

УДК 539.3:534.1

© 1995 г. С. Н. КУКУДЖАНОВ

## О ВЛИЯНИИ ОРТОТРОПИИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ, БЛИЗКИХ К ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ

Исследуется устойчивость ортотропных оболочек вращения, близких по форме к цилиндрическим, находящихся под действием нормального давления  $q$  (внешнего или внутреннего), равномерно распределенного по боковой поверхности оболочки, крутящих моментов  $M$ , приложенных по торцам оболочки как при их раздельном, так и совместном действии. Рассматриваются оболочки средней длины, у которых форма образующей срединной поверхности описывается параболической функцией. На основании теории пологих оболочек получено уравнение устойчивости, которое, в частности, для изотропного материала отличается от известного уравнения [1] дополнительным членом, который может иметь такой же порядок, как и другие члены этого уравнения. Исследованы оболочки, как положительной, так и отрицательной гауссовой кривизны. При этом подобно цилиндрическим оболочкам, рассматривались только главные граничные условия, выполнение которых дает достаточно хорошую аппроксимацию значений критической нагрузки для свободно опертых краев [2], [3].

Приведены в безразмерной форме формулы и универсальные кривые зависимости критических значений сдвигающих и нормальных усилий от параметров ортотропии и безразмерной амплитуды отклонения от цилиндрической формы. Показано, что упругие параметры ортотропии существенно влияют на критическую нагрузку. Отмечено, что они оказывают различное влияние на критическую нагрузку в зависимости от знака гауссовой кривизны и амплитуды отклонения. Для выпуклых оболочек по мере увеличения амплитуды отклонения увеличивается влияние упругой постоянной в осевом направлении тогда, как для вогнутых оболочек по мере увеличения амплитуды усиливается влияние упругой постоянной окружного направления.

Рассматривается оболочка, у которой срединная поверхность образована вращением квадратной параболы вокруг оси  $z$ , прямоугольной системы координат  $x, y, z$  с началом в середине отрезка оси вращения (фиг. 1). Предполагается, что радиус  $R$  поперечного сечения срединной поверхности оболочки определяется равенством  $R = r + \delta_0 [1 + \xi^2 (r/l)^2]$ , где  $r$  радиус торцевого сечения,  $\delta_0$  — максимальное отклонение (при  $\delta_0 > 0$  оболочка выпуклая, при  $\delta_0 < 0$  — вогнутая),  $L = 2l$  — длина оболочки,  $\xi = z/r$ . Считается, что  $\delta_0^2/r^2$ ,  $\delta_0^2/l^2$  — пренебрежимо малые в сравнении с единицей.

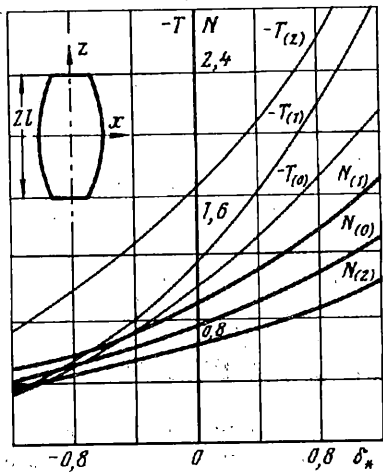
Предполагается, что докритическое состояние безмоментное. Учитывая близость  $R$  к  $r$ , можно показать, что нормальные и сдвигающие усилия принимают соответственно вид  $T_2^\circ \approx -qr$ ,  $S^\circ \approx M/(2\pi r^2)$ .

