

УДК 531.8

© 1995 г. В. С. ВОРОНКОВ, О. Д. ПОЗДЕЕВ

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ МАГНИТНОГО ПОДВЕСА ЧУВСТВИТЕЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА ГРАДИЕНТОМЕТРА¹

Проводится исследование динамики системы стабилизации магнитного подвеса чувствительного элемента (ЧЭ) градиентометра, конструктивной особенностью которого является наличие двух пространственно разнесенных масс, связанных коромыслом. Анализ линеаризованной системы с регулятором, который обычно используется в осесимметричных магнитных подвесах показывает, что при малом демпфировании упругих колебаний коромысла происходит потеря устойчивости магнитного подвеса, наблюдаемая на практике.

Проблема устойчивости магнитного подвеса решается на основе синтеза алгоритма управления с учетом упругих свойств ЧЭ градиентометра по критерию максимальной области притяжения стабилизируемого равновесного состояния в фазовом пространстве системы. Рассматривается влияние нелинейности силовых характеристик электромагнита на динамику переходных процессов в системе стабилизации.

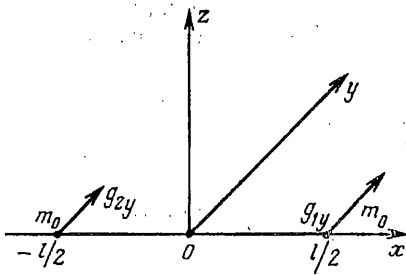
1. Формулировка задачи. Градиентометр является прецизионным прибором [1], предназначенным для измерения градиента гравитационного поля Земли по моменту, действующему на его ЧЭ. Для ЧЭ гантельного типа с двумя точечными пробными массами m_0 , разнесенными на расстояние $l/2$ от его центра масс, как показано на фиг. 1, момент по оси чувствительности z , обусловленный градиентом гравитационного поля $\Gamma_{xy} = \partial g_y / \partial x \approx (g_{1y} - g_{2y})/l$ по оси x , задается выражением

$$M_z = l m_0 (g_{1y} - g_{2y})/2 = m_0 l^2 \Gamma_{xy} / 2 \quad (1.1)$$

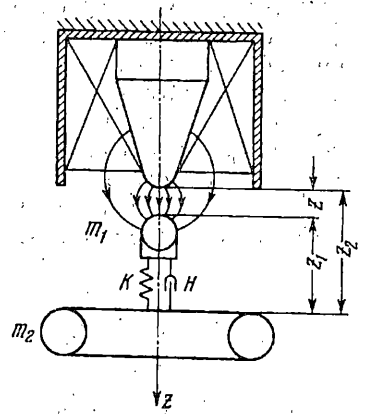
В соответствии с этим выражением оценка полезного момента, действующего на ЧЭ градиентометра с параметрами $m_0 = 0,5$ кг, $l = 0,2$ м для единичного градиента $\Gamma_{xy} = 1 \cdot E = 10^{-9}$ с⁻², задается величиной $M_z = 10^{-11}$ Нм. Для увеличения полезного момента необходимо, чтобы пробные массы были разнесены как можно дальше. Кроме того необходимо, чтобы моменты, действующие на ЧЭ со стороны подвеса, были также малыми и стабильными.

В прецизионном приборостроении для получения малого уровня вредных моментов используется магнитный подвес ЧЭ приборов за ферромагнитный якорь сферической или шаровой формы в регулируемом магнитном поле осесимметричного электромагнита [2]. Конструктивной особенностью магнитного подвеса ЧЭ градиентометра, рассматриваемые варианты которого изображены на фиг. 2 (а, б, в), является наличие двух пространственно разнесенных масс 1, соединенных коромыслом 2. В варианте (а) подвес ЧЭ осуществляется за ферромагнитный шар-якорь 3 в поле одного или двух соосных электромагнитов 4. В варианте (б) — в поле одного электромагнита 4 за ферромагнитный шар 3, соединенный с центром гантели штангой, придающей ему маятниковость и ориентацию оси чувствительности по вертикали. В варианте (в) — за два ферромагнитных шара в поле двух соосных электромагнитов 4, что позволяет отклонять ось чувствительности прибора от вертикали.

