

УДК 624.07 : 534.1

© 1995 г. В. И. БУЯКАС

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В БОЛЬШИХ УПРАВЛЯЕМЫХ КОНСТРУКЦИЯХ

Исследуется кинематика распространения возмущения, возникающего при регулировании формы больших конструкций статически определимого типа. Эти возмущения носят гармонический характер и названы в работе кинематическими волнами. Строятся и анализируются математические модели кинематики одномерных линейных и циклических структур. Демонстрируется существование кинематических волн различных видов. Приводится модель, описывающая искажение формы трансформируемого зеркала радиотелескопа, вызванного ошибками системы фиксации при раскрытии.

При проектировании крупногабаритных космических сооружений широкое распространение получили регулярные механические структуры — структуры которые образуются из большого числа однотипных повторяющихся элементов [1]. В ряде случаев, например при разработке крупногабаритных отражателей, больших зеркальных антенн, фазированных решеток, предъявляются высокие требования к точности конструкции. В связи с этим обсуждаются вопросы наземной юстировки и активного управления формой конструкции на орбите [2]. В [3—5] рассматривалась возможность использования для решения этих задач статически определимых регулярных управляемых структур.

Рассматриваемые конструкции занимают разделяющее положение между механизмами и статически неопределимыми системами — освобождение произвольной связи превращает такую конструкцию в механизм с одной степенью свободы, введение дополнительной связи приводит к статически неопределимой системе. Поэтому, во-первых, выполняя часть связей системы регулируемы, можно управлять формой конструкции, развивая малые усилия в исполнительных механизмах, во-вторых, при температурных деформациях в конструкции не возникают упругие напряжения.

Оказывается, однако, что отклик на единичное управляющее воздействие в статически определимых регулярных управляемых конструкциях носит нелокальный характер — изменение связей в некоторой области возмущает состояние удаленных элементов. Возникающие возмущения имеют гармонический вид, обусловлены кинематикой взаимодействия элементов конструкции и названы в работе кинематическими волнами. В работе исследуется кинематика распространения возмущений в одномерных регулярных статически определимых структурах. Рассматриваются линейные системы типа стержневой балки и циклические структуры, возникающие при исследовании осесимметричных конструкций.

1. Простейшая статически определимая структура. Напомним необходимые условия статической определимости. Для пространственной конструкции, состоящей из s стержней, связанных между собой в n узлах сферическими шарнирами, это условие имеет вид

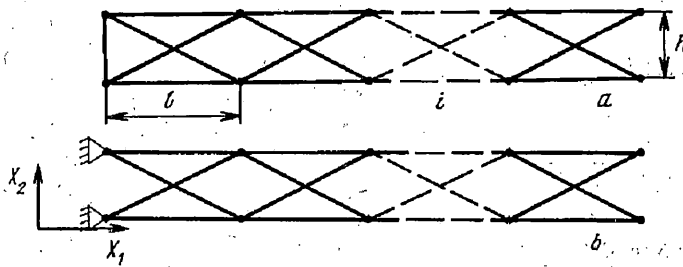
$$s = 3n - 6 \quad (1.1)$$

Для плоской стержневой задачи

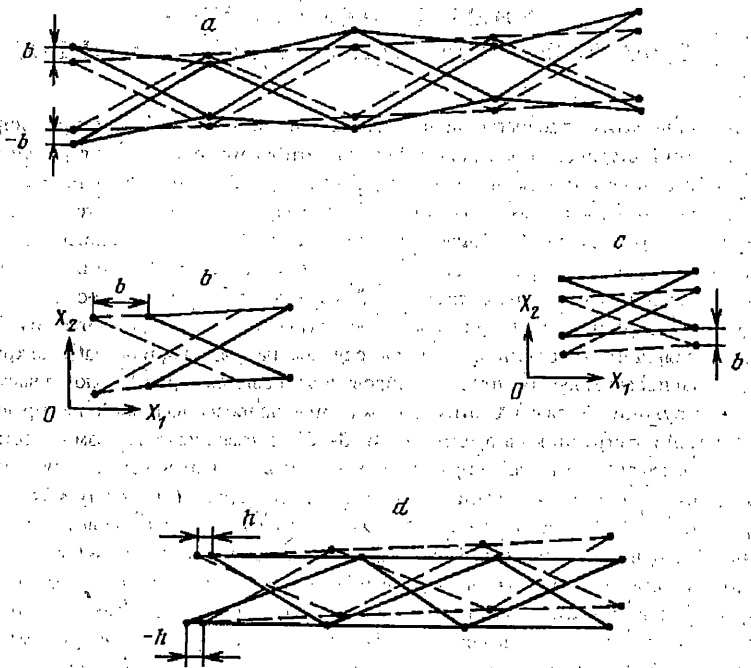
$$s = 2n - 3 \quad (1.2)$$

Если пространственная конструкция построена из n модулей, объединенных между собой с помощью s связей, где каждый модуль рассматривается как твердое тело, то