Разрешающее уравнение устойчивости для рассматриваемых оболочек (относительно радиального перемещения  $w$ ) имеет вид

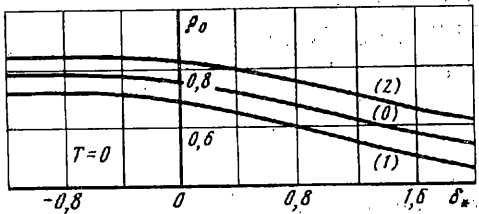
$$\varepsilon \frac{\partial^8 w}{\partial \varphi^8} + \frac{E_1}{E_2} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 4\delta \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \varphi^2} + 4\delta^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right) - \frac{T_2^\circ}{E_2 h} \frac{\partial^6 w}{\partial \varphi^6} - \frac{2S^\circ}{E_2 h} \frac{\partial^6 w}{\partial \xi \partial \varphi^5} = 0 \quad (1)$$

$$\varepsilon = h^2/12r^2 (1 - \nu_1 \nu_2), \quad \delta = \delta_0 r/l^2 \quad (2)$$

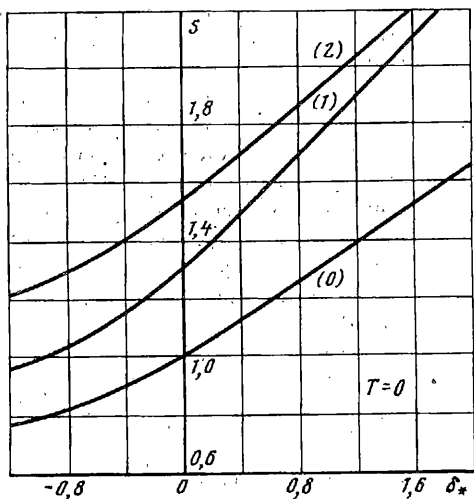
где  $E_1, E_2, \nu_1, \nu_2$  — модули упругости и коэффициенты Пуассона в осевом и окружном направлениях ( $E_1 \nu_2 = E_2 \nu_1$ ),  $\varphi$  — угловая координата. Дополнительным членом в этом уравнении в сравнении с уравнением, приведенным в [1] для



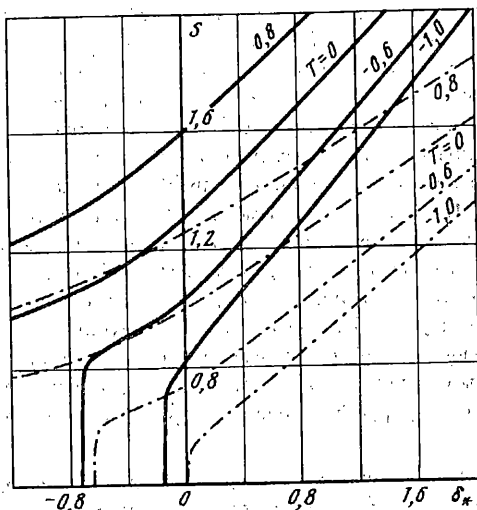
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

изотропной оболочки, является четвертый член, который в силу того, что для оболочек средней длины имеет место условие  $\partial^2 w / \partial \varphi^2 \gg \partial^2 w / \partial \xi^2$ , будет одного порядка с третьим членом этого уравнения.

Таким образом, на основании вышесказанного, нахождение форм потери устойчивости рассматриваемых оболочек сводится к определению ненулевых решений уравнения (1) при краевых условиях

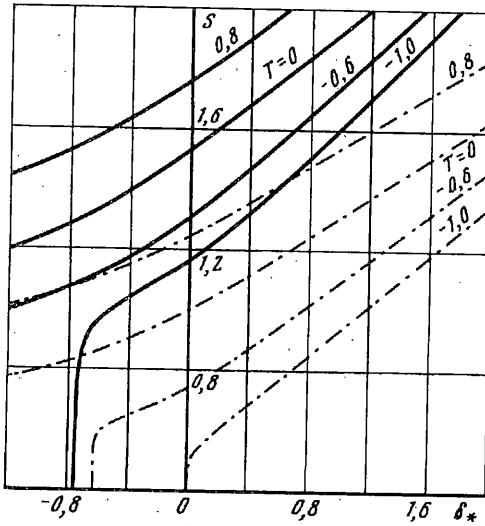
$$w(l/r, \varphi) = w(-l/r, \varphi) = 0 \quad (3)$$

