

УДК 539.3.534.1

© 1995 г. Ю. А. РОССИХИН, М. В. ШИТИКОВА

## ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОСТИ НА ХАРАКТЕР ПРОТЕКАНИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ В ВИСЯЧЕЙ КОМБИНИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ

Экспериментальные данные, полученные при исследовании висячих мостов [1], показывают, что различные колебательные движения обладают разными коэффициентами затухания амплитуд, а порядок малости этих коэффициентов говорит о низкой демпфирующей способности висячих комбинированных систем, что приводит к перекачке энергии из одной парциальной системы в другую в течение длительного времени. Более того, как будет показано ниже, вязкость при внутреннем резонансе два к — одному имеет порядок амплитуды колебаний, а при внутреннем резонансе один к одному — квадрата амплитуды колебаний, т. е. более слабое воздействие сопровождается более слабым проявлением вязкости в системе. Иначе говоря, вязкость — это внутреннее свойство системы, которое проявляется по-разному в зависимости от характера и силы воздействия на систему. Публикуемая работа посвящена исследованию влияния вязкости и различных относительных уровней начальных амплитуд [2] на характер энергообмена между вертикальной и крутильной собственными формами колебаний при внутреннем резонансе два к одному и один к одному. При этом предполагается следующее: вязкость заметно проявляется при нулевом значении частотной расстройки; диссипация энергии висячей комбинированной системы определяется простой экспоненциальной зависимостью.

1. Предположим, что в колебательном процессе доминируют только две моды: мода  $n$  вертикальных колебаний с собственной частотой  $\omega_{0n}$  и мода  $m$  крутильных колебаний с собственной частотой  $\Omega_{0m}$ , причем,  $\omega_{0n} = 2\Omega_{0m}$  (внутренний резонанс два к одному) или  $\omega_{0n} = \Omega_{0m}$  (внутренний резонанс один к одному). В этих случаях разрешающая система уравнений в безразмерном виде запишется так:

$$\begin{aligned} x_{1n}'' + \alpha_{nm} x_{1n}' + \omega_{0n}^2 x_{1n} + a_{11}^n x_{1n}^2 + a_{22}^{nm} x_{2m}^2 + (b_{11}^n x_{1n}^2 + b_{22}^{nm} x_{2m}^2) x_{1n} &= 0 \\ x_{2m}'' + \alpha_{nm} x_{2m}' + \Omega_{0m}^2 x_{2m} + a_{12}^{nm} x_{1n} x_{2m} + (c_{11}^{nm} x_{1n}^2 + c_{22}^m x_{2m}^2) x_{2m} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $x_{1n}$ ,  $x_{2m}$  — обобщенные перемещения, соответствующие линейным собственным формам вертикальных и крутильных колебаний соответственно,  $\alpha_{nm}$  — коэффициент вязкости системы при взаимодействии  $n$ - и  $m$ -ой форм колебаний; коэффициенты  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $c_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) и безразмерные величины, входящие в выражения (1.1), определяются также, как и в [2, 3]; точка означает производную по времени  $t$ .

Решение системы уравнений (1.1) для малых, но конечных амплитуд может быть представлено путем разложения по разным временным масштабам в следующей форме [4] (здесь и в дальнейшем индексы  $n$ ,  $m$  опущены):

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \varepsilon x_{11}(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon^2 x_{12}(T_0, T_1, T_2, \dots) + \\ &+ \varepsilon^3 x_{13}(T_0, T_1, T_2, \dots) + \dots \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$x_2(t) = \varepsilon x_{21}(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon^2 x_{22}(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon^3 x_{23}(T_0, T_1, T_2, \dots) + \dots$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр порядка амплитуд,  $T_n = \varepsilon^n t$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) — новые независимые переменные.

Предположим далее, что  $\alpha_{nm} = \varepsilon^k \mu$ , где  $k$  — число, которое зависит от характера колебательного процесса.