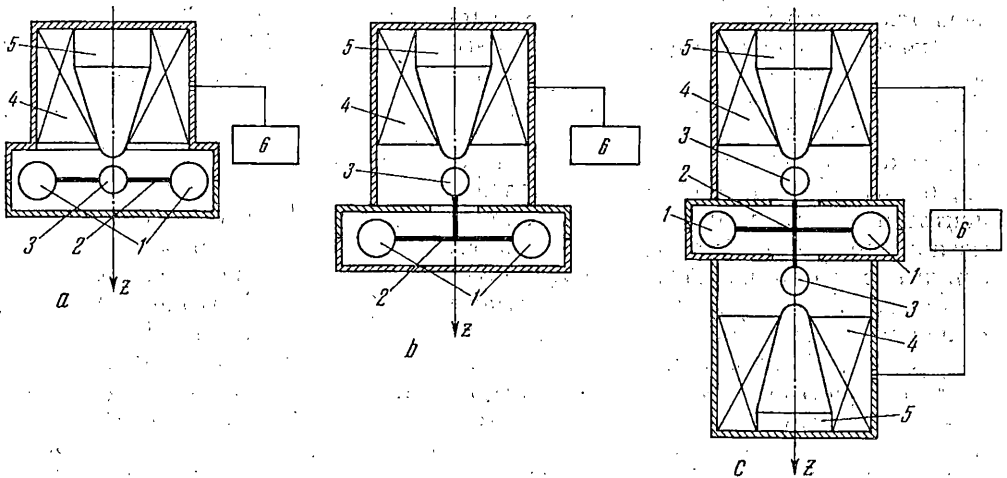
¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.



Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2

Рабочее магнитное поле подвесов для уменьшения энергопотребления и тепловыделения создается постоянными магнитами 5, включенными в разрез сердечника электромагнитов. Для обеспечения устойчивости подвесов используется однопольная система автоматического регулирования 6 (САР), стабилизирующая положение ЧЭ на оси подвеса. Поперечная жесткость создается за счет концентрации поля оси электромагнитов.

Наличие САР в составе магнитного подвеса предопределяет постановку и решение задач автоматического управления, учитывающих специфику объекта исследования. Как показано в [3], магнитный подвес — это нелинейная система, в которой кроме стабилизируемого равновесного состояния могут существовать и другие равновесные состояния, ограничивающие область притяжения стабилизируемого. Кроме того, как показали исследования [4], при неудачном выборе структуры и параметров регулятора, обеспечивающего устойчивость равновесного состояния в линейном приближении, в САР магнитного подвеса возможны неустойчивые периодические движения, также приводящие к уменьшению области притяжения стабилизируемого равновесного состояния.

Эти особенности и определяют выбор критерия оптимальности, по которому осуществляется синтез алгоритма управления в виде условия получения максимальной области притяжения

$$V [u^* (x)] = \max_{u \in U} V [u (x)] \quad (1.2)$$

стабилизируемого равновесного состояния, расположенного в начале координат фазового пространства X при допустимых управлениях u , принадлежащих замкнутой области U . В несколько иной формулировке данный критерий, названный оптимальностью по устойчивости, впервые рассматривался в [5], где даны достаточные условия его выполнения. Из развития идей этой работы в [6, 7] получены необходимые и достаточные условия выполнения критерия (1.2) и показана возможность аналитического решения задачи синтеза по этому критерию. При этом предполагается использование линейризованного описания объекта и простейших кусочно-линейных функций допустимых управлений

$$u(\sigma) = \begin{cases} u^+, & \beta\sigma \geq u^+ \\ \beta\sigma, & -u^- \leq \beta\sigma \leq u^+ \\ -u^-, & -u^- \geq \beta\sigma \end{cases} \quad (1.3)$$

где u^\pm — уровни ограничений управляющего напряжения, β — коэффициент усиления в линейном режиме работы усилителя мощности, нагрузкой которого является электромагнит, σ — входное напряжение усилителя мощности.

Для обеспечения устойчивости равновесного состояния ЧЭ в осесимметричном магнитном подвесе в [7] определен алгоритм управления, оптимальный по критерию (1.2), при допустимых управлениях (1.3). Использование этого алгоритма в макетах градиентометра с магнитным подвесом ЧЭ привело на практике к возбуждению автоколебаний в системе стабилизации на собственной частоте основной формы упругих колебаний коромысла ЧЭ с пучностью в его центре и практически не зависящей от параметров алгоритма управления. Для магнитного подвеса ЧЭ градиентометра возбуждение собственных упругих колебаний коромысла является недопустимым. Поэтому основной целью проводимого исследования является учет упругодемпферных свойств ЧЭ градиентометра при решении задач синтеза оптимального алгоритма управления, анализа устойчивости и оптимальной динамики системы стабилизации магнитного подвеса.