Решение будем искать в виде ряда по  $\lambda_m = (m\pi r/2l)$ :

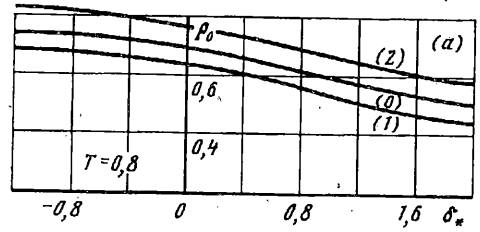
$$w = \sum_{mn} \cos \lambda_m \xi (A_{mn} \sin n(\varphi - \gamma \xi) + B_{mn} \cos n(\varphi - \gamma \xi)) \quad (4)$$

Представим выражение (4) в следующем виде:

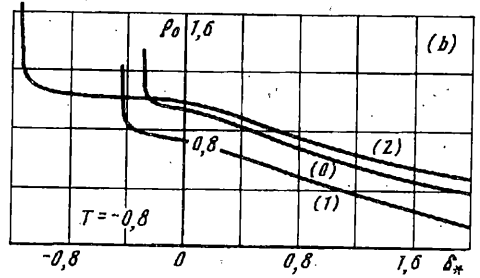
$$w = \sum_{mn} \frac{A_{mn}}{2} (\sin [n(\varphi - \gamma \xi) - \lambda_m \xi] + \sin [n(\varphi - \gamma \xi) + \lambda_m \xi]) + \dots$$



Фиг. 5



Фиг. 6



$$+ \frac{B_{mn}}{2} (\cos [n(\varphi - \gamma\xi) - \lambda_m \xi] + \cos [n(\varphi - \gamma\xi) + \lambda_m \xi]) \quad (5)$$

Подставляя (5) в уравнения (1) получаем

$$\sum_{mn} \{A_{mn} F(n, -m) \sin [n(\varphi - \gamma\xi) - \lambda_m \xi] + A_{mn} F(n, m) \sin [n(\varphi - \gamma\xi) + \lambda_m \xi] + B_{mn} F(n, -m) \cos [n(\varphi - \gamma\xi) - \lambda_m \xi] + B_{mn} F(n, m) \cos [n(\varphi - \gamma\xi) + \lambda_m \xi]\} = 0$$

$$F(n, \pm m) = \varepsilon n^8 + \frac{E_1}{E_2} (\mu_{\pm}^4 + 4\delta\mu_{\pm}^2 n^2 + 4\delta^2 n^4) + \frac{T_2^{\circ}}{E_2 h} n^6 + \frac{2S^{\circ}}{E_2 h} \mu_{\pm} n^5$$

$$\mu_{\pm} = -n\gamma \pm \lambda_m \quad (6)$$

Отсюда будем иметь

$$A_{mn} [F(n, -m) + F(n, m)] = 0, \quad A_{mn} [F(n, -m) - F(n, m)] = 0$$

$$B_{mn} [F(n, -m) + F(n, m)] = 0, \quad B_{mn} [F(n, -m) - F(n, m)] = 0$$

Таким образом, для существования нетривиального решения уравнения (1), при красных условиях (3), необходимо и достаточно, чтобы нашлись целые  $m, n$ , удовлетворяющие условиям

$$F(n, m) = 0, \quad F(n, -m) = 0 \quad (7)$$

Соотношение (7) представляет собой следующие условия:

$$\varepsilon n^4 + \frac{E_1}{E_2} \left(-\gamma + \frac{m\pi r}{nL}\right)^4 + 4 \frac{E_1}{E_2} \delta \left(-\gamma + \frac{m\pi r}{nL}\right)^2 + 4 \frac{E_1}{E_2} \delta^2 + \frac{2S^{\circ}}{E_2 h} \left(-\gamma + \frac{m\pi r}{nL}\right)^2 + \frac{T_2^{\circ}}{E_2 h} n^2 = 0 \quad (8)$$

