

УДК 531.391

© 1995 г. В. В. СИДОРЕНКО

## О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ГИБКИМИ СТЕРЖНЯМИ, ДОПУСКАЮЩЕГО ГРУППУ СИММЕТРИЙ

Изучается вращательное движение твердого тела, несущего вязкоупругие нерастяжимые стержни. Предполагается, что в недеформированном состоянии рассматриваемая механическая система допускает группу симметрий правильного многогранника. Установлены существенные отличия вращательного движения такой системы от движения Эйлера — Пуансо. Отличия вызваны влиянием упругости стержней и высокой степенью симметрии системы. Проведено качественное исследование эволюции вращений, выделены возможные стационарные режимы.

**1. Описание механической системы.** Система состоит из  $N$  одинаковых вязкоупругих стержней длины  $L$ , прикрепленных к жесткому однородному шару радиуса  $R$ , причем центр шара  $O$  является неподвижной точкой системы. В недеформированном состоянии стержни направлены вдоль лучей, идущих из точки  $O$  в вершины вписанного в шар правильного многогранника. Преобразования из группы симметрий данного многогранника переводят такую механическую систему в себя.

В недеформированном состоянии тензор инерции системы шаровой: осевые моменты инерции имеют некоторую величину  $J_0$  независимо от выбора оси. При вращении системы из-за деформации стержней центробежными силами тензор инерции изменяется.

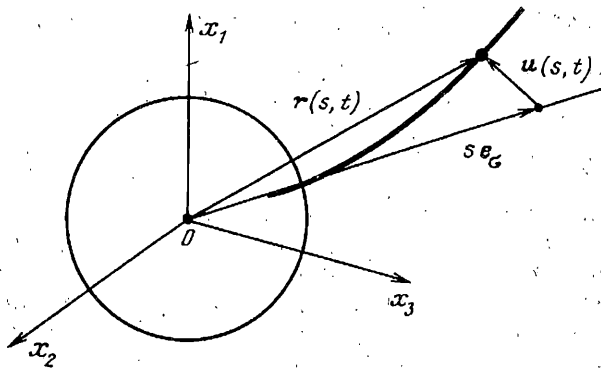
Основная цель работы заключается в исследовании влияния нежесткости системы на эволюцию ее вращательного движения.

**2. Уравнения движения системы.** Введем некоторую нумерацию стержней  $\{\sigma\}_1^N$ . Общее количество стержней  $N$  совпадает с числом вершин правильного многогранника и равно 4, 6, 8, 12 или 20 в зависимости от типа многогранника (тетраэдр, октаэдр, куб, икосаэдр или додекаэдр). В связанной с шаром системе координат  $Ox_1x_2x_3$  положение точек стержня под номером  $\sigma$  задается радиусом-вектором

$$\mathbf{r}_\sigma = s\mathbf{e}_\sigma + \mathbf{u}_\sigma(s, t)$$

Здесь  $\mathbf{e}_\sigma$  — единичный вектор, направленный из центра многогранника в вершину  $\sigma$ ,  $s$  — модуль радиуса-вектора точки стержня в недеформированном состоянии ( $R \leq s \leq R + L$ ),  $\mathbf{u}_\sigma$  — вектор смещения при изгибе (фиг. 1). Продольная компонента смещения  $v_\sigma = v_\sigma \mathbf{e}_\sigma = (\mathbf{u}_\sigma, \mathbf{e}_\sigma) \mathbf{e}_\sigma$  связана с поперечным смещением  $\mathbf{w}_\sigma = \mathbf{u}_\sigma - v_\sigma \mathbf{e}_\sigma$  соотношением  $2(\text{del } \sigma / \partial s) = -|\partial \mathbf{w}_\sigma / \partial s|^2$ , вытекающим из условия нерастяжимости стержня.

Будем предполагать, что стержни достаточно жесткие, а их собственные упругие колебания быстро затухают. Так будет, если параметры системы удовлетворяют условию  $\beta \ll \chi \ll 1$ ,  $\beta = \rho L^4 / (AT_*^2)$ ,  $\chi = \mu / T_*^2$ . Здесь  $\rho$  — погонная плотность стержней,  $A$  — изгибная жесткость,  $\mu$  — коэффициент, характеризующий диссипацию энергии при изгибных колебаниях стержня,  $T_*$  — характерное время во вращательном движении системы.



