МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1995

УДК 531.38

© 1995 г. А. А. МАРКЕЕВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТЕНКАМИ

Рассматривается движение бесконечно тонкой выпуклой пластинки между двумя параллельными прямыми при отсутствии активных внешних сил. Движение происходит с соударениями пластинки о прямые, удар считается абсолютно упругим, трение отсутствует. Исследуется устойчивость такого движения, при котором пластинка попеременно соударяется с прямыми, а ось, содержащая центр масс и два центра кривизн контура, ограничивающего пластинку, остается параллельной самой себе. Получены условия устойчивости в первом приближении.

1. Пусть твердое тело, имеющее форму бесконечно тонкой пластинки, ограниченной выпуклой кривой, движется при отсутствии активных внешних сил между двумя абсолютно гладкими параллельными прямыми. Во время движения тело может попеременно соударяться с указанными прямыми. Удар считается абсолютно упругим. К рассмотрению такого движения приводит задача динамики виброударных систем, в которой исследуется плоское движение без трения выпуклого тяжелого твердого тела между двумя параллельными вертикальными стенками.

Пусть Oxy — неподвижная система координат. Движение происходит между прямыми $y=0$ и $y=l$. Обозначим через x, y координаты центра масс тела. Пусть $G\xi\eta$ — система координат, жестко связанная с телом. Угол между осями Ox и $G\xi$ обозначим через φ. Пусть в так введенной системе координат граница тела задается уравнением $f(\xi, \eta) = 0$. Через M обозначим точку границы тела, ближайшую к оси Ox, а ее координаты в системе $G\xi\eta$ — через ξ, η. Единичный вектор $\mathbf{n}$ оси Oy в системе, связанной с телом, имеет координаты $\gamma_1 = \sin\varphi$, $\gamma_2 = \cos\varphi$. Очевидно, что

$$\gamma_1 = -f_\xi' (f_\xi'^2 + f_\eta'^2)|_M^{-1/2}, \quad \gamma_2 = -f_\eta' (f_\xi'^2 + f_\eta'^2)|_M^{-1/2} \tag{1.1}$$

Пусть m — масса тела, а J — его момент инерции относительно центра масс. При движении тела между ударами справедливы уравнения

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad J\ddot{\varphi} = 0 \tag{1.2}$$

Чтобы получить уравнения, описывающие движение тела на промежутках времени, содержащих моменты соударений, уравнения (1.2) надо дополнить уравнениями, вытекающими из общей теории удара без трения [1]. Обозначая, как обычно, знаками «минус» и «плюс» кинематические характеристики движения тела до и после удара соответственно, имеем

$$\dot\varphi^+ = \dot\varphi^- + I(\xi^*\cos\varphi^* - \eta^*\sin\varphi^*)/J$$

$$\dot y^+ + (\xi^*\cos\varphi^* - \eta^*\sin\varphi^*)\dot\varphi^+ = -\dot y^- - (\xi^*\cos\varphi^* - \eta^*\sin\varphi^*)\dot\varphi^-$$

$$I = -2\frac{\dot y^- + (\xi^*\cos\varphi^* - \eta^*\sin\varphi^*)\dot\varphi^-}{1/m + (\xi^*\cos\varphi^* - \eta^*\sin\varphi^*)^2/J} \tag{1.3}$$

Здесь I — ударный импульс, «звездочкой» помечены значения соответствующих переменных при ударе, величины, не помеченные значками «минус» и «плюс», при ударе не изменяются.

Выше выписаны соотношения для удара о прямую $y=0$; введя точку M', ближайшую к прямой $y=l$, получим совершенно аналогичные соотношения для удара о вторую прямую.

2. Пусть в точках пересечения оси $G\xi$ с границей тела касательные к границе тела перпендикулярны $G\xi$, то есть существуют такие две точки границы тела, что центры кривизн для этих точек и центр масс будут лежать на одной прямой. Кривизны в этих точках обозначим через $1/r_1$ и $1/r_2$, а расстояния от них до центра масс G через a_1 и a_2.

Если $a_1 + a_2 < l$ и указанные точки границы являются точками выпуклости, то, очевидно, что существует периодическое движение, в котором $\dot{\varphi} = 0$, $\ddot{\varphi} = 0$, $\dot{x} = u = \text{const}$, $|\dot{y}| = v = \text{const}$. Движение имеет период $\tau = 2\,(l - (a_1 + a_2))/v$ равный промежутку времени между двумя последовательными соударениями об одну и ту же прямую. При таком движении тело попеременно соударяется с прямыми $y=0$, $y=l$, а ось $G\xi$ остается параллельной самой себе. В промежутках между ударами центр масс движется либо по прямой, параллельной оси Oy, либо по ломаной, в зависимости от того, равна нулю или нет константа u. Без ограничения общности будем далее рассматривать случай $u=0$.

3. Исследуем устойчивость вышеописанного движения по отношению к возмущениям угла φ и угловой скорости $\dot{\varphi}$.