2. Математическая модель магнитного подвеса ЧЭ градиентометра. Учет упругодемпферных свойств ЧЭ градиентометра наиболее просто можно сделать, представив его в виде двух масс, соединенных упругодемпферной связью, как показано на фиг. 3. Точное разделение массы ЧЭ на две составляющие m_1 и m_2 определяется из решения задачи о его собственных колебаниях, соответствующих возбужденной форме колебаний с пучностью в центре гантели ЧЭ. Для приближенной оценки этого разделения можно принять, что массе m_1 соответствует масса ферромагнитного якоря с элементами его крепления, а массе m_2 — масса гантели.

На основании этой двухмассовой модели ЧЭ градиентометра динамика его магнитного подвеса описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{z} - Hz_1 - Kz_1 + f(z, I) - m_1 g &= 0 \\ m_2 \ddot{z}_2 + Hz_1 + Kz_1 - m_2 g &= 0, \quad z_1 = z_2 - z \\ -bz + LI + RI &= u_e \end{aligned} \quad (2.1)$$

где в соответствии с фиг. 3 введены следующие обозначения: z — величина воздушного зазора между шаровым ферромагнитным якорем ЧЭ и сердечником электромагнита, z_1 — взаимное перемещение масс ЧЭ относительно друг друга, z_2 — перемещение массы m_2 ЧЭ по оси подвеса, I, u_e — ток и напряжение одного электромагнита (разности токов и напряжений двух соосных электромагнитов); m_1, m_2 — массы, K, H — упругодемпферные характеристики двухмассовой модели ЧЭ, g — гравитационное ускорение; L, R — индуктивность и активное сопротивление, $f(z, I)$ — силовые характеристики электромагнита, линеаризация

которых в окрестности стабилизируемого равновесного состояния z_0, I_0 приводит к выражению

$$f(z, I) = f(z_0, I_0) - a(z - z_0) + b(I - I_0) \quad (2.2)$$

где $f(z_0, I_0) = (m_1 + m_2)g$, a, b — крутизна силовых характеристик к изменениям воздушного зазора и тока электромагнита. Нелинейность силовых характеристик, которая проявляется в конструкциях магнитного подвеса с одним электромагнитом, может быть учтена с помощью функции

$$f(z, I) = (m_1 + m_2)g \frac{[1 + s(I - I_0)/(I_m q)]^q}{[1 + (z - z_0)/z_m]^s} \quad (2.3)$$

нормированной в стабилизируемом равновесном состоянии на вес ЧЭ. Здесь z_m, I_m — масштабы переменных; q, s — параметры, определяемые в общем случае конструкцией и материалами магнитопровода подвеса. Для исследуемого магнитного подвеса параметры его математической модели принимаются следующими:

$$\begin{aligned} m_1 &= 0,25 \text{ кг}, m_2 = 1,0 \text{ кг}, a = 15 \cdot 10^3 \text{ Н/м}, b = 20 \text{ Н/А}, \\ L &= 0,02 \text{ Гн}, R = 10,0 \text{ Ом}, K = 1,8 \cdot 10^6 \text{ Н/м}, H = 0,4 \text{ Нс/м}, \\ q &= 2, s = 1, \beta = 10,0 \text{ у}^{\pm} = 30,0 \text{ В} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Введение безразмерных переменных $x_1 = (z - z_0)/z_m, x_2 = x_1 t_m, x_3 = (z_1 - z_{10})/z_m, x_4 = x_3 t_m, x_5 = (I - I_0)/I_m, u = (u_2 - u_0)/u_m$ с помощью масштабов $t_m^2 = (m_1 + m_2)/a, z_m = bI_m/a, I_m = u_m/R$ позволяет привести систему (2.1) к безразмерному стандартному виду

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= m(\omega_0^2 x_3 + h_0 x_4)/(1 + m) + f(x_1, x_5)(1 + m) \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -(\omega_0^2 x_3 + h_0 x_4) - f(x_1, x_5)(1 + m) \\ \dot{x}_5 &= (hx_2 - x_5 + u)/T \end{aligned} \quad (2.5)$$