$$\varepsilon n^4 + \frac{E_1}{E_2} \left(-\gamma - \frac{m\pi r}{nL}\right)^4 + \frac{E_1}{E_2} \delta \left(-\gamma - \frac{m\pi r}{nL}\right)^2 + 4 \frac{E_1}{E_2} \delta^2 +$$

$$+ \frac{2S^\circ}{E_2 h} \left( -\gamma - \frac{m\pi r}{nL} \right)^2 + \frac{T_2^\circ}{E_2 h} n^2 = 0 \quad (9)$$

Отсюда нетрудно показать, что наименьшее значение  $S^\circ$  в зависимости от  $m$  реализуется при  $m = 1$ . Поэтому в дальнейшем полагаем  $m = 1$ .

Введем обозначения  $E_1 = \alpha_1 E$ ,  $E_2 = \alpha_2 E$ ,  $\rho = \lambda_1 \varepsilon_*^{-1/4} / n$ ,  $\theta = \gamma \varepsilon_*^{-1/4}$ ,  $\varepsilon_* = hr/L^2 (1 - \nu_1 \nu_2)^{1/2}$ ,  $\lambda_1 = \pi r / L$ ,  $\delta_* = \delta \varepsilon_*^{-1/2}$ ,  $s = s^\circ \lambda_1^2 \varepsilon_*^{-5/4}$ ,  $t = t^\circ \lambda_1^2 \varepsilon_*^{-3/2}$ ,  $s^\circ = S^\circ / (Eh)$ ,  $t^\circ = T_2^\circ / (Eh)$ . Тогда уравнения (8), (9) примут вид

$$\frac{\pi^4}{12} \rho^{-4} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} [(-\theta \pm \rho)^4 + 4\delta_* (-\theta \pm \rho)^2 + 4\delta_*^2] + 2s\alpha_2^{-1} \rho^{-2} (\theta \pm \rho) + \alpha_2^{-1} \rho^{-2} t = 0 \quad (10)$$

Если же ввести еще безразмерные усилия

$$S \doteq s^\circ / s_*, \quad T \doteq t^\circ / t_*, \quad s_* = 0,74 (1 - \nu_1 \nu_2)^{-5/8} (h/r)^{5/4} (r/L)^{1/2} \quad (11)$$

$$t_* = 0,855 (1 - \nu_1 \nu_2)^{-3/4} (h/r)^{3/2} (r/L)$$

Тогда уравнения (10) можно представить в виде

$$\frac{\pi^2 \rho^{-2}}{12} + \frac{\alpha_1}{\pi^2 \alpha_2} [\rho^2 (-\theta \pm \rho)^4 + 4\delta_* \rho^2 (-\theta \pm \rho)^2 + 4\delta_*^2 \rho^2] + 1,48\alpha_2^{-1} S (-\theta \pm \rho) + 0,855\alpha_2^{-1} T = 0 \quad (12)$$

Отсюда получаем следующие равенства:

$$1,48\alpha_2^{-1} S = \frac{\pi^2}{12} \frac{\theta}{\rho^2 (\theta^2 - \rho^2)} + \frac{\alpha_1}{\pi^2 \alpha_2} \left[ \rho^2 \theta (-\theta \pm \rho)^2 + 4\delta_* \rho^2 (-\theta \pm \rho)^2 + 4\delta_*^2 \frac{\rho^2 \theta}{\theta^2 - \rho^2} \right] + \frac{0,855\alpha_2^{-1} T \theta}{\theta^2 - \rho^2} \quad (13)$$

$$\frac{\pi^2}{12} \frac{\theta}{\rho^2 (\theta^2 - \rho^2)} = \frac{\alpha_1}{\pi^2 \alpha_2} \left[ \rho^2 \theta (3\theta^2 - \rho^2) - 4\delta_1 \rho^2 \theta - 4\delta_*^2 \frac{\rho \theta}{\theta^2 - \rho^2} \right] - \frac{0,855\alpha_2^{-1} T \theta}{\theta^2 - \rho^2} \quad (14)$$