Пусть перед первым соударением, скажем с прямой $y=0$, малые возмущения угла и угловой скорости равны φ_0 и $\dot{\varphi}_0$ соответственно. Используя выражение (1.1), уравнения (1.2) и ударные соотношения (1.3) с учетом линеаризации, получим, что после соударения с прямой $y=0$, отскока к прямой $y=l$, удара о последнюю и возвращения обратно к прямой $y=0$ угол φ_1 и угловая скорость $\dot{\varphi}_1$ будут выражаться через начальные значения φ_0 и $\dot{\varphi}_0$ по следующим формулам:

$$\varphi_1 = \left\{ \frac{mv\tau}{J} \left[2\,(a_1 - r_1) + (a_2 - r_2) + \frac{mv\tau}{J}(a_1 - r_1)(a_2 - r_2)\right] + 1\right\} \varphi_0 +$$
$$+ \frac{\tau}{2} \left[\frac{mv\tau}{J}(a_2 - r_2) + 2\right] \dot{\varphi}_0 \tag{3.1}$$
$$\dot{\varphi}_1 = \frac{2mv}{J}\left[(a_1 - r_1) + (a_2 - r_2) + \frac{mv\tau}{J}(a_1 - r_1)(a_2 - r_2)\right] \varphi_0 +$$
$$+ \left[\frac{mv\tau}{J}(a_2 - r_2) + 1\right] \dot{\varphi}_0$$

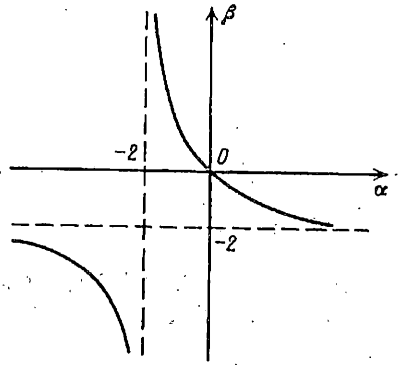
Неподвижной точке полученного точечного отображения соответствует изучаемое периодическое движение тела. Отображение (3.1) сохраняет площадь и поэтому для устойчивости неподвижной точки $\varphi_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = 0$ необходимо, чтобы характеристическое уравнение для матрицы отображения имело комплексно-сопряженные корни, по модулю равные единице, для чего необходимо и достаточно, чтобы след матрицы отображения был по модулю меньше двух [2].

Итак, для устойчивости рассматриваемого движения необходимо выполнение следующего условия:

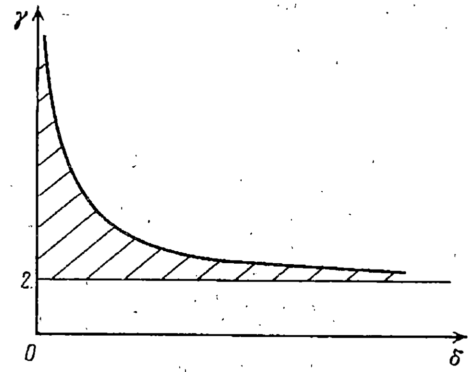
$$\left| 1 + \frac{mv\tau}{J}\left[(a_1 - r_1) - (a_2 - r_2) + \frac{mv\tau}{2J}(a_1 - r_1)(a_2 - r_2)\right] \right| < 1 \tag{3.2}$$

В пространстве безразмерных параметров

$$\alpha = \frac{mv\tau}{J}(a_1 - r_1), \ \beta = \frac{mv\tau}{J}(a_2 - r_2)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

условие (3.2) выполняется для точек, лежащих в области между ветвями гиперболы $\beta = -2\alpha/(\alpha + 2)$ и ее асимптотами $\alpha = -2$, $\beta = -2$ (фиг. 1), то есть либо $\alpha > -2$, $\beta < -2\alpha/(\alpha + 2)$, либо $\alpha < -2$, $\beta > -2\alpha/(\alpha + 2)$. Введя обозначение ρ для радиуса инерции тела относительно центра масс и вспоминая, что $v\tau = 2(l - (a_1 + a_2))$, параметры α и β можно записать иначе:

$$\alpha = \frac{2(l - (a_1 + a_2))}{\rho^2}(a_1 - r_1), \quad \beta = \frac{2(l - (a_1 + a_2))}{\rho^2}(a_2 - r_2)$$

4. Рассмотрим примеры. *1*. Движение тела эллиптической формы с равномерным распределением массы неустойчиво при любом соотношении между полуосями, так как в этом случае оба параметра α и β положительны. В граничном случае окружности неустойчивость следует из физических соображений: тело круглой формы будет просто вращаться с постоянной угловой скоростью.

2. Рассмотрим более содержательный и интересный случай тела формы типа «перстня», т. е. тела, представляющего собой однородную окружность радиуса R и массы M («кольцо») с точечной неоднородностью массы m («камень»). В этом случае, как показывают простые вычисления $a_1 = MR/(M + m)$, $a_2 = (M + 2m)R/(M + m)$, $\rho^2 = M(M + 2m)R^2/(M + m)^2$. Анализ выражения (3.2) в безразмерных переменных $\gamma = l/R$ и $\delta = m/M$ дает следующее условие устойчивости в первом приближении:

$$2 < \gamma < 2 + \sqrt{2}(1 + 2\delta)/[\delta(1 + \delta)] \qquad (4.1)$$

Графически этот результат представлен на фиг. 2. Движение будет устойчивым для значений параметров γ и δ, лежащих в заштрихованной области.

Зададим массу M «кольца». При $m = 0$ получаем граничный случай однородной окружности, в котором, как указывалось выше, имеет место неустойчивость. Добавив «камень» как угодно малой массы m, видим, что движение становится устойчивым, причем чем меньше масса m, тем шире диапазон устойчивости по параметру γ. Из физических соображений ясно, что чем больше масса, тем уже должна быть щель между прямыми, в которой происходит движение «перстня», это подтверждается формулой (4.1) и сразу видно из графика на фиг. 2.

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда (MFG000).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. Т. 2. Ч. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 555 с.
2. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.

Москва

Поступила в редакцию 3.III.1993