$$s = 6n - 6 \quad (1.3)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 1, *a* показана простейшая стержневая структура, удовлетворяющая условию (1.1) и эквивалентная ей в кинематическом отношении система с закрепленным левым краем (фиг. 1, *b*), которая будет далее исследоваться.

Здесь два узла *i*-го ряда (слоя) соединены с узлами (*i* - 1)-го ряда четырьмя стержнями. Стержни связаны между собой сферическими шарнирами. Конструкция геометрически неизменяема. Смещение узлов 1-го ряда (либо изменение длин стержней 1-го пролета) сопровождается смещением узлов 2-го ряда, что в свою очередь приводит к изменению положения последующих узлов — по конструкции распространяется кинематическая волна.

Опишем кинематику малых смещений узлов конструкции. Уравнения связей имеют вид:

$$\|X^r(i) - X^s(i-1)\| = l_{r,s} \quad (r, s = 1, 2; i = 2, \dots, m) \quad (1.4)$$

где вектор $X^r(i) = (X_1^r(i), X_2^r(i))$ задает положение *r*-го узла *i*-го ряда.

Линеаризация (1.4) в окрестности невозмущенного состояния конструкции приводит к системе разностных уравнений

$$A_1 y(i) + A_2 y(i-1) = 0 \quad (1.5)$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} l & 0 & 0 & 0 \\ l & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & h \\ 0 & 0 & l & 0 \end{vmatrix}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & h \\ 1 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & 0 \end{vmatrix}$$

где 4-вектор $y(i) = (y_1, \dots, y_4) = (dX_1^i, \dots, dX_2^i)$ определяет малые смещения узлов i -го ряда, (y_1, y_2) — соответствует верхнему узлу, (y_3, y_4) — нижнему. Параметры l и h задают длину и высоту пролета. Поскольку $|A_1| \neq 0$, матрица $(A_1)^{-1}$ существует и система (1.5) приводится к виду

$$y(i) = - (A_1)^{-1} A_2 y(i-1) = B y(i-1) \quad (1.6)$$

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -l/h & 0 & l/h & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -l/h & 1 & l/h & 0 \end{vmatrix}$$

Найдем собственные значения и собственные вектора матрицы B . Характеристическое уравнение имеет вид

$$|B - \lambda E| = (1 - \lambda)^2 (\lambda^2 - 1) = 0$$

Собственные значения $\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3,4} = 1$. Первому собственному значению соответствует собственный вектор $b^1 = (0, b, 0, b)$. Тогда из (1.6) находим, что при начальном возмущении $y^1(1) = b^1$ смещение узлов i -го ряда определяется выражением

$$y^1(i) = (-1)^{(i-1)} b^1 \quad (i = 2, 3, \dots, m) \quad (1.7)$$

По конструкции распространяется кинематическая волна, показанная на фиг. 2, а.

Собственному значению $\lambda_2 = 1$ и собственному вектору $b^2 = (b, 0, b, 0)$ соответствует сдвиг конструкции в целом вдоль оси OX_1 (фиг. 2, в):

$$y^2(i) = b^2, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m).$$

Кратным собственным значениям $\lambda_{3,4} = 1$ отвечает инвариантное подпространство, построенное на векторах $b^3 = (0, -2l, 0, -2l)$ и $b^4 = (h, 0, h, 0)$. Приводя матрицу B к Жордановой форме, можно показать, что начальное возмущение $y^3(1) = b^3$ сопровождается сдвигом конструкции в целом в направлении оси OX_2 (фиг. 2, с): $y^3(i) = y^3(1) = b^3$ ($i = 1, 2, 3, \dots, m$), а начальному возмущению $y^4(1) = b^4$ отвечает сдвиговая кинематическая волна (фиг. 2, d):

$$y^4(2) = b^3 + b^4, \quad y^4(3) = 2b^3 + b^4, \quad y^4(i) = (i-1)b^3 + b^4 \quad (i = 3, 4, \dots, m)$$

Произвольное начальное возмущение может быть разложено по собственным векторам b^1, b^2, b^3, b^4 , и соответствующее изменение формы конструкции представлено в виде суперпозиции рассмотренных элементарных решений.