Подставляя (14) в (13) получаем

$$S = 0,274\alpha_1 \rho^2 \theta (\theta^2 + \rho^2 + 2\delta_*) \quad (15)$$

Из равенства (14) следует уравнение

$$3\Lambda^4 - B\Lambda^2 - C = 0, \quad \Lambda = \theta / \rho \quad (16)$$

$$B = 2 - 4\delta_* \rho^{-2}, \quad C = 1 + 4\delta_* \rho^{-2} + 4\delta_*^2 \rho^{-4} + \pi^2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left[ \frac{\pi^2 \rho^{-8}}{12} + 0,855\alpha_2^{-1} T \rho^{-6} \right]$$

Так как  $\gamma \geq 0$ ,  $n > 0$ , то интерес представляют только положительные или нулевые корни этого уравнения. В зависимости от значений  $B$  и  $C$  положительные корни уравнения (16) имеют вид

$$\Lambda_1 = \left[ \left( \sqrt{B^2 + 12C} + B \right) / 6 \right]^{1/2}, \quad \Lambda_2 = \left[ \left( B - \sqrt{B^2 + 12C} \right) / 6 \right]^{1/2} \quad (17)$$

Вводя переменную  $\Lambda$  в формулу (15), получаем

$$S = 0,274\alpha_1 \rho^3 \Lambda [\rho^2 (1 + \Lambda^2) + 2\delta_*] \quad (18)$$

Подставляя выражение  $\Lambda_i$  ( $i = 1, 2$ ), согласно равенствам (17), в формулу (18) получаем  $S$  как функцию одной безразмерной переменной  $\rho$  и четырех безразмерных параметров  $\delta_*$ ,  $T$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  ( $T < 0$  — внешнее давление,  $T > 0$  —

внутреннее давление). Определяя наименьшее значение  $S$  от  $p$  при фиксированных значениях  $\delta_*$ ,  $T$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , получаем соответствующее критическое значение  $S$ .

При  $C > 0$  имеем  $\Lambda_1$  — действительный положительный корень, тогда как  $\Lambda_2$  — мнимый. При  $C = 0$  получаем  $\Lambda_1 = (B/3)^{1/2}$ ,  $\Lambda_2 = 0$ . При  $C < 0$ ,  $B > 0$  имеем  $\Lambda_2 > \Lambda_1$ .

Отметим, что при  $C = 0$  меньшее значение  $S = 0$  дает корень  $\Lambda_2 = 0$  (т. е. имеем случай действия одного давления). Приравнявая соответствующее выражение для  $S$  к нулю получаем следующее уравнение:

$$-0,855\pi^2\alpha_1^{-1/4}\alpha_2^{-3/4}T = X^3 + 4\delta_*X^2 + 4\delta_*^2X + \pi^4X^{-1}/12 \quad (19)$$

$$X = (\alpha_1/\alpha_2)^{1/4}p^2, \quad \delta_*^v = \delta_* (\alpha_1/\alpha_2)^{1/4} \quad (20)$$

Определим минимум величины  $(-T) > 0$  согласно (19), как непрерывной функции аргумента  $x$  ( $x > 0$ ). Нетрудно показать, что минимум определяется из условия  $T_x' = 0$ . Отсюда получаем

$$N^4 + cN^2 + dN + e = 0, \quad N = x^{-1} \quad (21)$$

$$c = -4(\delta_*^v)^2 12/\pi^4, \quad d = -8\delta_*^v 12/\pi^4, \quad e = -36/\pi^4, \quad N = p^{-2}(\alpha_2/\alpha_1) \quad (22)$$

