

$$\dot{\mathbf{z}} = -\upsilon\gamma R_{ct}^{-1}(K_0\mathbf{x} + \varkappa K_1\mathbf{y} + R\mathbf{y}/(\upsilon\gamma)) - R_{ct}^{-1}(\upsilon K_2 + E)\mathbf{z}$$

Укороченная система записывается в виде $\dot{z} = -R_{ct}^{-1}K_2 z$, а вырожденная система при $\upsilon = \infty$ записывается в форме

$$0 = -\gamma R_{ct}^{-1}(K_0 x + \varkappa K_1 y) - R_{ct}^{-1}K_2 z, \quad \dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -\ddot{q}_p + A^{-1}(x + q_p)\,[z + M_p - b(x + q_p, y + \dot{q}_p)]$$

Последняя равносильна системе

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -\ddot{q}_p + A^{-1}(x + q_p)\,[-\gamma K_2^{-1}(K_0 x + \varkappa K_1 y) + M_p(t) - b(x + q_p, y + \dot{q}_p)]$$

Получившаяся система по теореме 2.1 равномерно асимптотически устойчива. Доказательство окончено.

Если же точные уравнения системы неизвестны, то можно применять следующий регулятор[1]

$$W = -\upsilon K_2\,[M + \gamma(K_0\dot{x} + K_1 y)] \tag{4.2}$$

Теорема 3.2. Пусть Re Spectr $A^{-1}(q) > \text{const} > 0\ \forall q \in R^n$ и $-R_{ct}^{-1}K_2$ — гурвицева матрица. Тогда $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \exists\gamma^* > 0\ \exists\upsilon^* > 0$ такие, что, если норма начального рассогласования $|x(0)| + |y(0)| + |z(0)| < \delta$ и $\gamma > \gamma^*$, $\upsilon > \upsilon^*$, то вектор $(q, \dot{q}, M)$ будет находиться внутри ε-трубки вектора $(q_p(t), \dot{q}_p(t), M_p(t))$ при $t \in [0, \infty)$. Если же начальное рассогласование не является малым, то вектор $(q, \dot{q}, M)$ будет находиться в ε-трубке программного движения при $t \in [t_0, \infty)$, $t_0 > 0$. За счет увеличения коэффициентов усиления γ, υ время переходного процесса t_0 можно сделать сколь угодно малым.

Доказательство проводится применением теории сингулярных возмущений по малым параметрам $1/\upsilon$, $1/\gamma$.

5. Стабилизация программного пути упругого робота, управляемого электродвигателями при доступности измерения ускорений. Преобразуем уравнения (1.1), (1.3) таким образом, чтобы вектор $(q, \dot{q}, \ddot{q})$ был фазовым. Продифференцировав (1.1), получим

$$A(q)\dddot{q} + c(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \dot{M} \tag{5.1}$$

где функция $c(q, \dot{q}, \ddot{q})$ определяется очевидным образом. Уравнение (1.3) представим в виде

$$\dot{M} + R_{ct}^{-1}M + R_{ct}^{-1}R\dot{q} = \check{W} \tag{5.2}$$

где $\check{W} = R_{ct}^{-1}W$ — новое управление. Подставив (5.1) в (5.2) получим

$$A(q)\dddot{q} + d(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \check{W} \tag{5.3}$$

Функция $d(q, \dot{q}, \ddot{q})$ легко определяется по выражениям (1.1), (1.3) с помощью операций дифференцирования и алгебраических операций.

Определим программное напряжение

$$\check{W}_p(t) = A(q_p)\dddot{q}_p + d(q_p, \dot{q}_p, \ddot{q}_p) \tag{5.4}$$

Рассмотрим регулятор

$$\check{W} = -\gamma\varkappa K_2 Z - \gamma K_1 y - \gamma K_0 x + \check{W}_p(t) \tag{5.5}$$

где K_i — диагональные матрицы с положительными элементами на диагонали, γ, $\varkappa \gg 0$, $Z = \ddot{q} - \ddot{q}_p$.

Теорема 5.1. Замкнутая система (5.3), (5.5) равномерно асимптотически устойчива по отношению к переменным x, y, Z при всех достаточно больших γ, $\varkappa > 0$.

Доказательство. Запишем замкнутую систему в отклонениях

[1] Предложен автору для рассмотрения С. В. Гусевым.