Представляя (1.2) в (1.1) и учитывая, что  $D_n = \partial/\partial T_n$ , после приравнивания нулю коэффициентов при одинаковых степенях  $\varepsilon$  получим

$$\text{при } \varepsilon: D_0^2 x_{11} + \omega_0^2 x_{11} = 0, \quad D_0^2 x_{21} + \Omega_0^2 x_{21} = 0 \quad (1.3)$$

$$\text{при } \varepsilon^2: D_0^2 x_{12} + \omega_0^2 x_{12} = -2D_0 D_1 x_{11} - (2-k) \mu D_0 x_{11} - a_{11} x_{11}^2 - a_{22} x_{21}^2$$

$$D_0^2 x_{22} + \Omega_0^2 x_{22} = -2D_0 D_1 x_{21} - (2-k) \mu D_0 x_{21} - a_{12} x_{11} x_{21} \quad (1.4)$$

$$\text{при } \varepsilon^3: D_0^2 x_{13} + \omega_0^2 x_{13} = -2D_0 D_1 x_{12} - (D_1^2 + 2D_0 D_2) x_{11} - \mu D_0 x_{12} -$$

$$- (2-k) \mu D_1 x_{11} - 2a_{11} x_{11} x_{12} - 2a_{22} x_{21} x_{22} - b_{11} x_{11}^3 - b_{22} x_{21}^2 x_{11} \quad (1.5)$$

$$D_0^2 x_{23} + \Omega_0^2 x_{23} = -2D_0 D_1 x_{22} - (D_1^2 + 2D_0 D_2) x_{21} - \mu D_0 x_{22} - (2-k) \mu D_1 x_{21} -$$

$$- a_{12} (x_{11} x_{22} + x_{12} x_{21}) - c_{11} x_{11}^2 x_{21} - c_{22} x_{21}^2$$

Системы уравнений (1.3) — (1.5) описывают случаи внутреннего резонанса два к одному и один к одному при  $k = 1$  и  $k = 2$  соответственно.

Решение системы уравнений (1.3) имеет вид

$$x_{11} = A_1(T_1, T_2) \exp(i\omega_0 T_0) + \bar{A}_1(T_1, T_2) \exp(-i\omega_0 T_0) \quad (1.6)$$

$$x_{21} = A_2(T_1, T_2) \exp(i\Omega_0 T_0) + \bar{A}_2(T_1, T_2) \exp(-i\Omega_0 T_0)$$

где  $A_1, A_2$  — неизвестные комплексные функции,  $\bar{A}_1, \bar{A}_2$  — комплексно-сопряженные с ними функции.

2. Рассмотрим случай внутреннего резонанса два к одному. Подставляя выражения (1.6) в уравнения (1.4), получим

$$D_0^2 x_{12} + \omega_0^2 x_{12} = - [2i\omega_0 D_1 A_1 + i\mu\omega_0 A_1 + a_{22} A_2^2] \exp(i\omega_0 T_0) -$$

$$- a_{11} A_1^2 \exp(2i\omega_0 T_0) - a_{11} A_1 \bar{A}_1 - a_{22} A_2 \bar{A}_2 + C \quad (2.1)$$

$$D_0^2 x_{22} + \Omega_0^2 x_{22} = - [2i\Omega_0 D_1 A_2 + i\mu\Omega_0 A_2 + a_{12} A_1 A_2] \exp(i\Omega_0 T_0) -$$

$$- a_{12} A_1 A_2 \exp(3i\Omega_0 T_0) + C$$

где  $C$  означает комплексно-сопряженную часть к предыдущим членам.

Чтобы исключить появление вековых членов, в уравнениях (2.1) приравняем нулю коэффициенты при  $\exp(\pm i\omega_0 T_0)$ ,  $\exp(\pm i\Omega_0 T_0)$ . В результате получим

$$2i\omega_0 D_1 A_1 + i\mu\omega_0 A_1 + a_{22} A_2^2 = 0$$

$$2i\Omega_0 D_1 A_2 + i\mu\Omega_0 A_2 + a_{12} A_1 \bar{A}_2 = 0 \quad (2.2)$$

При рассмотрении данного случая достаточно ограничиться членами порядка  $\varepsilon^2$ , поэтому  $A_1, A_2$  будем считать функциями только  $T_1$ .