Известно, что корни уравнения (21) совпадают с корнями двух уравнений

$$N^2 + A_{\pm} \frac{N}{2} + y - \frac{d}{A_{\pm}} = 0, \quad A_{\pm} = \pm \sqrt{8y - 4c}, \quad \beta = y - \frac{c}{2}$$

$$N_{1,2} = -\sqrt{\frac{\beta}{2}} \pm \left( \frac{d}{\sqrt{8\beta}} - \frac{\beta_1}{2} \right)^{1/2}, \quad N_{3,4} = \sqrt{\frac{\beta}{2}} \pm \left( -\frac{d}{\sqrt{8\beta}} - \frac{\beta_1}{2} \right)^{1/2}, \quad \beta_1 = y + \frac{c}{2} \quad (23)$$

где  $y$  — какой-либо действительный корень уравнения

$$y^3 - \frac{c}{2}y^2 - ey + \left( \frac{1}{2}ce - \frac{1}{8}d^2 \right) = 0 \quad (24)$$

Произведем замену переменной  $z = y - c/6$ , тогда уравнение (24) примет вид  $z^3 + 3pz + 2q = 0$

$$p = \frac{12}{\pi^4} \left( 1 - \frac{4}{9} \frac{12}{\pi^4} \delta_*^{v4} \right), \quad q = -2\delta_*^{v2} \left( \frac{12}{\pi^4} \right)^2 \left[ 1 - \frac{4}{27} \frac{12}{\pi^4} \delta_*^{v4} \right] \quad (26)$$

Если принять, что

$$6\delta_*^{v4}/\pi^4 \ll 1 \quad (27)$$

то выражения (26) принимают вид  $p = 12/\pi^4$ ,  $q = -2\delta_*^{v2} (12/\pi^4)^2$ . Так как дискриминант уравнения (25) больше нуля, то имеем один действительный корень

$$z = \left( -q + \sqrt{q^2 + p^3} \right)^{1/3} + \left( -q - \sqrt{q^2 + p^3} \right)^{1/3} \quad (28)$$

Используя условие (27), это выражение можно упростить

$$z \approx 4/3 (12/\pi^4) \delta_*^{v2} \quad (29)$$

Тогда на основании (22), (23), (29) будем иметь

$$\beta = z - \frac{c}{3} = \frac{8}{3} \left( \frac{12}{\pi^4} \right) \delta_*^{v2}, \quad \beta_1 = z + \frac{2c}{3} = -\frac{4}{3} \left( \frac{12}{\pi^4} \right) \delta_*^{v2} \quad (30)$$

Подставляя значения  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\beta_1$  согласно равенств (22), (30) в выражение (23)

получаем, что при  $\delta < 0$  положительным корнем является только корень  $N_1$ , тогда как при  $\delta > 0$  корень  $N_3$ . В результате найдем

$$n_{1,2}^2 = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{1/4} \left[ \left( \sqrt{3} + 0,27 \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{1/2} \varepsilon^{-1/2} \left(\frac{\delta}{l}\right)^2 \right)^{1/2} \pm 0,735 \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{1/4} \varepsilon^{-1/4} \frac{\delta}{l} \right] \lambda_1 \varepsilon^{-1/4} \quad (31)$$

Индекс (1) соответствует  $\delta > 0$ , а (2) —  $\delta < 0$ . В частности, при  $\delta = 0$  отсюда следует известная формула для ортотропной цилиндрической оболочки средней длины  $n_*^2 = \sqrt[4]{3} \lambda_1 \varepsilon^{-1/4} (\alpha_1/\alpha_2)^{1/4}$  [4]. Подставляя эти значения  $n_{1,2}$  в формулу (19) получаем соответствующие критические значения  $T$ .