$\dot{x} = y,\ \dot{y} = Z$

$\dot{Z} = -\dddot{q}_p(t) + A^{-1}(x + q_p(t))\,[-\gamma\varkappa K_2 Z - \gamma K_1 y - \gamma K_0 x + \check{W}_p(t) - d(q, \dot{q}, \ddot{q})]$

Разложим ее в ряд Тейлора

$\dot{x} = y,\ \dot{y} = Z$

$\dot{Z} = -\dddot{q}_p(t) + A^{-1}(q_p(t)) + A_q^{-1}(q_p(t))\,x + \ldots)\cdot$

$\cdot\,[-\gamma\varkappa K_2 Z - \gamma K_1 y - \gamma K_0 x + A(q_p(t))\,\dddot{q}_p(t) - d_q x - d_{\dot{q}} y - d_{\ddot{q}} Z - \ldots]$

Вырожденная система при $\gamma = \infty$ запишется в виде

$\dot{x} = y,\ \dot{y} = Z$

$0 = -\varkappa A^{-1} K_2 Z - A^{-1} K_1 y - A^{-1} K_0 x$

Она равносильна равномерно асимптотической устойчивой системе $\dot{x} = y$, $\dot{y} = (-K_2^{-1}K_0 x - K_2^{-1}K_1 y)/\varkappa$. Укороченная система есть $\dot{Z} = -\varkappa A^{-1}(q_p(t))\,K_2 Z$. При всех достаточно больших $\varkappa$ она равномерно асимптотически устойчива (смотри рассуждение в доказательстве теоремы 2.1). Доказательство окончено.

Рассмотрим теперь регулятор, не требующий для реализации знания уравнений динамики

$$\check{W} = -\gamma K_2 Z - \gamma K_1 y - \gamma K_0 x \tag{5.6}$$

Теорема 5.2. Для любой ε-трубки ($\varepsilon > 0$) программного пути $(q_p(t))$, $\dot{q}_p(t)$, $\ddot{q}_p(t))$ движение системы (5.3), (5.6) будет находиться в ней $\forall t \geq 0$ при всех достаточно больших $\gamma > 0$ и при условии, что начальное рассогласование $|x(0)| + |y(0)| + |Z(0)|$ достаточно мало. Если же начальное рассогласование не мало, то для $\forall t_0 > 0$ существует $\gamma^* > 0$ такое, что при всех $\gamma > \gamma^*$ движение будет находиться в ε-трубке при $t \geq t_0$.

Доказательство. Запишем замкнутую систему в отклонениях ($\mu = 1/\gamma$):

$\dot{x} = y,\ \dot{y} = Z$.

$\mu\dot{Z} = -\mu\dddot{q}_p + A^{-1}(x + q_p)\,[-K_0 x - K_1 y - K_2 Z - \mu d(x + q_p, y + \dot{q}_p, Z + \ddot{q}_p)]$

Вырожденная система при $\mu = 0$ запишется в виде

$\dot{x} = y,\ \dot{y} = Z$

$0 = A^{-1}(x + q_p)\,(-K_0 x - K_1 y - K_2 Z)$

Ясно, что оно имеет тривиальное решение $x = 0$, т. е. $q = q_p(t)$. Решение вырожденной системы близко к решению исходной. Доказательство окончено.

Отметим, что теорема 2 из статьи [21] позволяет исследовать области притяжения в изложенных теоремах. При наших предположениях области притяжения оказываются всем фазовым пространством R^{2n} (R^{3n} для упругого манипулятора с электроприводом). Однако ценность этого результата невелика, так как при большом отклонении требуемое управление станет слишком большим и физически нереализуемым. Если в какой-то момент времени t_x отклонение стало очень большим, то можно рекомендовать построить новый программный путь $q_{pn}(t)$, у которого $q_{pn}(t_x) = q(t_x)$, и начиная с некоторого момента времени t_y ($t_y > t_x$) новый программный путь должен совпадать со старым.

В реальной системе нельзя беспредельно увеличивать коэффициенты усиления, поскольку в измерениях фазовых координат есть шумы, и эти шумы будут умножаться на большие коэффициенты усиления; кроме того, большой коэффициент усиления по координатам может вызвать высокочастотные колебания, которые войдут в резонанс с неучитываемой здесь высокочастотной упругой динамикой.

Если известны параметры системы, то предпочтительнее применять регуляторы, основанные на решении обратной задачи динамики. Интуитивно ясно, что асимптотическая устойчивость лучше нахождения фазового вектора в малой окрестности желаемого пути.

Для стабилизации программного пути робота с абсолютно жесткими звеньями предложен также метод релейной обратной связи по скорости [27, 28], но он не обладает свойством асимптотической устойчивости по координатам, кроме того, применение непрерывных регуляторов представляется более естественным.

Для стабилизации программного пути робота, описываемого уравнениями (1.1), (1.2), предложен метод релейной обратной связи с измерением ускорений [29], в публикуемой работе рассмотрены непрерывные регуляторы как с измерением ускорений, так и с измерением моментов. Измерение моментов может быть выполнено с помощью измерения сил тока в электродвигателях или с помощью тензодатчиков.

Вопросы динамики и управления с гашением колебаний упругого манипулятора рассмотрены в [30], там же приведена обширная библиография. Целью же данной работы является синтез стабилизирующих законов управления, построенных по принципу обратной связи.

Выражаю глубокую благодарность С. В. Гусеву за полезные обсуждения этой статьи.