2. Линейные стержневые конструкции. В общем случае стержневая одномерная статически определимая конструкция содержит n узлов в каждом ряду и $3n$ стержней, связывающих эти узлы между собой и с узлами предыдущего ряда ($2n$ связей в плоской задаче). Уравнения связей имеет вид (1.4). Их линеаризация в окрестности — невозмущенного состояния конструкции приводит к системе

$$A_1 y(i) + A_2 y(i-1) = 0 \quad (2.1)$$

где $3n$ -вектор $y(i) = (y_1, y_2, \dots, y_{3n})$ определяет смещение узлов i -го ряда (в плоской задаче $2n$ -вектор).

Конструкция геометрически не изменяема, поэтому $|A_1| \neq 0$ и матрица $(A_1)^{-1}$ существует. Тогда (2.1) можно переписать в виде системы

$$y(i) = - (A_1)^{-1} A_2 y(i-1) = B y(i-1) \quad (2.2)$$

описывающей смещение узлов конструкции при изменении положения узлов 1-го ряда.

Пусть собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_{3n}$ матрицы B различны. Тогда каждому собственному вектору $b^j = (b'_1, \dots, b'_{3n})$ матрицы B соответствует своя мода кинематических волн. Из (2.2) находим форму соответствующей моды $y^j(1) = b^j$; $y^j(i) = (\lambda_j)^{(i-1)} y^j(1)$ ($j = 1, 2, \dots, 3k$). Отсюда в частности следует, что при $|\lambda_j| < 1$ мода устойчива — величина отклонения убывает при удалении узла от места возмущения.

Произвольное возмущение положения узлов 1-го ряда приводит к кинематической волне представимой в виде суперпозиции элементарных мод

$$y(1) = \sum_{j=1}^{3n} c_j b^j, \quad y(i) = \sum_{j=1}^{3n} \lambda_j^{(i-1)} c_j b^j = \sum_{j=1}^{3n} c_j y^j(i)$$

Рассмотренный выше пример показывает, что наличие кратных корней усложняет картину и приводит к возникновению сдвиговых деформаций.

3. Устойчивые и неустойчивые моды. Следующий пример демонстрирует интересную возможность одновременного существования в конструкции устойчивых и неустойчивых мод. Рассмотрим статистически определенную схему на фиг. 3, а. Кинематика малых смещений описывается системой разностных уравнений (2.1), где b -вектор $y(i) = (y_1(i), y_2(i), \dots, y_6(i)) = (y^1(i), y^2(i), y^3(i))$ определяет состояние узлов i -го ряда. Вектор $y^k(i) = (y_1^k(i), y_2^k(i)) = (dX_1^k, dX_2^k)$ — ($k = 1, 2, 3$) задает смещение k -го узла i -го ряда.

Найдем продольные кинематические волны, которые удовлетворяют требованиям

$$y_1(i) = y_5(i), \quad y_2(i) = -y_6(i), \quad y_4(i) = 0 \quad (3.1)$$

Условия симметрии (3.1) снижают размерность исходной задачи. Из (2.1) выделяются три линейно независимых разностных уравнения

$$ly_2(i) + hy_2(i) = ly_3(i-1)$$

$$ly_1(i) + 2hy_2(i) = ly_1(i-1) - 2hy_2(i-1) \quad (3.2)$$

$$ly_3(i) = ly_1(i-1) - hy_2(i-1)$$

которые приведем к следующему виду:

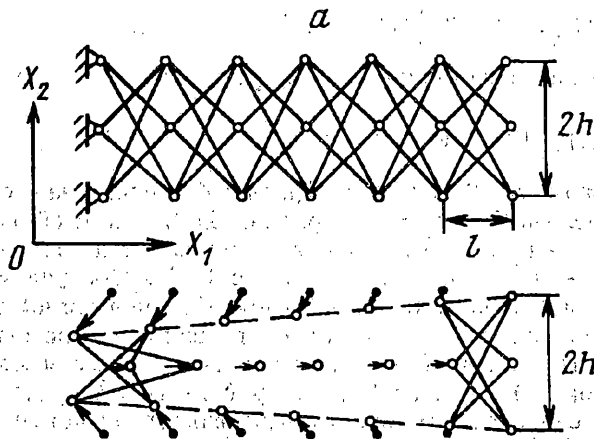
$$Dy(i) = Cy(i-1) \quad (3.3)$$

$$D = \begin{vmatrix} l & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & l \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} -l & 2h & 2l \\ l & -2h & -l \\ l & -h & 0 \end{vmatrix}$$