Используя формулу (31) можно привести условия применимости данного подхода, ограничивающие длину оболочки как снизу, так и сверху. Для оболочек средней длины было сделано допущение  $n^2 \gg 1$ . Поэтому предполагая, как обычно, что это условие выполняется при  $n \geq 4$  [5], получаем

$$\frac{l}{r} \leq \left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{1/4} \left(\frac{r}{h}\right)^{1/2} (1 - \nu_1 \nu_2)^{1/4} H \left(\frac{E_1}{E_2}, \frac{r}{h}, \frac{\delta}{l}\right) \quad (32)$$

$$H(E_1/E_2, r/h, \delta/l) = [\sqrt{3} + 0,27 (E_1/E_2)^{1/2} \varepsilon^{-1/2} (\delta/l)^2]^{1/2} \pm 0,735 \varepsilon^{-1/4} \delta/l$$

С другой стороны, используя условия применимости полубезмоментной теории для ортотропных оболочек  $(E_1 E_2)^{1/2} |w_{pp}| \gg |w_{\xi\xi}|$ , находим

$$\frac{l}{r} \geq \frac{M_0}{\sqrt[4]{3}} \left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{1/4} \left(\frac{h}{r}\right)^{1/2} (1 - \nu_1 \nu_2)^{-1/4} H \left(\frac{E_1}{E_2}, \frac{r}{h}, \frac{\delta}{l}\right)^{-1} \quad (33)$$

В [6] при  $E_1 = E_2 = E$ ,  $\delta = 0$ , приведена аналогичная оценка, при этом  $M_0 = 15$ . Подставляя это значение  $M_0$  в (33), получаем условие, ограничивающее  $l$  снизу.

На фиг. 1 приведены в безразмерной форме критические значения  $N$  и  $T$  в зависимости от безразмерного параметра  $\delta_*$  для случаев  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 1$  (0);  $\alpha_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = 1$  (1);  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 2$  (2); соответствующие кривые обозначены  $N_i$ ,  $T_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ).

Сравнение численных примеров, приведенных в [1], для изотропного материала с численными результатами, полученными на основании приведенной методики, показали, что учет дополнительного члена в уравнении (1) может существенно повлиять на критическую нагрузку и особенно для оболочек отрицательной гауссовой кривизны.

Далее определяя на основании формулы (18) наименьшее значение  $S$  от  $\rho$  при фиксированных значениях  $\delta_*$ ,  $T$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  получаем соответствующее критическое значение  $S$ . В частности, при  $T = 0$  на фиг. 2 приведено значение  $\rho_0$ , при котором реализуется наименьшее значение  $S$  в зависимости от  $\delta_*$  для вышерассмотренных случаев (0), (1), (2); соответствующие кривые обозначены (0), (1), (2). На фиг. 3 представлены универсальные кривые зависимости безразмерных критических значений  $S$  (при  $T = 0$ ) от безразмерного параметра  $\delta_*$  для вышерассмотренных случаев (0), (1), (2). Для изотропной оболочки, приведенная кривая (0) практически совпадает с кривой, полученной в [7], на основании метода асимптотического интегрирования. Сравнивая кривые, приведенные как на фиг. 1, так и на фиг. 3, нетрудно заметить, что для выпуклых оболочек по мере увеличения  $|\delta_*|$  увеличивается влияние упругой постоянной в осевом направлении, тогда как для вогнутых оболочек наоборот влияние упругой постоянной в окружном направлении.

На фиг. 4 приведены критические значения  $S$  (при  $T = -1, 0; -0,8; -0,6; -0,4; 0; 0,4; 0,8$ ) в зависимости от  $\delta_*$  для случаев (1) (сплошные кривые) и (0) (штриховые кривые). На фиг. 5 для сравнения представлены соответствующие кривые для случаев (2) и (0).

На фиг. 6 приведены кривые  $\rho(\delta_*)$ , при которых реализуются критические значения  $S$ , для случаев (1) и (2), в частности при  $T = -0,8$  и  $T = 0,8$ .