Работа выполнена при поддержке Госкомвуза России, грант ПГ-26 за 1993 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тимофеев А. В.* Управление роботами. Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. 240 с.
2. *Paul R. P.* Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control. 2nd edition. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1982. Рус. перев.: Пол Р. Моделирование, планирование траекторий и управление движением робота-манипулятора. М.: Наука, 1976. 103 с.
3. *Аксенов Г. С., Фомин В. Н.* К задаче об адаптивном управлении манипулятором//Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М.: АН СССР. Научн. совет по компл. пробл. «Кибернетика», 1976. С. 164—168.
4. *Гусев С. В., Якубович В. А.* Алгоритм адаптивного управления роботом-манипулятором//Автоматика и телемеханика. 1980. № 9. С. 101—111.
5. *Gusev S. V.* Linear stabilization of nonlinear system program motion//Syst. Contr. Lett. 1988. V. 11. № 5. P. 409—412.
6. *Wen J. T., Bayard D. S.* New class of control law for robotics manipulators. I//Intern. J. Contr. 1988. V. 47. № 5. P. 1361—1385.
7. *Paden B., Panja R.* Globally asymptotically stable «PD+» controller for robot manipulators//Intern. J. Contr. 1988. V. 47. № 6. P. 1697—1712.
8. *An C. H., Atkeson C. G., Griffiths J. D.* Experimental determination of the effect of feedforward control on trajectory tracking error//IEEE Intern. Conf. Rob. Automat. N.-Y.: IEEE Press, 1986. P. 55—60.
9. *An C. H., Atkeson C. G., Griffiths J. D., Hollerbach L. M.* Experimental evaluation of feedforward and computed-torque control//IEEE Intern. Conf. Rob. Automat. (Washington). N.-Y.: IEEE Press, 1987. V. 1. P. 165—168.
10. *Khalil W., Liegeois A., Fournier A.* Commande dynamique de robots//RAIRO Autom., Syst. Anal. et Control. 1979. V. 13. № 2. P. 189—201.
11. *Liegeois A., Fournier A., Aldon M.* Model reference control of high-velocity industrial robot//Proc. Joint Automatic Contr. Conf. (San Francisco) 1980. V. 2. P. 13—15.
12. *Kokotovic P. V.* Applications of singular perturbation techniques to control problems//SIAM Rev. 1984. V. 26. № 4. P. 501—550.
13. *Saksena V. R., O'Reilly J., Kokotovic P. V.* Singular perturbations and time — scale methods in control theory: survey 1976—1983//Automatica. 1984. V. 20. № 3. P. 273—293.
14. *Охоцимский Д. Е., Платонов А. К., Кирильченко А. А., Лапшин В. В.* Шагающие машины. М., 1989. 36 с. (Препринт Ин-та прикл. математики АН СССР. № 87).

15. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* О некоторых результатах теории сингулярных возмущений за последние пять лет//Вестн. МГУ. Сер. 15. 1981. № 3. С. 25—35.
16. *Васильева А. Б., Дмитриев М. Г.* Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления//Итоги науки и техники. Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1982. Т. 20. С. 3—78.
17. *Уткин В. И.* Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981. 367 с.
18. *Aeyels D.* Local and global stabilizability for nonlinear systems//Theory and Applications of Nonlinear Control Systems. Amsterdam: North-Holland, 1986. P. 93—105.
19. *Byrnes C. I., Isidory A.* Asymptotic expansions, root-loci and global stability of nonlinear feedback systems//Algebraic and Geometric Methods in Nonlinear Control Theory. Dordrecht: D. Reidel, 1986. P. 159—179.
20. *Knobloch H. W.* Stabilization of control systems by means of high-gain feedback//Optimal Control Theory and Economic Analysis 3. Amsterdam: North — Holland, 1988. P. 153—173.
21. *Hoppensteadt F.* Asymptotic stability in singular perturbation problems. II//J. Different. Equat. 1974. V. 15. № 3. P. 510—521.
22. *Климушев А. И.* Устойчивость по первому приближению нелинейных систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных//Тр. Урал. политехн. ин-та. 1973. № 211. С. 44—54.
23. *Бурков И. В., Заремба А. Т.* Динамика упругого манипулятора с электроприводом//Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 1. С. 57—64.
24. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
25. *Крутько П. Д., Лакота Н. А.* Метод обратных задач динамики в теории конструирования алгоритмов управления манипуляционных роботов I, II//Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1987. № 3. С. 82—91; № 4. С. 190—199.
26. *Бутузов В. Ф.* Асимптотические формулы для решения системы дифференциальных уравнений с малым параметром при производной на полубесконечном промежутке//Вестн. МГУ. Сер. 1. 1963. № 4. С. 3—14.
27. Синтез систем управления манипуляционными роботами на принципе декомпозиции/Под. ред. Е. С. Пятницкого и А. П. Молчанова. М.: Ин-т проблем управления, 1987. 59 с.
28. *Пятницкий Е. С.* Синтез иерархических систем управления механическими и электромеханическими объектами на принципе декомпозиции//Автоматика и телемеханика. 1989. № 1. С. 87—98.
29. *Матюхин В. И., Пятницкий Е. С.* Управление движением манипуляционных роботов на принципе декомпозиции при учете динамики приводов//Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 67—81.
30. *Черноусько Ф. Л., Болотник Н. Н., Градецкий В. Г.* Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация. М.: Наука, 1989. 363 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
5.II.1993