Фиг. 1

В рамках линейной теории вязкоупругих стержней поперечные колебания описываются уравнением [1]:

$$\begin{aligned} \partial^2 w_\sigma / \partial t^2 - 1/2 [\omega^2 - (\mathbf{e}_\sigma, \boldsymbol{\omega})^2] \partial / \partial s [(R + L)^2 - s^2] \partial w_\sigma / \partial s + \\ + \beta^{-1} (1 + \chi \partial / \partial t) \partial^4 w_\sigma / \partial s^4 = W_\sigma \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\boldsymbol{\omega}$  — угловая скорость вращения шара,  $\omega^2 = |\boldsymbol{\omega}|^2$ . В уравнении (2.1) в качестве масштаба длины взята длина стержня  $L$ , в качестве масштаба времени используется время  $T_*$ , а масштаб масс выбран таким образом, что  $\rho = 1$ .

Распределенная сила  $W_\sigma$  представляет поперечную компоненту силы инерции  $F_\sigma$ , действующей на элементы стержня в неинерциальной системе координат  $Ox_1x_2x_3$ .

Вектор смещения удовлетворяет условиям жесткой заделки

$$v_\sigma(R, t) = w_\sigma(R, t) = \partial w_\sigma / \partial s (R, t) = 0 \quad (2.2)$$

и динамическим граничным условиям

$$(1 + \chi \partial / \partial t) \partial^2 w_\sigma / \partial s^2 (R + L, t) = (1 + \chi \partial / \partial t) \partial^2 w_\sigma / \partial s^2 = 0 \quad (2.3)$$

на свободном конце.

Вращательное движение системы описывается уравнением моментов, которое в отсутствие внешних воздействий в связанной системе координат имеет вид

$$\mathbf{G} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G} = 0 \quad (2.4)$$

В формуле (2.4)  $\mathbf{G}$  — полный кинетический момент системы, вычисляемый по формуле

$$\mathbf{G} = J_0 \boldsymbol{\omega} + \sum_{\sigma=1}^N \int_R^{R+L} [\mathbf{u}_\sigma \times (\boldsymbol{\omega} \times s \mathbf{e}_\sigma) + \mathbf{r}_\sigma \times (\mathbf{u}_\sigma + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_\sigma)] ds \quad (2.5)$$

При изучении вращательного движения твердого тела с вязкоупругими стержнями необходимо совместное рассмотрение системы уравнений (2.1), (2.4) с граничными условиями (2.2), (2.3).

3. Установившееся движение системы. Движение системы после затухания собственных колебаний стержней будем называть установившимся. При условии  $\beta \ll \chi \ll 1$  изгибные смещения в установившемся движении можно представить в виде двойного ряда [2, 3]:

$$\mathbf{u}_\sigma(s, \boldsymbol{\omega}) = \beta [\mathbf{u}_\sigma^{(0)}(s, \boldsymbol{\omega}) + \chi \mathbf{u}_\sigma^{(1)}(s, \boldsymbol{\omega}) + \dots] + \dots \quad (3.1)$$

Для  $\mathbf{u}_\sigma^{(0)}$  при подстановке выражения (3.1) в (2.1) — (2.3) получим краевую задачу

$$d^4 \mathbf{u}_\sigma^{(0)} / ds^4 + s (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_\sigma) [\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_\sigma) \mathbf{e}_\sigma] = 0$$

$$u_{\sigma}^{(0)}(R) = du_{\sigma}^{(0)}/ds(R) = d^2u_{\sigma}^{(0)}/ds^2(R+L) = d^3u_{\sigma}^{(0)}/ds^3(R+L) = 0$$

Легко проверить, что решением данной краевой задачи будет

$$u_{\sigma}^{(0)}(s, \omega) = -\psi(s)(\omega, e_{\sigma})[\omega - (\omega, e_{\sigma})e_{\sigma}]$$

где функция  $\psi(s)$  является решением краевой задачи  $d^4\psi/ds^4 = s$ ,  $\psi(R) = d\psi/ds(R) = d^2\psi/ds^2(R+L) = d^3\psi/ds^3(R+L) = 0$  [3].