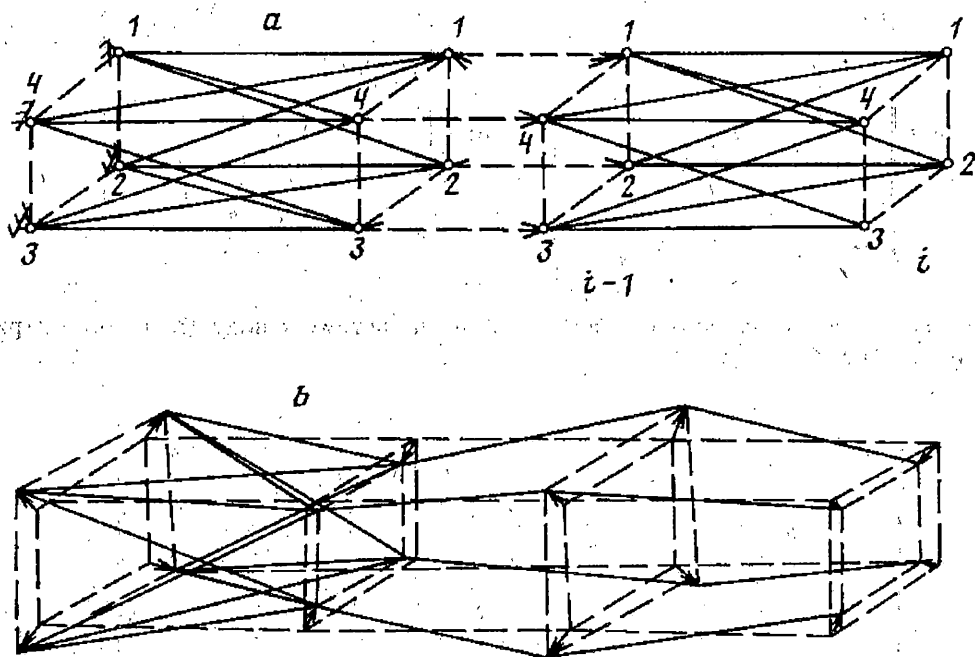
Здесь и далее будем называть число λ и вектор $b = (b_1, \dots, b_{3n})$ собственным значением и собственным вектором системы $Dy = Cy$, если для них выполняются тождества $|\lambda D - C| = 0$, $\lambda Db = Cb$.

С точки зрения линейной алгебры определение не является каноническим — диагональная матрица D не единичная — однако в рассматриваемой задаче такой подход легко обнаруживает независимость собственных значений λ от h и l — параметров регулярной структуры. Действительно, запишем характеристическое уравнение

$$|C - \lambda D| = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 1) = 0 \quad (3.4)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Используя (3.1), (3.2), (3.3), находим, собственные значения и собственные вектора исходной задачи

$$\lambda_1 = 1, \quad b^1 = (b, 0, b, 0, b, 0) \quad (3.5)$$

$$\lambda_2 = -2 + \sqrt{3} \approx 0,3, \quad b^2 = (-2hb, -\sqrt{3}lb, hb, 0, -2hb, \sqrt{3}lb) \quad (3.6)$$

$$\lambda_3 = -2 - \sqrt{3} \approx -3,7, \quad b^3 = (-2hb, \sqrt{3}lb, hb, 0, -2hb, -\sqrt{3}lb) \quad (3.7)$$

Паре (3.5) отвечает сдвиг конструкции в целом в направлении оси Ox_1 , паре (3.6) — устойчивая кинематическая мода $|\lambda_2| < 1$ (фиг. 3, б):

На фиг. 4, *b* показана кинематическая волна $y^*(i) = (-1)^{(i-1)}y(1)$, соответствующая начальному возмущению $y(1) = b^1 + b^2 - b^3 - b^4$.

