

УДК 531.31

© 1995 г. Ю. И. НЕЙМАРК

## ЕЩЕ РАЗ О ПАРАДОКСАХ ПЭНЛЕВЕ

На примере механической системы Пэнлеве — Клейна показывается, что известные парадоксы Пэнлеве устраняются не только при учете нормальной упругости, но и тангенциальной и что на динамику существенное влияние оказывает их соотношение.

1. Постановка задачи. П. Пэнлеве [1] привел примеры, когда составление по правилам механики уравнений движения твердых тел при наличии кулоновского трения приводит к парадоксальному результату об их неоднозначности или противоречивости. В силу этого по мнению Пэнлеве «Между динамикой твердого тела и законами Кулона имеется логическое противоречие» [1]. Дискуссия с участием помимо П. Пэнлеве, Л. Лекорню, Ф. Клейна, Л. Прандтля, Р. Мизеса, Г. Гамеля и других [1] пришла к выводу, что эти парадоксы устраняются, если отказаться от абсолютной жесткости твердых тел и ввести конечную жесткость, а затем в полученных решениях перейти к пределу, устремив жесткость к бесконечности. Применительно к системе Пэнлеве — Клейна такой план реализовался Ф. Пфайфером [1], Н. В. Бугениным [2], а применительно к системе с произвольным числом степеней свободы Ле Суан Анем [3]. Затем эти исследования на примере Пэнлеве — Клейна были дополнены в [4] учетом диссипации в упруго деформируемом стержне и тем самым еще одной степени свободы.

В процессе дискуссии высказывались и другие соображения. Так, Л. Лекорню [1] считал, что парадоксы Пэнлеве разрешаются, если принять, что сила трения возникает не сразу. При этом от ссылался как на экспериментальные факты, так и на соображения о нормальных и тангенциальных деформациях тел в месте их контакта. В заключительной стадии дискуссии соображения Л. Лекорню были проигнорированы и возобладала общая и бесспорная концепция Л. Прандтля, подкрепленная численными расчетами и экспериментами Ф. Пфайфера [1]. По этому пути пошли дальнейшие указанные выше исследования и наткнулись на математические трудности, поскольку учет упругости твердых тел приводил к повышению порядка уравнений движения, а его понижение при стремлении жесткости к бесконечности — к необходимости использования теории сингулярных возмущений дифференциальных уравнений.

В публикуемой работе на примере Пэнлеве — Клейна показывается, что учет тангенциальной упругости также устраняет парадоксы Пэнлеве, не приводя к дополнительным трудностям при составлении уравнений движения. Это, с одной стороны, дополняет предшествующие исследования, где учитывалась только нормальная упругость, а с другой — подтверждает точку зрения Л. Лекорню. При этом выясняется, что полная картина движения зависит от соотношения нормальной  $k_1$  и тангенциальной  $k_2$  жесткостей. Во всяком случае это так для двух крайних случаев  $k_1 < \infty$ ,  $k_2 = \infty$  и  $k_1 = \infty$ ,  $k_2 < \infty$ , первого рассмотренного ранее [1, 2, 4] и второго, рассматриваемого ниже.

2. Парадоксы Пэнлеве. Перейдем к рассмотрению примера Пэнлеве — Клейна, несколько обобщив его постановку.

Жесткий стержень длины  $2l$  и массы  $m$  может перемещаться своими концами по параллельным прямым, образуя с ними угол  $\alpha$ . Движение по одной направляющей без трения, по другой — с кулоновским трением. К стержню на расстоянии  $\Delta$  от его конца, находящегося на шероховатой направляющей, приложена вдоль направляющих сила  $F$ .

Пусть  $x$  координата перемещения стержня вдоль направляющих, а  $N$  величина нормальной реакции направляющих на стержень. Записывая уравнения движения центра масс и вращения вокруг центра масс, найдем

$$m\ddot{x} = F - k |N| \operatorname{sign} x \quad (2.1)$$

$$2Nl \cos \alpha - (l - \Delta) F \sin \alpha + kl |N| \operatorname{sign} x \sin \alpha = 0$$

Из второго уравнения (2.1) находим силу нормальной реакции

$$N = v (2 + k \operatorname{tg} \alpha \operatorname{sign} x \operatorname{sign} N)^{-1}, \quad v = (1 - \Delta/l) F \operatorname{tg} \alpha \quad (2.2)$$