Аналогичные краевые задачи для последующих членов ряда (3.1) дают  $u_{\sigma}^{(j)} \equiv 0$  ( $j = 1, 2, \dots$ ). Поэтому с погрешностью, не превосходящей  $O(\beta^2)$ , для вектора смещений справедливо приближенное выражение  $u_{\sigma} = \beta u_{\sigma}^{(0)}$ .

Полученное приближенное выражение для упругих смещений позволяет вычислить кинетический момент в установившемся движении по формуле (2.5). Пренебрегая величинами  $O(\beta^2)$ , результат запишем в виде суммы

$$G(\omega) = J_0\omega + \beta G^{(1)}(\omega) \quad (3.2)$$

$$G^{(1)}(\omega) = d_1 \sum_{\sigma=1}^N \{(\omega, e_{\sigma})[\omega^2 - 2(\omega, e_{\sigma})^2]e_{\sigma} + (\omega, e_{\sigma})^2\omega\} \quad (3.3)$$

$$d_1 = \int_R^{R+L} s\psi(s) ds$$

Подстановка выражения (3.2) в уравнение моментов (2.4) приводит к уравнению относительно  $\omega$ , приближенно описывающему эволюцию вращательного движения тела со стержнями:

$$G = \beta G^{(1)} \times \omega \quad (3.4)$$

Вместе с соотношениями (3.1) уравнение (3.4) определяет в фазовом пространстве рассматриваемой механической системы интегральное многообразие установившихся движений.

Уравнение (3.4) допускает интегралы

$$H(\omega) = \frac{J_0\omega^2}{2} + \frac{3\beta d_1}{2} \sum_{\sigma=1}^N (\omega, e_{\sigma})^2 [\omega^2 - (\omega, e_{\sigma})^2]$$

$$G^2(\omega) = |G|^2 = J_0^2\omega^2 + 2\beta J_0(G^{(1)}(\omega), \omega) + O(\beta^2)$$

Функция  $H(\omega)$  дает значение полной энергии системы в установившемся движении с точностью  $O(\beta^2)$ . Поэтому будем называть  $H(\omega)$  интегралом энергии. Наличие интеграла энергии означает, что приближение, использующее только линейные по  $\beta$  члены ряда (3.1), носит консервативный характер и не выявляет во вращательном движении вековые эффекты, обусловленные диссипацией энергии в материале стержней.

Интеграл  $G^2(\omega)$  указывает на постоянство полного кинетического момента тела со стержнями.

4. Вспомогательные функциональные соотношения. Прежде чем продолжить анализ движения системы, отметим некоторые полезные функциональные соотношения. Введем в рассмотрение функции,

$$\Phi_n(x) = \sum_{\sigma=1}^N (e_{\sigma}, x)^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Для линейного ортогонального преобразования  $S$ , принадлежащего допустимой недеформированной системой группе симметрий, справедливо:  $\Phi_n(Sx) = \Phi_n(x)$ . По теореме о полиномиальных инвариантах дискретных групп функция  $\Phi_n(x)$  может быть представлена в виде  $\Phi_n(x) = P(I_1, I_2, I_3)$ , где  $I_1(x)$ ,  $I_2(x)$ ,  $I_3(x)$  — полиномиальные инварианты группы симметрий, а  $P$  — многочлен от  $I_1, I_2, I_3$  [4, 5].

Явные выражения для полиномиальных инвариантов определяются типом группы симметрий. Для группы тетраэдра базисными полиномиальными инвариантами могут быть:  $I_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ ,  $I_2 = x_1x_2x_3$ ,  $I_3 = x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2$ . (Координатные оси в  $\mathbb{R}^3$  перпендикулярны ребрам тетраэдра.) Для группы октаэдра  $I_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ ,  $I_2 = x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2$ ,  $I_3 = x_1^2x_2^2x_3^2$ . (Координатные оси проходят через противоположные вершины октаэдра.)