Собственные значения $\lambda_{5,6,\dots,12} = 1$ системы разбиваются на 4 пары, каждая из которых выделяет 2-мерное инвариантное подпространство, построенное на соответствующих векторах.

$$\lambda_{5,6} = 1: b^5 = (0, -lb, -lb, 0, 0, -lb, 0, 0, 0, 0, -lb, 0) \quad (4.2)$$

$$b^6 = (b, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$\lambda_{7,8} = 1: b^7 = (0, 0, lb, 0, -lb, lb, 0, -lb, 0, 0, 0, 0) \quad (4.3)$$

$$b^8 = (0, 0, 0, b, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$\lambda_{9,10} = 1: b^9 = (0, 0, 0, 0, lb, 0, 0, lb, b, 0, 0, lb) \quad (4.4)$$

$$b^{10} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, b, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$\lambda_{11,12} = 1: b^{11} = (0, -lb, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -lb, 0, lb, lb) \quad (4.5)$$

$$b^{12} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, b, 0)$$

Приводя систему к Жордановой форме, можно показать, что если $y(i-1) = b^5$, то $y(i) = b^5$, а если $y(i-1) = b^6$, то $y(i) = b^5 + b^6$ ($i = 1, 2, \dots$).

Тогда линейному подпространству (4.2) соответствуют две кинематические моды:

$$y^5(i) = y(1) = b^5 \text{ при } y(1) = b^5 \quad (4.6)$$

$$y^6(i) = (i-1)b^5 + b^6 \text{ при } y(1) = b^6$$

Аналогично для подпространств, построенных на векторах (4.3)—(4.5), возникают моды

$$y^k(i) = y(1) = b^k \text{ при } y(1) = b^k$$

$$y^{(k+1)}(i) = (i-1)b^k + b^{(k+1)} \text{ при } y(1) = b^{(k+1)} \quad (k = 7, 9, 11) \quad (4.7)$$

Произвольному начальному возмущению узлов 1-го пролета соответствует кинематическая волна, которая представляется суперпозицией кинематических мод (4.1), (4.6), (4.7).

5. Простейшая осесимметричная структура. Система из n радиальных и n граничных стержней, связанных между собой и с центральным кругом согласно фиг. 5 образуют плоскую статически определимую конструкцию. Найдем изменение ее формы при малых изменениях длин граничных стержней.

Положение точек соединения элементов конструкции зададим векторами $x^1(i) = (x_1^1(i), x_2^1(i))$, $x^2(i) = (x_1^2(i), x_2^2(i))$, $c(i) = (c_1(i), c_2(i))$, где i — номер радиального стержня.

Пусть α_i — угол между направлением i -го радиального стержня и осью OX_1 . Запишем уравнения связи между соседними радиальными стержнями

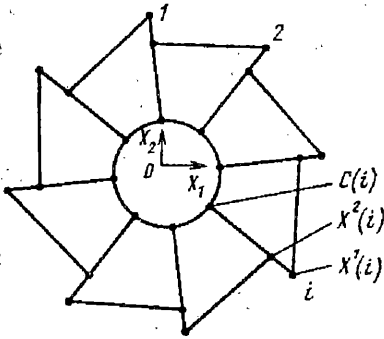
$$\varphi_i(\alpha_i, \alpha_{i-1}) = \|x^1(i) - x^2(i-1)\| = l_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (5.1)$$

$$x^1(0) = x^1(m), \quad x^2(0) = x^2(m), \quad c(0) = c(m), \quad \alpha_0 = \alpha_m$$

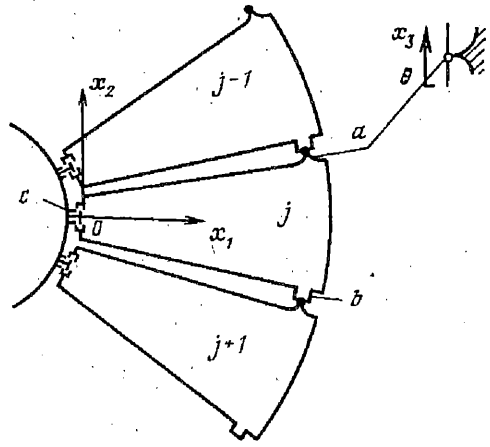
$$x_1^1(i) = c_1(i) + r_1 \cos \alpha_i, \quad x_1^2(i) = c_1(i) + r_2 \cos \alpha_i$$

$$x_2^1(i) = c_2(i) + r_1 \sin \alpha_i, \quad x_2^2(i) = c_2(i) + r_2 \sin \alpha_i$$

$$r_1 = \|x^1(i) - c(i)\|, \quad r_2 = \|x^2(i) - c(i)\|$$



Фиг. 5



Фиг. 6

где l — длина i -го граничного стержня. Линеаризация уравнений (5.1) в окрестности невозмущенного состояния конструкции приводит к системе

$$Ay = b \quad (5.2)$$

где матрица A циклическая

$$A = \begin{vmatrix} k_0 & 0 & 0 & k_1 \\ k_1 & k_0 & 0 & 0 \\ 0 & & k_1 & k_0 \end{vmatrix}$$

$$k_0 = \left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_i} \right|_* = r_i(a(i), n(i)), \quad k_1 = \left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_{i-1}} \right|_* = r_2(a(i), n(i-1))$$

$$a(i) = (x^1(i) - x^2(i-1)) \Big|_*, \quad n(i) = (-\sin \alpha_i, \cos \alpha_i) \Big|_*$$