Рассмотрим случаи  $x \geq 0$  и  $N \geq 0$  и найдем силу реакции  $N$  согласно (2.2) в каждом из случаев, записав их в виде таблицы:

$$\text{из } x > 0, N > 0 \text{ следует } N = v (2 + k \operatorname{tg} \alpha)^{-1}$$

$$\text{из } x > 0, N < 0 \text{ следует } N = v (2 - k \operatorname{tg} \alpha)^{-1}$$

$$\text{из } x < 0, N > 0 \text{ следует } N = v (2 - k \operatorname{tg} \alpha)^{-1}$$

$$\text{из } x < 0, N < 0 \text{ следует } N = v (2 + k \operatorname{tg} \alpha)^{-1}$$

Сила  $N$  из этой таблицы для возможности написания уравнений движения должна находиться однозначно. Однако, если  $v > 0$  (в примере Пэнлеве — Клейна  $\Delta = 0$ ), то, как следует из таблицы при  $x > 0$  и  $2 - k \operatorname{tg} \alpha < 0$  для  $N$ , имеется два решения ( $N > 0$  и  $N < 0$ ), а при  $x < 0$  и  $2 - k \operatorname{tg} \alpha < 0$  нет решения (из предложения  $N < 0$  следует  $N > 0$ , а из предложения  $N > 0$  следует  $N < 0$ ).

Если же  $v < 0$ , то при  $x > 0$  и  $2 - k \operatorname{tg} \alpha < 0$  нет решения, а при  $x < 0$  и  $2 - k \operatorname{tg} \alpha < 0$  — два решения. В этой двузначности и противоречивости и соответственно невозможности написать уравнения движения состоят парадоксы Пэнлеве.

3. Уравнения движения при учете тангенциальной упругости. Учтем тангенциальную упругость шероховатой направляющей, пренебрегая ее массой и демпфированием. В этих предположениях для смещения направляющей вдоль самой себя и оси  $ox$  на величину  $\xi$  необходима сила  $\mu \xi$  ( $\mu \gg 1$ ). Уравнения (2.1), (2.2) заменяются уравнениями

$$m\ddot{x} = F - \mu \xi$$

$$2Nl \cos \alpha - (l - \Delta) F \sin \alpha + \mu \xi \sin \alpha = 0 \quad (3.1)$$