Отметим, что при  $\delta = 0$ ,  $S = 0$  на основании выражений (15), (16) получаем  $\gamma = 0$  ( $\Lambda = 0$ ); отсюда следует известная формула для критического давления ортотропной цилиндрической оболочки средней длины  $T = \alpha_1^4 \alpha_2^{3/4}$  [8]. При  $\delta = 0$ ,  $T = 0$  из выражений (17), (18) получаем известную формулу для критического сдвигающего усилия  $S = \alpha_1^{3/8} \alpha_2^{5/8}$  [8]. При  $\delta = 0$ ,  $T \neq 0$ ,  $S \neq 0$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  результаты, приведенные на фиг. 4 для случая (0) совпадают с данными, приведенными в [9] для изотропной цилиндрической оболочки.

Таким образом, полученные формулы и универсальные кривые дают возможность определять критические значения сдвигающих усилий (крутящих моментов) в зависимости от величины безразмерного давления (внешнего  $T < 0$  или внутреннего  $T > 0$ ) безразмерного максимального отклонения  $\delta_*$  и упругих постоянных  $E_1$ ,  $E_2$ . Полученная формула имеет вид  $s_* = f(\delta_*, T, E_1, E_2)$ , где  $s_*$  определяется выражением (12), а численные значения  $f(\delta_*, T, E_1, E_2)$  для вышерассмотренных случаев приведены на фиг. 4, 5. Аналогичным образом нетрудно получить соответствующие кривые для иных значений упругих параметров.

Отметим, что приведенное исследование для случая совместного кручения с внутренним давлением справедливо для небольших внутренних давлений, когда  $t \leq |t_*|$ , где  $t_*$  — величина безразмерного критического внешнего давления, определяемого выражением (11). Это следует из того факта, что для приведенного интервала изменения внутреннего давления критическое число волн в окружном направлении для рассматриваемых оболочек средней длины, хотя и уменьшается по сравнению с числом волн для цилиндрической оболочки, находящейся под действием одного только кручения, но несущественно (фиг. 2, 6).

Предполагается, что оболочки средней длины подчиняются условию [4]:

$$\varepsilon^{1/2} \max(K - K^{-1}) \leq \left(\frac{\pi r}{l}\right)^2 \leq \varepsilon^{-1/2} \min(K - K^{-1}), \quad K = \left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{1/2}$$

Выполнение этих условий совместно с условием  $(\delta/r)^2 \ll 1$  гарантирует справедливость использования теории пологих оболочек и данного исследования.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Даревский В. М. Устойчивость оболочек, близких по форме к цилиндрической // Проблемы расчета пространственных конструкций. 1980. С. 35—45.
2. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник. Т. 3 / Под ред. И. А. Биргера, Я. И. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. 567 с.
3. Товстик П. Е. К вопросу об устойчивости цилиндрической оболочки при кручении // Прикл. механика. 1980. Т. 16. № 9. С. 132—134.
4. Даревский В. М., Кукуджанов С. Н. Устойчивость цилиндрической ортотропной оболочки при кручении и нормальном давлении. Прочность цилиндрических оболочек. М.: Оборонгиз, 1959. С. 95—107.
5. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. Физматгиз, 1967. 984 с.
6. Зюзин В. А. Влияние условий закрепления торцов оболочки на величину критического внешнего давления // Тр. VI Всес. конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1966. С. 415—418.
7. Товстик П. Е. Устойчивость оболочек, близких к цилиндрическим // Вестник ЛГУ. 1990. Сер. А. № 1. С. 76—91.
8. Муштарь Х. М., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Таткнигоиздат, 1957. 431 с.
9. Даревский В. М. Устойчивость цилиндрической оболочки при одновременном действии крутящих моментов и нормального давления // Изв. АН ОТН. 1957. № 11. С. 137—147.