где вектор $y = (y_1, \dots, y_m) = (d\alpha_1, \dots, d\alpha_m)$ определяет изменение формы конструкции, вызванное изменением длин граничных стержней $b = (b_1, \dots, b_m) = (dl_1, \dots, dl_m)$. Звездочка указывает, что значение выражения вычисляется для невозмущенного состояния конструкции.

Собственные значения и собственные вектора матрицы A известны [6]:

$$\lambda_j = k_0 + \varepsilon^j k_1, \quad \varepsilon = \exp(i2\pi/m) \quad (5.3)$$

$$f^j = (\varepsilon^j, \varepsilon^{2j}, \dots, \varepsilon^{mj}) \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (5.4)$$

Вектора f^j являются строками (столбцами) матрицы дискретного преобразования Фурье. Из (5.3) в частности следует, при $k_0 = k_1$ выполнено условие $|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_m \neq 0$, т. е. несимметричная конструкция геометрически неизменяема.

Разлагая вектор b по собственным векторам матрицы A :

$$b = \sum_{j=1}^m p_j f^j, \quad p_j = (b, f^j) \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

и учитывая, что $A^{f^j} = \lambda_j^{f^j}$, получаем Фурье представление для возмущенного состояния конструкции

$$y = \sum_j \frac{P_j}{\lambda_j} f^j \quad (5.5)$$

В изображенной на фиг. 5 схеме, где $n = 8$, $\lambda_j = k_0 + \varepsilon^j k_1$, $\varepsilon = \exp(i\pi/4)$, $f^j = (\varepsilon^j, \varepsilon^{2j}, \dots, 1)$ и для постоянного смещения (0-я гармоника), вызванного единичным возмущением $b = (1, 0, 0, \dots, 0)$ находим

$$a^0 = \frac{\sqrt{2}}{4(k_0 + k_1)} (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

Для 1-й гармоники, состоящей из двух компонент (a^{11} , a^{12}), вычисления дают

$$a^{11} = \frac{k_0}{16(k_0^2 + 2k_0k_1 + k_1^2)} (1, 0, -1, -\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2})$$

$$a^{12} = \frac{(k_0 + 2k_1)}{16(k_0^2 + 2k_0k_1 + k_1^2)} (1, \sqrt{2}, 1, 0, -1, -\sqrt{2}, -1, 0)$$

6. Циклические структуры. Кинематика малых смещений произвольной осесимметричной статически определимой конструкции описывается линейной системой (5.2), причем матрица A имеет блочно-циклический вид

$$A = \begin{pmatrix} K_0 & 0 & \dots & \dots & K_1 \\ K_1 & K_0 & 0 & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & K_1 & K_0 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

Здесь число диагональных блоков m равно числу повторяющихся элементов осесимметричной конструкции, а размерность ($n \cdot n$) квадратных матриц K_0 и K_1 определяется числом связей между этими элементами.

Неособым линейным преобразованием

$$A = (F_m \otimes E_n)^T A (F_m \otimes E_n) \quad (6.2)$$

где F_m — матрица дискретного преобразования Фурье, размерности ($m \times m$):

$$F_m = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon^2 & \dots & \varepsilon^m \\ \varepsilon^j & \varepsilon^{2j} & \dots & \varepsilon^{mj} \\ \varepsilon^m & \varepsilon^{2m} & \dots & \varepsilon^{m \cdot m} \end{pmatrix}$$

где E_n — единичная матрица ($n \times n$), \otimes — знак прямого произведения, матрица A приводится к блочно-диагональному виду [7]:

$$A' = \begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & D_2 & \\ 0 & & D_m \end{pmatrix}$$

Матрицы D_1, D_2, \dots, D_m размерности ($n \times n$) имеют вид $D_j = B_0 + \varepsilon^j B_1$, $\varepsilon = \exp(i2\pi/m)$ ($j = 1, 2, \dots, m$).