с нелинейной функцией

$$f(x_1, x_5) = \frac{1}{s} \left[1 - \frac{(1 + sx_5/q)^q}{(1 + x_1)^s} \right] \quad (2.6)$$

допускающей линеаризацию

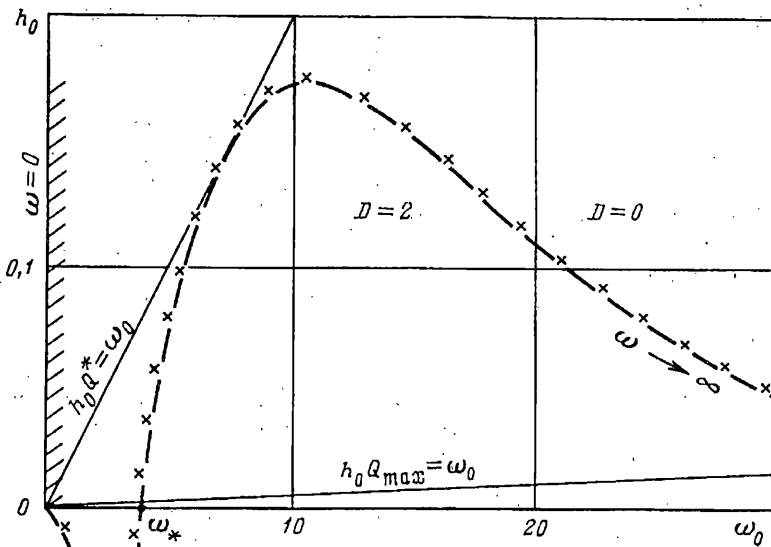
$$f(x_1, x_5) \simeq x_1 - x_5 \quad (2.7)$$

Безразмерные параметры системы (2.5) связаны с исходными следующими выражениями и характеризуют: $m = m_2/m_1$ — распределение масс ЧЭ, $\omega_0^2 = K(m_1 + m_2)/m_1 m_2$ — квадрат частоты собственных упругих колебаний коромысла ЧЭ, $h_0 = H(m_1 + m_2)/m_1 m_2$ — коэффициент демпфирования этих колебаний, $h = b^2/aRt_m$ — коэффициент демпфирования магнитного подвеса, связанный с рассеянием энергии на активном сопротивлении электромагнита, $T = L/Rt_m$ — постоянную времени электромагнита.

3. Анализ устойчивости магнитного подвеса ЧЭ градиентометра. Исследование устойчивости замкнутой САР магнитного подвеса ЧЭ градиентометра с простейшим регулятором, определяющим входное напряжение усилителя мощности безразмерным выражением

$$\sigma = \frac{\alpha(\tau p + 1)}{(\epsilon \tau p + 1)} x_1 - x_5 \quad (3.1)$$

и реализующим оптимальный алгоритм управления [7] при выборе оптимальных



Фиг. 4

параметров, характеризующих: α — чувствительность датчика перемещения якоря ЧЭ, τ — постоянную времени и $\varepsilon < 1$ — погрешность дифференцирующего звена, проводится по характеристическому уравнению, которое имеет вид

$$(\mu T p + 1)(\varepsilon \tau p + 1) N(p) + [k(\tau p + 1) + \mu h(\varepsilon \tau p + 1)] R(p) = 0 \quad (3.2)$$

где p — оператор дифференцирования, $\mu = (1 + \beta)^{-1}$ — малый параметр, характеризующий действие отрицательной обратной связи усилителя мощности по току электромагнита, $k = \alpha \mu \beta$ — параметр, характеризующий жесткость магнитного подвеса с регулятором, $R(p) = (1 + m)p^2 + h_0 p + \omega_0^2$, $N(p) = (p^2 - 1)(p^2 + h_0 p + \omega_0^2) - m p^2$ — числитель и знаменатель передаточной функции от тока к зазору.