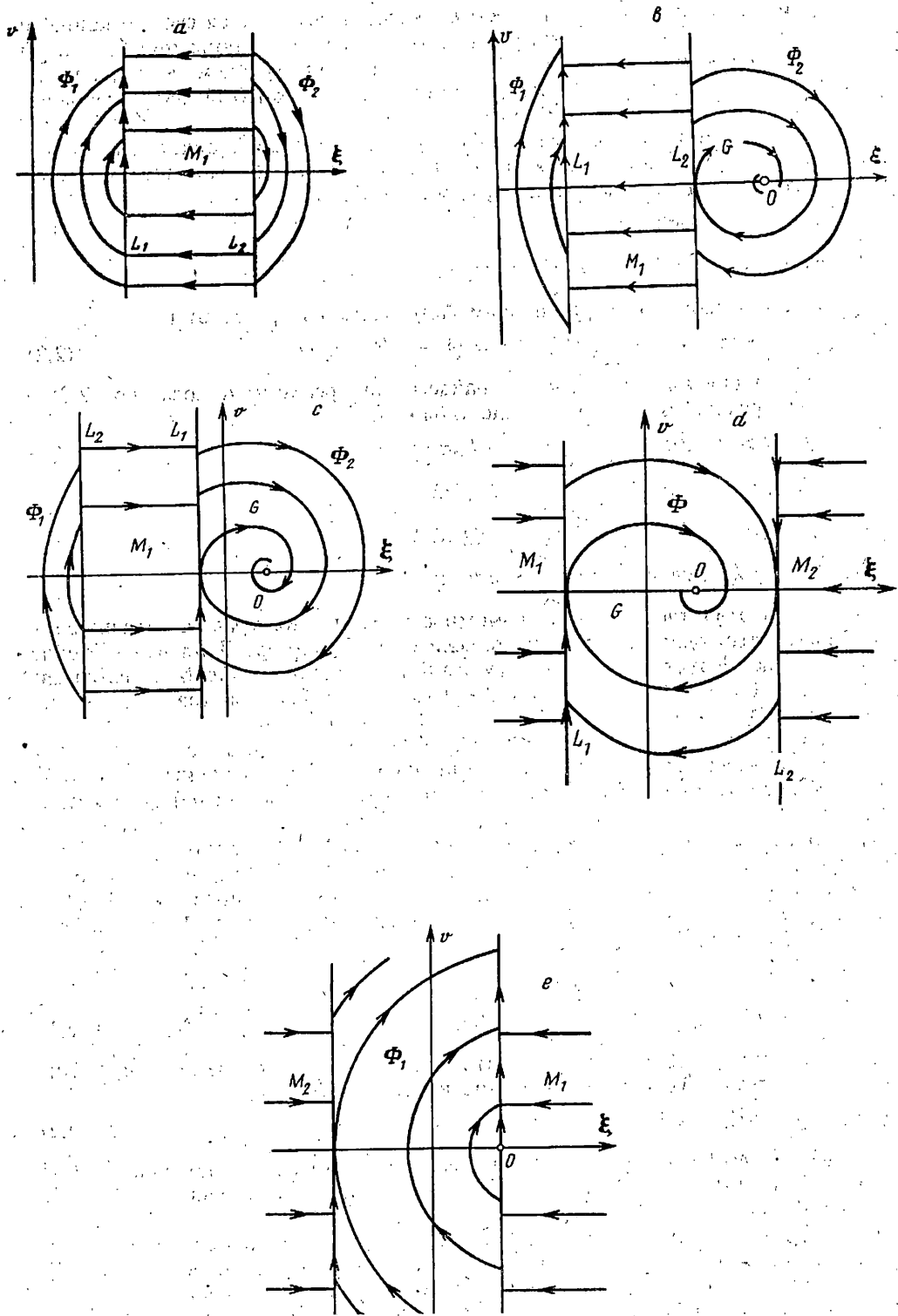
Кроме этого необходимо написать уравнение для изменения. При  $|\mu \xi| < k |N|$  отсутствует проскальзывание и поэтому

$$\xi = x \text{ при } |\mu \xi| < k |N| \quad (3.2)$$

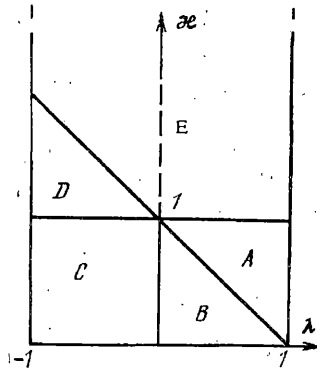
При  $\mu \xi < k |N|$  или  $\mu \xi < -k |N|$  происходит мгновенное изменение  $\xi$  до значений  $k\mu^{-1} |N|$  и  $-k\mu^{-1} |N|$  соответственно. Изменение  $\xi$  при  $|\mu \xi| = k |N|$  выяснится ниже при рассмотрении фазового портрета.

Пространство состояний рассматриваемой системы трехмерно (переменные  $x, \dot{x}, \xi$ ). Однако переменная  $x$  явно в уравнения движения не входит и поэтому можно ограничиться рассмотрением плоскости переменных  $v = \dot{x}$  и  $\xi$ .

4. Фазовые портреты. В зависимости от значений параметров  $\kappa = 2(k \operatorname{tg} \alpha)^{-1} \in [0, \infty)$  и  $\lambda = 1 - \Delta/l \in [-1, 1]$  возможно пять различных видов поведения фазовых траекторий, изображенных на фиг. 1. На фиг. 2 приведено разбиение плоскости параметров  $\kappa, \lambda$  на области, отвечающие этим разным



Фиг. 1



Фиг. 2

фазовым портретам. Фазовые портреты фиг. 1, *a*, *b*, *c*, *d* и *e* имеют место соответственно в области *A*, *B*, *C*, *D* и *E* фиг. 2.