Вычисляя собственные значения матриц D_j ($j = 1, 2, \dots, m$), совпадающие с собственными значениями матрицы A и находя собственные вектора матрицы A , можно построить Фурье представление возмущенного состояния конструкции аналогичное (5.5). При этом анализ кинематики системы размерности ($n \cdot n$) сводится к исследованию m подсистем n -го порядка.

7. Трансформируемое зеркало космического радиотелескопа. Реализация ряда

перспективных научно-технических проектов предполагает создание в космическом пространстве больших зеркальных антенн. Ограниченные возможности средств доставки не позволяют выводить такие зеркала на орбиту в рабочем состоянии. Поэтому разрабатываются конструкции трансформируемых антенн, которые могут находиться в двух положениях — транспортном и рабочем. Габариты антенны в транспортном состоянии позволяют разместить ее под обтекателем ракеты. После вывода на орбиту система раскрытия переводит зеркало в рабочее положение.

В проектах Радиоастрон [8], FIRST [9] и др. [10] трансформируемое зеркало представляет собой твердотельную конструкцию, состоящую из центрального зеркала и набора лепестков. После раскрытия система фиксации с помощью специальных замков связывает попарно соседние лепестки, образуя дополнительное кольцо жесткости.

Антенна коротковолнового диапазона должна быть выполнена с высокой степенью точности, причем качество антенны тем выше, чем ближе форма отражающей поверхности к эталонной. В многолепестковых конструкциях из-за взаимного влияния отражающих элементов друг на друга через систему связей возможно накопление ошибок, вызванных малыми неточностями фиксации при раскрытии и температурных деформациях. Поэтому конструкция системы фиксации (способ соединения лепестков) наряду с технологией изготовления отражающих элементов — лепестков и центрального зеркала — является важнейшим фактором, определяющим качество раскрываемой антенны.

Ниже строится и анализируется математическая модель, описывающая изменение формы рабочего состояния многолепесткового зеркала, вызванного ошибками системы фиксации, при статически определенном характере связей между отражающими элементами.

На фиг. 6 приведена кинематическая схема рассматриваемой осесимметричной конструкции. Двустепенной шарнир c , используемый для перемещения лепестка из транспортного положения в рабочее, вносит в систему четыре кинематических связи. Замок a или b , соединяющий соседние лепестки, включает в себя сферический шарнир и устройство, обеспечивающее свободное взаимное перемещение лепестков в точке соединения в направлении оси ox_3 . Каждый замок вносит в систему две кинематические связи.

Таким образом общее число связей в конструкции, состоящей из m лепестков и центрального зеркала, равно $6m$, т. е. необходимое условие статической определенности (3) выполнено и каждый лепесток при исследовании кинематики может рассматриваться как твердое тело.

Направления осей двустепенного шарнира в локальной системе отсчета $ox_1x_2x_3(j)$, связанной с невозмущенным j -м лепестком, определяются векторами $\omega^1 = (1, 0, 0)$, $\omega^2 = (0, 1, 0)$. Изменение формы конструкции при ошибках фиксации зададим углами поворотов лепестков вокруг этих осей: $u(j) = (u_1(j), u_2(j)) = (d\alpha_1(j), d\alpha_2(j))$.

Найдем уравнения связей. В системе отсчета $ox_1x_2x_3(j)$ смещение $V^a(j)$, $V^b(j)$ точек a и b (места расположения замков) j -го лепестка описываются выражениями

$$V^a(j) = [\omega^1, a] u_1(j) + [\omega^2, a] u_2(j) = A_1 u(j),$$

$$V^b(j) = [\omega^1, b] u_1(j) + [\omega^2, b] u_2(j) = A_2 u(j) \quad (7.1)$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} 0 & a_3 \\ -a_3 & 0 \\ a_2 & -a_1 \end{vmatrix}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 0 & a_3 \\ -a_3 & 0 \\ -a_2 & -a_1 \end{vmatrix}$$

Здесь вектора $a = (a_1, a_2, a_3)$ и $b = (b_1, b_2, b_3)$ задают положения точек a и b , в невозмущенном состоянии, $[]$ — векторное произведение.