Построение области устойчивости линеаризованной САР, заданной характеристическим уравнением (3.2), проводится методом D — разбиения [8] плоскости параметров ω_0, h_0 . Граница области устойчивости в этой плоскости задается параметрически в виде

$$\omega_0^2 = (1 + m) \omega^2 + m \omega^2 \frac{r_1 [r_3 - r_1 (1 + \omega^2)] + n_1 \omega^2 [n_3 - n_1 (1 + \omega^2)]}{[r_3 - r_1 (1 + \omega^2)]^2 + \omega^2 [n_3 - n_1 (1 + \omega^2)]^2} \quad (3.3)$$

$$h_0 = m \omega^4 \frac{n_1 r_3 - r_1 n_3}{[r_3 - r_1 (1 + \omega^2)]^2 + \omega^2 [n_3 - n_1 (1 + \omega^2)]^2}$$

$$r_1 = 1 - \mu T \varepsilon \tau \omega^2, \quad n_1 = \mu T + \varepsilon \tau, \quad r_3 = k - \mu h \varepsilon \tau \omega^2, \quad n_3 = k \tau + \mu h$$

параметр ω изменяется от $-\infty$ до ∞ . Вид D — разбиения и область устойчивости САР $D=0$ для значений остальных параметров: $\mu h = 0$; $\mu T = 0,2$; $\varepsilon = 0,1$; $k = 1,5$; $\tau = 1,0$; $m = 4,0$ изображен на фиг. 4, откуда следует, что при малом демпфировании собственных колебаний коромысла ЧЭ ($h_0 \ll 1$) существует широкий диапазон собственных частот его упругих колебаний, в котором САР с простейшим регулятором [7] неустойчива. Точка пересечения границы D — разбиения с осью ω_0 задает полосу частот $[0, \omega_*]$, вне которой САР теряет свои стабилизирующие качества и возбуждает собственные колебания коромысла ЧЭ. Условия малости демпфирования этих колебаний наглядно определяются из пересечений прямой $Q h_0 = \omega_0$ при $Q^* \leq Q \leq Q_{\max}$ с границей D — разбиения. Здесь $Q^* = 50$ соответствует точке касания и минимальной добротности ЧЭ, выше которой возбуждаются

собственные упругие колебания коромысла, $Q_{\max} = 2000$ — максимальной добротности обычно используемых конструкционных материалов.

4. Синтез алгоритма управления и влияние нелинейности характеристик на динамику САР магнитного подвеса ЧЭ градиентометра. Для обеспечения устойчивости и оптимальной динамики системы стабилизации магнитного подвеса ЧЭ градиентометра, собственные упругие колебания которого обладают высокой добротностью, решается задача синтеза алгоритма управления по критерию (1.2) на основе математической модели (2.1), учитывающей упругодемпферные свойства ЧЭ.

Выделение единственной неустойчивой переменной объекта управления (2.5), (2.7) осуществляется невырожденным преобразованием переменных

$$y = Dx \quad (4.1)$$

с матрицей D (5×5), имеющей компоненты

$$\begin{aligned} d_{j1} &= (\lambda_j T + 1)/\lambda_j, \quad d_{j2} = (T - h)/\lambda_j + 1/\lambda_j^2 \quad (j = 1 - 5) \\ d_{j3} &= m\omega_0^2 \lambda_j d_{j2} / [(1 + m)(\lambda_j^2 + h_0 \lambda_j + \omega_0^2)] \\ d_{j4} &= m(h_0 \lambda_j + \omega_0^2) d_{j2} / [(1 + m)(\lambda_j^2 + h_0 \lambda_j + \omega_0^2)], \quad d_{j5} = -T \end{aligned} \quad (4.2)$$

в соответствии с различными корнями λ_j характеристического уравнения объекта управления. С помощью преобразования (4.1) система (2.5), (2.7) приводится к канонической форме

$$y_j = \lambda_j y_j - u \quad (j = 1 - 5) \quad (4.3)$$

Положительному корню $\lambda_1 > 0$ и неустойчивой переменной y_1 присваивается индекс $j=1$. По аналогии с [7] необходимыми и достаточными условиями выполнения критерия (1.2) в данном случае также является зависимость алгоритма управления только от неустойчивой переменной и асимптотическая устойчивость неустойчивой подсистемы (4.3) ($j=1$) при этом управлении. Данный алгоритм имеет вид

$$u^* = u(y_1) = \begin{cases} u^+, & \beta y_1 \geq u^+ \\ \beta y_1 = \beta \sum_j d_{1j} x_j, & -u^- \leq \beta y_1 \leq u^+ \\ -u^-, & -u^- \geq \beta y_1, \beta > \lambda_1 \end{cases} \quad (4.4)$$

где u^\pm — уровни ограничений управляющих воздействий.