На всех этих фазовых портретах области  $\Phi_s$  ( $s = 1$  либо  $s = 2$ ) отвечают движениям, для которых выполнено условие формулы (3.2), и в соответствии с этим имеют место уравнения

$$mv = F - \mu\xi, \quad \xi = v \quad (4.1)$$

В областях  $M_s$  ( $s = 1$  либо  $s = 2$ ) имеют место мгновенные изменения  $\xi$ , поскольку в них  $|\mu\xi| > k|N|$ . На линиях  $L_1$  и  $L_2$  стыковки фазовых траекторий областей  $\Phi_s$  и  $M_s$  возможны следующие случаи: с обеих сторон фазовые траектории с нее уходят; с одной стороны приходят, а с другой уходят; с обеих сторон приходят. Так, например, на фиг. 1, *a* первый случай имеет место на луче  $x > 0$  линии  $L_2$ , второй — на лучах  $x < 0$  линий  $L_1$  и  $L_2$  и третий — на луче  $x > 0$  линии  $L_1$ . В первом случае фазовая точка покидает линию  $L_s$ . Во втором пересекает ее в соответствии с движением входящих и уходящих фазовых траекторий. В третьем случае остается на линии  $L_s$  и ее движение по ней подчиняется уравнению

$$mv = F - \mu\xi_s \quad (4.2)$$

где  $\xi_s$  значение  $\xi$  на линии  $L_s$  ( $\xi_1 = \mu^{-1}(1 + \kappa)^{-1}\lambda F$ ,  $\xi_2 = \mu^{-1}(1 - \kappa)^{-1}\lambda F$ ). В областях *G* фиг. 1, *b*, *c* и *d* располагаются состояния равновесия *O* типа центр, которые, однако, заменены устойчивыми фокусами по соображениям, излагаемым ниже. Эти негрубые структуры типа центра (в остальном поведение фазовых траекторий грубое) возникли в связи с пренебрежением диссипацией при тангенциальных деформациях (смещениях  $\xi$ ) шероховатой направляющей. При сколь угодно малой диссипации состояние равновесия типа центр превращается в устойчивый фокус, поскольку уравнения (4.1) в областях  $\Phi_s$  при учете вязкого трения принимают вид  $mv = F - \mu\xi - h\xi, \xi = v$ , и при этом других качественных изменений фазового портрета не происходит. При начертании фазовых портретов (фиг. 1) и в дальнейшем изложении предполагается наличие диссипации.

В случае фазового портрета фиг. 1, *a* всякое движение переходит в равноускоренное в положительном направлении оси *ox*. Этот переход может сопровождаться одним или двумя ударами, соответствующими движениям в областях  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ . В случае фазового портрета фиг. 1, *b* имеется два установившихся движения: равноускоренное движение и устойчивое равновесие *O* с конечной, неограниченно уменьшающейся с ростом  $\mu$  областью притяжения *G*. У фазового портрета фиг. 1, *c* и *d* единственное установившееся движение — устойчивое состояние равновесия. В последнем случае фиг. 1, *e* всякое движение переходит в равноускоренное. Для всех фазовых портретов фиг. 1 возможны удары, т. е. очень быстрые при больших  $\mu$  изменения скорости *v*.

В сделанных выводах не все сходится с тем, что дает рассмотрение модели, учитывающей только нормальную упругость (упругость стержня). Это прежде всего относится к характеру ударов и их последовательности. В модели с учетом только нормальной упругости он носит неупругий характер [4], а в рассматриваемом случае это абсолютно упругий удар при неучете диссипации и частично упругий — при ее учете.

Наличие устойчивого равновесия на фиг. 1, *b* в силу крайней малости его области притяжения при больших  $\mu$  не позволяет определенно утверждать его физическую реализуемость. Однако определенные особенности типа непредсказуемой задержки движения наличие устойчивого равновесия может внести и при нерсальности его длительного существования. Подчеркнем, что все же окончательные выводы как выясняется в результате изложенного должны быть сделаны на основе рассмотрения более полной модели, учитывающей как нормальную, так и тангенциальную составляющие упругости. К настоящему времени рассмотрено только два крайних случая.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пэнлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. С. 316.
2. Бутенин Н. В. Рассмотрение «вырожденных» динамических систем с помощью гипотезы «скачка»//ПММ. 1948. Т. 12. Вып. 1. С. 3—22.
3. Ле Суан Ань. Парадоксы Пэнлеве и закон движения механических систем с кулоновым трением//ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 4. С. 520—529.
4. Фуфаев Н. А. Динамика системы в примере Пэнлеве — Клейна. О парадоксах Пэнлеве//Изв. АН СССР. МТТ. № 4. 1991. С. 48—53.

Нижегород

Поступила в редакцию  
21.I. 1993