Обозначим через $\bar{V}^b(j-1)$ вектор смещения точки $b(j-1)$ -го лепестка в системе отсчета $ox_1x_2x_3(j)$, m — число лепестков.

$$\bar{V}^b(j-1) = C(\alpha) V^b(j-1), \quad \alpha = 2\pi/m \quad (7.2)$$

$$C(\alpha) = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Выбранная конструкция замков при точном раскрытии обеспечивает выполнение равенств $V_1^a(j) = \bar{V}_1^b(j-1)$, $V_2^a(j) = \bar{V}_2^b(j-1)$. Уравнения связей с учетом ошибок фиксации принимают вид

$$V_1^a(j) - \bar{V}_1^b(j-1) = b_1(j), \quad V_2^a(j) - \bar{V}_2^b(j-1) = b_2(j) \quad (7.3)$$

где $b_1(j)$, $b_2(j)$ — ошибки фиксации в направлении ox_1 и ox_2 . Подставляя (7.1) и (7.2) в (7.3), приводим уравнения связи к виду (5.2):

$$K_0 u(j) + K_1 u(j-1) = b(j) \quad (j = 1, 2, m) \quad (7.4)$$

$$b = (b(1), \dots, b(j), \dots, b(m)), \quad b(j) = (b_1(j), b_2(j)),$$

$$u(m) = u(0), \quad b(m) = b(0)$$

где блоки K_0 и K_1 блочно-циклической матрицы (6.1) принимают значения

$$K_0 = \begin{vmatrix} 0 & a_3 \\ -a_3 & 0 \end{vmatrix}, \quad K_1 = \begin{vmatrix} -a_3 \sin \alpha & -a_3 \cos \alpha \\ a_3 \cos \alpha & -a_3 \sin \alpha \end{vmatrix}$$

Преобразование (6.2) приводит систему к блочно диагональному виду. Запишем диагональные блоки:

$$D_j = K_0 + \varepsilon^j K_1 = \begin{vmatrix} -a_3 \varepsilon^{j/2} \sin \alpha & a_3 (1 - \varepsilon^{j/2} \cos \alpha) \\ -a_3 (1 - \varepsilon^{j/2} \cos \alpha) & -a_3 \varepsilon^{j/2} \cos \alpha \end{vmatrix}$$

Собственные значения матриц D_j совпадают с собственными значениями матрицы A системы (7.4). Имеем

$$\lambda_1^j = a_3 [\varepsilon^{j/2} \sin \alpha + (\varepsilon^{j/2} \cos \alpha - 1) i], \quad \lambda_2^j = a_3 [\varepsilon^{j/2} \sin \alpha - (\varepsilon^{j/2} \cos \alpha - 1) i]$$

Отсюда видно, что для всех собственных значений $\lambda_{1,2}^j \neq 0$. Следовательно $|A| \neq 0$ и рассматриваемая конструкция геометрически неизменяема. Собственные вектора исследуемой системы имеют вид

$$f^1 = (\varepsilon^j, 0, \varepsilon^{2j}, 0, \dots, \varepsilon^{mj}, 0), \quad f^2 = (0, \varepsilon^j, 0, \varepsilon^{2j}, \dots, 0, \varepsilon^m) \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

Теперь, используя (5.5), можно точно вычислить возмущенное состояние трансформируемого зеркала при произвольных ошибках фиксации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kline R. Constructions of large structures in space//J. Astron. Sci. 1979. V. 27. № 4. P. 401—418.
2. Иафта В. Optimum placement of controls for static deformations of space structures//AIAA Journal. 1984. V. 22. № 9. P. 1293—1298.
3. Буякас В. И. О стабилизации формы наращиваемой поверхности//Космич. исследования. 1979. Т. 17. № 4. С. 547—558.
4. Anderson M. S., Nimmo N. A. Dynamic characteristics of statically determinate space-truss platforms//J. Spfcecraft and Rockets. 1986. V. 23. № 3. P. 303—307.

5. Буякас В. И. Многозеркальные управляемые поверхности//Докл. АН 1990. Т. 311. № 1. С. 54—58.
6. Маркус М., Мунк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972. 232 с.
7. Davis P. J. Circulant Matrices, N. Y.: J. Wiley, 1979. 250 p.
8. Kardashev N. S., Slysh V. I. The Radioastron project//The impact of VLBI on Astrophysics and Geophysics, Proc. Intern. Astron. Union symp. Dordrecht: Kluwer, 1988. P. 433—440.
9. Helwig G. Analysis of high precision composite sandwich antennas//Proc. 2nd ESA Workshop on Mechanical technology for antennas, Noordwijk: Europ. Space Agency, 1986, P. 51—55.
10. Tsutsumi N. S., Kasahara A. Study on solid surface, deployable antenna reflector//Proc. of the 2nd ESA Workshop on Mechanical technology for antennas, Noordwijk: Europ. Space Agency, 1986. P. 41—45.

Москва

Поступила в редакцию
1.VI.1992