Наконец, для группы икосаэдра (координатные оси перпендикулярны ребрам икосаэдра):

$$I_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$I_2 = \frac{1}{10\sqrt{5}} [8x_1^2x_2^2x_3^2 - (\sqrt{5} + 1)(x_1^2x_3^4 + x_1^4x_2^2 + x_2^4x_3^2) + (\sqrt{5} - 1)(x_1^2x_2^4 + x_1^4x_3^2 + x_2^2x_3^4)]$$

Полиномиальный инвариант  $I_3$  группы икосаэдра, являющийся полиномом десятой степени от компонент вектора  $x$ , пропорционален произведению линейных функций, принимающих значения  $\pm 1$  в центрах граней икосаэдра.

Пяти правильным многогранникам соответствуют только три группы симметрий, так как у двойственных многогранников (куба и октаэдра, додекаэдра и икосаэдра) группы симметрий совпадают.

С помощью элементарных вычислений найдем:  $\Phi_1(x) = 4/3 I_1$ ,  $\Phi_2(x) = 4/9 I_1^2 + 16/9 I_3$  (тетраэдр,  $N = 4$ );  $\Phi_1(x) = 2I_1$ ,  $\Phi_2(x) = 2I_1^2 - 4I_2$  (октаэдр,  $N = 6$ );  $\Phi_1(x) = 8/3 I_1$ ,  $\Phi_2(x) = 8/9 I_1^2 + 32/9 I_2$  (куб,  $N = 8$ );  $\Phi_1(x) = 4I_1$ ,  $\Phi_2(x) = 12/5 I_1^2$ ,  $\Phi_3(x) = 8/5 I_1^3 - 12\sqrt{5} I_2$  (икосаэдр,  $N = 12$ );  $\Phi_1(x) = 20/3 I_1$ ,  $\Phi_2(x) = 4I_1^2$ ,  $\Phi_3(x) = 80/27 I_1^3 + (100\sqrt{5}/9) I_2$  (додекаэдр,  $N = 20$ ).

5. Движение шара со стержнями, направленными в вершины тетраэдра, куба или октаэдра. Исследование начнем со случая, когда стержни направлены в вершины правильного тетраэдра. Предварительно преобразуем выражение для  $G^{(1)}(\omega)$ :

$$G^{(1)} = d_1 \sum_{\sigma=1}^4 [\omega^2 (\omega, e_\sigma) e_\sigma - 2 (\omega, e_\sigma)^3 e_\sigma + (\omega, e_\sigma)^2 \omega] =$$

$$= d_1 \left( \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \omega} - \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \omega} + \Phi_1 \omega \right) = \frac{8d_1}{9} \left( 2\omega^2 \omega - \frac{\partial I_3}{\partial \omega} \right)$$

Это позволяет привести уравнение (3.4) к виду

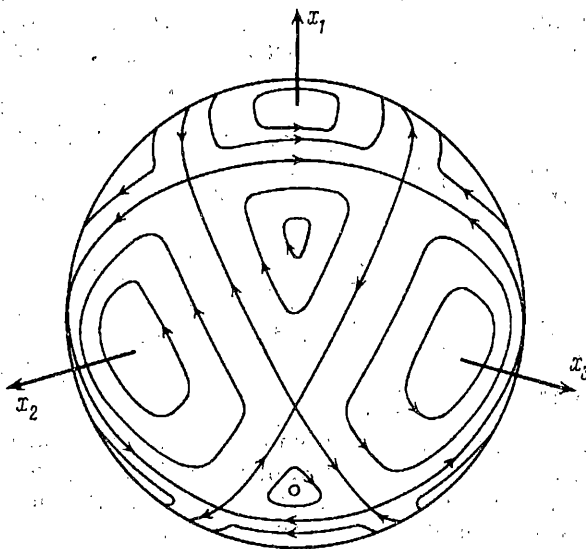
$$G \cdot = - \frac{8\beta d_1}{9} \frac{\partial I_3}{\partial \omega} \times \omega \tag{5.1}$$

или (в скалярной записи)  $G_1 \cdot = \beta d_0 \omega_2 \omega_3 (\omega_2^2 - \omega_3^2)$ ,  $G_2 \cdot = \beta d_0 \omega_1 \omega_3 (\omega_3^2 - \omega_1^2)$ ,  $G_3 \cdot = \beta d_0 \omega_1 \omega_2 (\omega_1^2 - \omega_2^2)$ ,  $G_i = J_0 \omega_i + \beta d_0 \omega_i^3$ ,  $d_0 = 16d_1/9$ . Оси связанной системы координат перпендикулярны ребрам тетраэдра, определяющего размещение стержней.