Реализация алгоритма управления (4.4) требует измерения всех компонент вектора состояния объекта, однако при учете связи между координатами, задаваемой уравнениями (2.5), (2.7), число датчиков может быть уменьшено до двух, обычно используемых в осесимметричных магнитных подвесах для измерения зазора x_1 и тока x_5 . Неизмеряемые координаты восстанавливаются с помощью операторных соотношений

$$x_2 = p x_1, \quad x_3 = (1 + m)(x_5 - x_1)/(p^2 + h_0 p + \omega_0^2), \quad x_4 = p x_3 \quad (4.5)$$

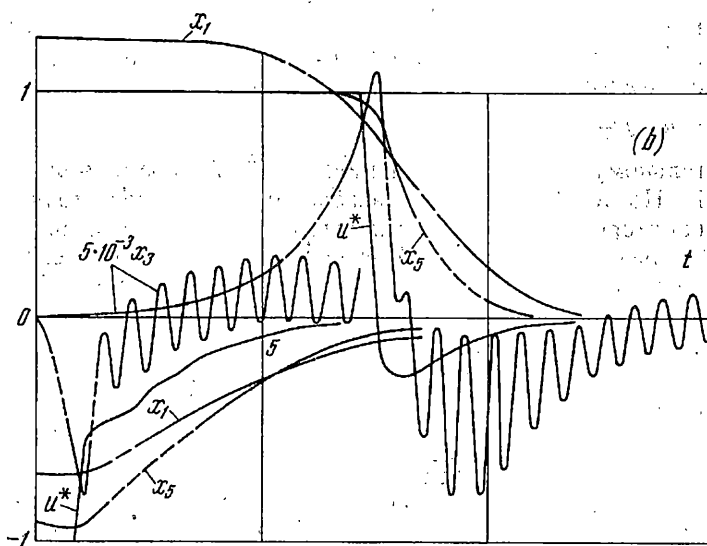
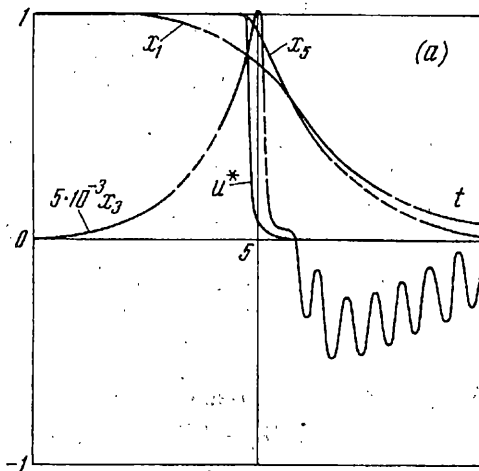
где p — оператор дифференцирования. В результате получается следующее выражение неустойчивой переменной

$$y_1 = \left[d_{11} + d_{12} p - \frac{(1 + m)(d_{13} + d_{14} p)}{p^2 + h_0 p + \omega_0^2} \right] x_1 + \left[d_{15} + \frac{(1 + m)(d_{13} + d_{14} p)}{p^2 + h_0 p + \omega_0^2} \right] x_5 \quad (4.6)$$

или в размерном виде

$$\sigma = \alpha^* \left[1 + \tau^* p - \frac{k_1^* \omega_0^{*2} (1 + \tau_0^* p)}{p^2 + h_0^* p + \omega_0^{*2}} \right] z - r \left[1 - \frac{k_2^* \omega_0^{*2} (1 + \tau_0^* p)}{p^2 + h_0^* p + \omega_0^{*2}} \right] I \quad (4.7)$$

где r — активное сопротивление датчика тока электромагнита; $\alpha^* = rad_{11}/(bT)$;



Фиг. 5

$k_1^* = (1+m) d_{13}/d_{11}\omega_0^{*2}$; $k_2^* = (1+m) \cdot d_{13}/T\omega_0^{*2}$; $\tau^* = d_{12}d_m/d_{11}$; $\tau_0^* = d_{14}t_m/d_{13}$;
 $\omega_0^* = \omega_0/t_m$; $h_0^* + h_0/t_m$ — оптимальные коэффициенты усиления и постоянные времени звеньев коррекции. Отличие полученного алгоритма от [7] состоит в наличии высокодобротных фильтров в цепях обратной связи по зазору и току, настроенных на собственную частоту упругих колебаний ЧЭ.