Изучим стационарные решения, допускаемые уравнением установившегося движения (5.1). Как показывает анализ, такие решения объединяются в три семейства. Первое семейство решений

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \pm \omega_* \tag{5.2}$$

Здесь  $\omega_*$  — абсолютная величина угловой скорости. Невыписанные решения получаются циклической перестановкой индексов 1, 2, 3. Семейство образовано стационарными вращениями вокруг осей, проходящих через середины противоположных ребер тетраэдра.



Фиг. 2

Решения второго семейства

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \pm \omega_*/\sqrt{2}, \quad \omega_3 = \pm \omega_*/\sqrt{2} \quad (5.3)$$

отвечают вращениям вокруг осей, перпендикулярных плоскостям симметрии тетраэдра:

Третье семейство решений

$$\omega_1 = \pm \omega_*/\sqrt{3}, \quad \omega_2 = \pm \omega_*/\sqrt{3}, \quad \omega_3 = \pm \omega_*/\sqrt{3} \quad (5.4)$$

соответствует вращениям вокруг осей, проходящих через вершину тетраэдра и центр противоположной грани.

Анализ линеаризованных в окрестности стационарных решений уравнений движения показывает, что вращения (5.2) и (5.4) устойчивы, а вращения (5.3) неустойчивы. Движение в окрестности устойчивых вращений носит характер регулярной прецессии с периодом  $T' = 2\pi J_0 / (\beta d_0 \omega_*^3)$  для семейства (5.2) и с периодом  $T'' = 3\pi J_0 / \beta d_0 \omega_*^3$  для семейства (5.4).

Качественное представление об эволюции вращательного движения дает след вектора  $\omega$  на поверхности уровня интеграла  $G^2(\omega)$  (фиг. 2). Проходящие через неустойчивые вращения (5.3) сепаратрисы разбивают поверхность на шесть четырехугольных и восемь треугольных областей. Центрами областей являются устойчивые вращения (5.2) и (5.4) соответственно. Следует отметить типичность такой картины движения для упругого тела с симметрией тетраэдра или куба [6; 7].

Остановимся на вековых эффектах в эволюции вращений шара со стержнями, обусловленных диссипацией энергии в материале стержней.

Предварительно установим, что при фиксированной величине вектора кинетического момента энергия изучаемой механической системы достигает наименьшего и наибольшего значения на вращениях (5.2) и (5.4). Для доказательства рассмотрим функцию  $Q(\omega) = H(\omega) - G^2(\omega)/2J_0 = -1/4\beta d_0(\omega_1^4 + \omega_2^4 + \omega_3^4) + O(\beta^2)$ .

Характер критических точек функций  $H(\omega)$  и  $O(\omega)$  на поверхности уровня интеграла  $G^2(\omega)$  совпадает. С другой стороны, значения функции  $Q(\omega)$  при условии  $G^2(\omega) = g_0$  и при условии  $\omega^2 = (g_0/J_0^2)$  отличаются на величину порядка

$\beta^2$ . Поэтому для завершения доказательства сделанного утверждения достаточно сравнить значения  $O(\omega)$  на решениях (5.2) и (5.4) при условии  $\omega^2 = (g_0/J_0^2)$ .

Таким образом, установленная в консервативном приближении устойчивость вращений (5.4) носит гироскопический характер и разрушается под влиянием диссипации. Напротив, устойчивость вращений (5.6) усиливается до асимптотической.

Аналогичным образом было исследовано движение шара со стержнями, направленными в вершины куба или октаэдра. Оказалось, что устойчивыми в консервативном приближении стационарными движениями будут вращения вокруг осей, проходящих через противоположные вершины или через центры противоположных граней многогранника, определяющего размещение стержней. Влияние диссипации устойчивость первого вида вращений разрушит, а устойчивость вращений второго типа усилит до асимптотической. Вращения вокруг осей, проходящих через середины противоположных ребер, образуют семейство неустойчивых стационарных движений. Других стационарных движений при  $\beta \ll 1$  нет.

6. Движение шара со стержнями, направленными в вершины икосаэдра или додекаэдра. В первом по  $\beta$  приближении теории возмущений кинетический момент шара со стержнями, направленными в вершины икосаэдра или додекаэдра, коллинеарен вектору угловой скорости  $\omega$  и эволюция вращения не выявляется. Формально это связано с отсутствием у группы симметрий икосаэдра нетривиального полиномиального инварианта четвертой степени.

Получим уравнения установившегося движения в этом случае, используя уточненное выражение для изгибных смещений

$$\begin{aligned} u_\sigma(s, \omega) &= \beta u_\sigma^{(10)}(s, \omega) + \beta^2 u_\sigma^{(20)}(s, \omega) = \\ &= -\beta \psi(\omega, e_\sigma) [\omega - (\omega, e_\sigma) e_\sigma] - \beta^2 (\omega, e_\sigma) \{ [\Psi_1 \omega^2 + (\Psi_3 - \Psi_2)(\omega, e_\sigma)^2] \omega + \\ &+ (\omega, e_\sigma) [(\Psi_3 - \Psi_1) \omega^2 - (\Psi_3 + \Psi_2 - \Psi_1)(\omega, e_\sigma)^2] e_\sigma \} \end{aligned} \quad (6.1)$$

Функция  $\Psi_1(s)$  в (6.1) является решением краевой задачи

$$d^4 \Psi_1 / ds^4 = d/ds [(R+L)^2/2 - s^2/2] d\psi/ds$$

$$\Psi_1(R) = d\Psi_1/ds(R) = d^2\Psi_1/ds^2(R+L) = d^3\Psi_1/ds^3(R+L) = 0$$

Функция  $\Psi_2(s)$  является решением краевой задачи  $d^4\Psi_2/ds^4 = \psi(s)$ ,  $\Psi_2(R) = d\Psi_2/ds(R) = d^2\Psi_2/ds^2(R+L) = d^3\Psi_2/ds^3(R+L) = 0$ , а функция

$$\Psi_3(s) = \frac{1}{2} \int_R^s (d\psi/d\xi)^2 d\xi$$

Погрешность уточненного выражения для изгибных смещений не превосходит  $O(\beta^3)$ .

Подставив (6.1) в (2.5), после надлежащих преобразований будем иметь

$$G(\omega) = J_0 \omega + \beta G^{(1)}(\omega) + \beta^2 G^{(2)}(\omega) + O(\beta^3) \quad (6.2)$$

где вектор-функция  $G^{(1)}(\omega)$  определена соотношением (3.3)

$$\begin{aligned} G^{(2)}(\omega) &= d_2 \sum_{\sigma=1}^N [2\omega^2 (\omega, e_\sigma)^3 e_\sigma - 3(\omega, e_\sigma)^5 e_\sigma + (\omega, e_\sigma)^4 \omega] + \\ &+ 6d_3 \sum_{\sigma=1}^N (\omega, e_\sigma)^2 [\omega^2 - (\omega, e_\sigma)^2] [(\omega, e_\sigma) e_\sigma - \omega] \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$d_2 = \int_R^{R+L} \psi^2(s) ds, \quad d_3 = -\frac{1}{2} \int_R^{R+L} s \Psi_1(s) ds = \int_R^{R+L} s \Psi_3(s) ds$$

В формулах (3.3), (6.3) фигурируют выражения вида

$$\sum_{\sigma=1}^N \omega^{2k} (\omega, e_{\sigma})^{2l-1} e_{\sigma} = \frac{\omega^{2k}}{2l} \frac{\partial \Phi_l}{\partial \omega}, \quad \sum_{\sigma=1}^N \omega^{2k} (\omega, e_{\sigma})^{2m} \omega = \omega^{2k} \Phi_m \omega$$

( $k=0, 1; l=1, 2, 3; m=1, 2; 2 \leq k+l \leq 3, 1 \leq k+m \leq 3$ )

Принимая во внимание приведенные в п. 4 представления функций  $\Phi_l$  через полиномиальные инварианты группы симметрий икосаэдра, перепишем (6.2) следующим образом:

$$\mathbf{G}(\omega) = J_0 \omega + \beta \alpha \omega^2 \omega + \beta^2 \left[ b_1 \omega^4 \omega + b_2 \frac{\partial I_2}{\partial \omega} \right] + O(\beta^3) \quad (6.4)$$

$$a = 2d_1 (c_1^{(1)} - c_1^{(2)}), \quad b_1 = 3d_2 (c_1^{(2)} - c_1^{(3)}) + 6d_3 (2c_1^{(2)} - c_1^{(1)} - c_1^{(3)})$$

$$b_2 = -1/2 c_2^{(3)} (d_2 + 2d_3)$$

Здесь  $c_i^{(k)}$  — коэффициент при полиномиальном инварианте  $I_i$  в выражении для функции  $\Phi_k(\omega)$ .