Численное интегрирование оптимальной системы стабилизации позволило определить вид переходных процессов, к которым необходимо стремиться в реальной системе. На фиг. 5, *a*, *b* изображены переходные процессы системы с линейными и нелинейными силовыми характеристиками при начальных условиях $x_{20} = x_{30} = x_{40} = 0$ и $x_{10} = x_{50}$ или $x_{10} = (1 + sx_{30}/q)^{q/s} - 1$, соответствующих заданию допустимого начального отклонения ЧЭ по оси подвеса в замкнутой системе.

Переходные процессы системы с линейными силовыми характеристиками при симметричных ограничениях $u^{\pm} = 1$ симметричны относительно стабилизируемого равновесного состояния, поэтому на фиг. 5, *a* изображены только для начального отклонения в сторону увеличения зазора. Скорость затухания их в области

линейности САР $|\beta_{y1}| < 1$ определяется корнями $\bar{\lambda}_1 = -(\beta - \lambda_1)$, $\bar{\lambda}_j = \lambda_j$ ($j = 2-5$) замкнутой системы.

Переходные процессы системы с нелинейными силовыми характеристиками при $q=2$, $s=1$, изображенные на фиг. 5, *b*, такой симметрией не обладают. При начальных условиях, соответствующих отклонению ЧЭ в сторону уменьшения зазора, они протекают быстрее, а в сторону увеличения зазора — медленнее по сравнению с переходными процессами в САР с линейными силовыми характеристиками. Если допустимые отклонения по зазору при линейных силовых характеристиках составляют ± 1 , то при нелинейных — 0,7; +1,22. В этой несимметрии проявляется влияние нелинейности характеристик объекта управления на динамику САР.

Экспериментальная проверка эффективности использования фильтров в регуляторе на основе решения (4.7) задачи синтеза проводилась добавлением к первоначально используемому регулятору (3.1) с оптимальными параметрами $\alpha^* = 6,2$ В/мм, $\tau^* = 9 \cdot 10^{-3}$ с ($\varepsilon = 0,1$) одного узкополосного фильтра в обратной связи по току электромагнита. Настройка и включение фильтра осуществлялись в соответствии с (4.7) при следующих значениях оптимальных параметров: $k_2^* = 0,03$; $\tau_0^* = 9 \cdot 10^{-3}$ с; $h_0^* = 2$ с $^{-1}$, $\omega_0^* = 3 \cdot 10^3$ с $^{-1}$. Включение в регулятор такого узкополосного фильтра, настроенного на собственную частоту упругих колебаний ЧЭ, приводило к эффективному гашению этих колебаний. При этом также достигалась требуемая область притяжения стабилизируемого состояния равновесия, в которое ЧЭ приводился при начальных рассогласованиях по зазору ± 1 мм.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грушинский Н. П. Основы гравиметрии. М.: Наука, 1983. 352 с.
2. Мартыненко Ю. Г. Движение твердого тела в электрических и магнитных полях. М.: Наука, 1988. 368 с.
3. Воронков В. С., Поздеев О. Д., Сандалов В. М. О динамике магнитного подвеса // Изв. вузов. Электромеханика. 1974. № 10. С. 1082—1089.
4. Воронков В. С., Поздеев О. Д. Исследование систем стабилизации магнитного подшипника // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 4. С. 30—39.
5. Степаньянц Г. А., Тарарощенко Н. С. О структуре законов управления, обеспечивающих асимптотическую устойчивость систем управления с неустойчивым объектом // Докл. АН СССР. 1970. Т. 193. № 4. С. 774—776.
6. Voronkov V. S. Controllability and stabilizability of unstable objects // Proc. 3 Intern. Symp. on Magnetic Bearings. 1992. Alexandria. USA. P. 101—110.
7. Воронков В. С. Синтез системы стабилизации магнитного подвеса и экспериментальное исследование ее динамики // Изв. вузов. Приборостроение. 1984. Т. 27. № 8. С. 32—37.
8. Неймарк Ю. И. Устойчивость линеаризованных систем. Л.: ЛКВВИА, 1949. 140 с.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
8.IV.1993