Приближенное выражение для вектора кинетического момента (6.4) подставим в (2.4) и получим уравнение, описывающее установившееся движение шара со стержнями, направленными в вершины икосаэдра или додекаэдра:

$$\mathbf{G} = \beta^2 b_2 \frac{\partial I_2}{\partial \omega} \times \omega. \quad (6.5)$$

Уравнение (6.5) допускает два независимых интеграла

$$G^2(\omega) = J_0^2 \omega^2 + 2\beta J_0 (\mathbf{G}^{(1)}, \omega) + \beta^2 [(\mathbf{G}^{(1)}, \mathbf{G}^{(1)}) + 2J_0 (\omega, \mathbf{G}^{(2)})] + O(\beta^3)$$

$$H(\omega) = \frac{J_0 \omega^2}{2} + \frac{3\beta d_1}{2} \sum_{\sigma=1}^N (\omega, e_{\sigma})^2 [\omega^2 - (\omega, e_{\sigma})^2] + \\ + \frac{5\beta^2}{2} \sum_{\sigma=1}^N (\omega, e_{\sigma})^2 [\omega^2 - (\omega, e_{\sigma})^2] [(d_2 + 2d_3) (\omega, e_{\sigma})^2 - 2d_3 \omega^2]$$

В установившемся движении полная энергия системы с точностью  $O(\beta^3)$  равна  $H(\omega)$ . Кроме того, справедливо соотношение

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial H}{\partial \omega_i} \omega_i = \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial G_i}{\partial \omega_k} \omega_i \omega_k$$

Рассмотрим подробнее движение шара со стержнями, направленными в вершины икосаэдра. Полагая в (6.5)  $\mathbf{G} = 0$ , получим систему уравнений для компонент вектора  $\omega$  в стационарном движении. Ее решения образуют три семейства. Первое семейство состоит из стационарных вращений вокруг осей, проходящих через противоположные вершины

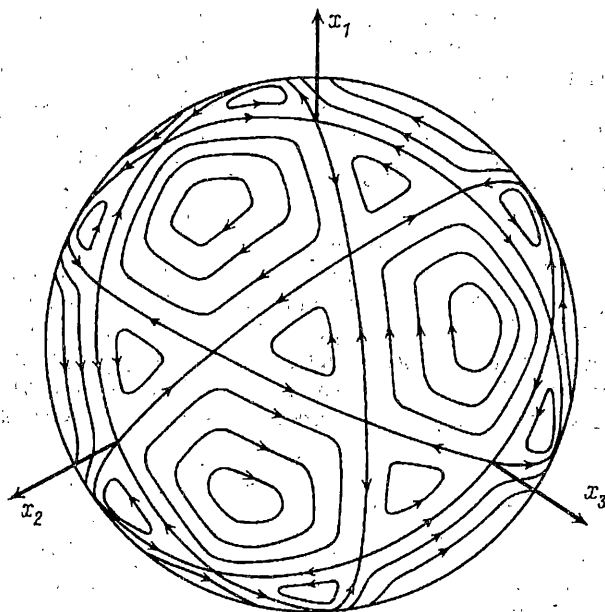
$$\omega_1 = \pm n_1 \omega_*, \quad \omega_2 = \pm n_2 \omega_*, \quad \omega_3 = 0 \quad (6.6)$$

$$n_1 = \left( \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \right)^{1/2}, \quad n_2 = (1 - n_1^2)^{1/2} = \left( \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \right)^{1/2}$$

Не выписанные решения, как и прежде, получаются циклической перестановкой индексов 1, 2, 3.

Второе семейство решений соответствует вращениям вокруг осей, проходящих через середины противоположных ребер

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \pm \omega_* \quad (6.7)$$



Фиг. 3

$$\omega_1 = \pm m_1 \omega_*, \quad \omega_2 = \pm m_2 \omega_*, \quad \omega_3 = \pm \omega_*/2$$

$$m_1 = (\sqrt{5} + 1)/4, \quad m_2 = (\sqrt{5} - 1)/4$$

Третье семейство решений отвечает вращениям вокруг осей, проходящих через центры противоположных граней

$$\omega_1 = \pm \omega_*/\sqrt{3}, \quad \omega_2 = \pm \omega_*/\sqrt{3}, \quad \omega_3 = \pm \omega_*/\sqrt{3} \quad (6.8)$$

$$\omega_1 = \pm k_1 \omega_*, \quad \omega_2 = \pm k_2 \omega_*, \quad \omega_3 = 0$$

$$k_1 = \left( \frac{3 - \sqrt{5}}{6} \right)^{1/2}, \quad k_2 = (1 - k_1^2)^{1/2} = \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{6} \right)^{1/2}$$

Общий характер эволюции вращательного движения понятен из фиг. 3, где показан след вектора  $\omega$  на поверхности уровня интеграла  $G^2(\omega)$ . Центры пятиугольных и треугольных областей отвечают устойчивым стационарным движениям (6.6) и (6.8) соответственно. Отметим, что если у шара со стержнями, направленными в вершины тетраэдра, куба или октаэдра, скорость эволюции можно оценить как  $O(\beta)$ , то при ориентации стержней в вершины икосаэдра или додекаэдра скорость эволюции  $O(\beta^2)$ .

При условии  $G^2(\omega) = \text{const}$  энергия системы  $H(\omega)$  принимает наименьшее значение на движениях (6.6), а наибольшее — на движениях (6.4). Это означает, что влияние диссипации усиливает устойчивость вращений (6.6) до асимптотической (на уровне интеграла кинетического момента) и разрушает устойчивость вращений (6.4).

Аналогичное исследование установившихся движений было проведено и в случае ориентации стержней в вершины додекаэдра.

7. Классификация стационарных решений. В поведении системы существует примечательная закономерность: при ориентации стержней в вершины куба,



октаэдра, икосаэдра или додекаэдра стационарными движениями могут быть только вращения вокруг осей, проходящих либо через противоположные вершины, либо через середины противоположных ребер, либо через центры противоположных граней. Тип элемента многогранника, пересекаемого осью вращения в стационарном движении (вершина, ребро, грань), однозначно определяет свойства этого движения (соответственно устойчивость, в консервативном приближении, неустойчивость, асимптотическая устойчивость).

Ориентация стержней в вершины тетраэдра представляет особый случай. Вращения вокруг осей, проходящих через середины противоположных ребер асимптотически устойчивы. Устойчивыми только в консервативном приближении будут вращения вокруг осей, проходящих через вершину и центр противоположной грани. Еще одно семейство стационарных движений образуют неустойчивые вращения вокруг осей, параллельных некоторому ребру тетраэдра.

Автор благодарит А. Ю. Ишлинского, В. Ф. Журавлева и участников руководимого ими семинара по механике гироскопических систем за полезное обсуждение работы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филиппов А. П. Колебания упругих систем. Киев: Изд-во АН УССР, 1956. 322 с.
2. Черноусько Ф. Л. О движении твердого тела с упругими и диссипативными элементами//ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 1. С. 34—42.
3. Вильке В. Г. Аналитические и качественные методы механики систем с бесконечным числом степеней свободы. М.: Изд-во МГУ, 1986. 192 с.
4. Игнатенко В. Ф. Некоторые вопросы геометрической теории инвариантов групп, порожденных ортогональными и косыми отражениями//Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. М.: ВИНТИ, 1984. Т. 16. С. 195—229.
5. Суликашвили Р. С. О стационарных движениях тел, допускающих группы симметрий правильных многогранников в ньютоновском поле сил//ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 582—586.
6. Денисов Г. Г., Новиков В. В. О свободных движениях деформируемого твердого тела, близкого к шару//Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 3. С. 43—50.
7. Новиков В. В. Анизотропно-упругий шар в свободном движении//ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 5. С. 767—774.

Москва

Поступила в редакцию  
14.I.1993