Умножим первое уравнение системы (2.2) на  $\bar{A}_1$ , а второе — на  $\bar{A}_2$  и найдем сопряженные с ними уравнения. Две пары взаимосопряженных уравнений сначала сложим друг с другом, а затем вычтем одно из другого. Представляя  $A_1 = a_1 \exp(i\varphi_1)$ ,  $A_2 = a_2 \exp(i\varphi_2)$ , в результате описанной процедуры приходим к системе четырех дифференциальных уравнений относительно  $a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2$ :

$$(a_1^2)' + \mu a_1^2 + a_{22} a_1 a_2^2 \omega_0^{-1} \sin \gamma = 0$$

$$(a_2^2)' + \mu a_2^2 - a_{12} a_1 a_2^2 \Omega_0^{-1} \sin \gamma = 0 \quad (2.3)$$

$$\varphi_1' - 1/2 a_{22} \omega_0^{-1} a_1^{-1} a_2^2 \cos \gamma = 0 \quad (2.4)$$

$$\varphi_2' - 1/2 a_{12} \Omega_0^{-1} a_1 \cos \gamma = 0$$

где  $\gamma = 2\varphi_2 - \varphi_1$ , а точка означает дифференцирование по  $T_1$ .

Из уравнений (2.3) находим

$$a_1 = (E_0 \xi)^{1/2} \exp(-1/2 \mu T_1) \quad (2.5)$$

$$a_2 = [a_{12} \omega_0 (a_{22} \Omega_0)^{-1} E_0 (1 - \xi)]^{1/2} \exp(-1/2 \mu T_1)$$

где  $\xi = \xi(T_1)$  — пока неизвестная функция,  $E_0$  — начальное значение энергии  $E = E_0 \exp(-\mu T_1)$ .

Учитывая (2.5), из уравнений (2.3) и (2.4) получим

$$\xi' = b \xi^{1/2} (1 - \xi) \exp(-1/2 \mu T_1) \sin \gamma, \quad b = a_{12} E_0^{1/2} \Omega_0^{-1} \quad (2.6)$$

$$\gamma' = -1/2 b \xi^{1/2} (1 - 3\xi) E_0 \exp(-1/2 \mu T_1) \cos \gamma \quad (2.7)$$

Представляя  $\gamma = d\gamma/d\xi \xi'$  с учетом равенства (2.6), имеем

$$\frac{d \cos \gamma}{d \xi} + \frac{1 - 3\xi}{2\xi(1 - \xi)} \cos \gamma = 0 \quad (2.8)$$

Решение уравнения (2.8) имеет вид

$$G_1(\xi, \gamma) = \xi^{1/2} (1 - \xi) \cos \gamma = G_1^0 \quad (2.9)$$

где  $G_1^0$  — произвольная постоянная, определяемая из начальных условий.

Исключая из (2.6), (2.9) величину  $\gamma$  и интегрируя по  $T_1$ , находим

$$\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{[\xi(1 - \xi)^2 - G_1^2]^{1/2}} = -2b\mu^{-1} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{1}{2} \mu T_1\right) \right] \quad (2.10)$$

где  $\xi_0$  — величина, определяющая относительный уровень начальных амплитуд [2].

Интеграл в выражении (2.10) приводится к неполному эллиптическому интегралу первого рода [5].

Введем в рассмотрение фазовую скорость  $v$  с компонентами  $v_\xi = \xi'$ ,  $v_\gamma = \gamma'$ . Как следует из формул (2.6), (2.7):

$$v_\xi = \partial G_1 / \partial \gamma b \exp(-1/2 \mu T_1), \quad v_\gamma = -\partial G_1 / \partial \xi b \exp(-1/2 \mu T_1) \quad (2.11)$$

Если записать уравнение линии тока  $d\xi/v_\xi = d\gamma/v_\gamma$  и подставить в него выражения (2.11), то придем к соотношению

$$G_1(\xi, \gamma) = G_1(\xi_0, \gamma_0) \quad (2.12)$$

которое выполняется вдоль каждой линии тока.

Из формул (2.11), (2.12) видно, что фазовая жидкость является вязкой, несжимаемой ( $\text{div } v = 0$ ), а ее течение установившимся и вихревым ( $\text{rot } v = -b \Delta G_1 \exp(-1/2 \mu T_1) k \neq 0$ , где  $\Delta$  — оператор Лапласа, а  $k$  — единичный вектор, перпендикулярный фазовой плоскости  $\gamma, \xi$ ). Направление течения фазовой жид-

кости вдоль линий тока определяется знаком скорости  $v_j$ , т. е. зависит от градиента функции  $G_i$  по  $\xi$ .

3. Теперь рассмотрим случай близости частот. При этом будем использовать системы уравнений (1.3) — (1.5) при  $k = 2$ .

Чтобы решения, удовлетворяющие этим системам, не содержали вековых членов, необходимо выполнение следующих соотношений:

$$-iA_1 \dot{\phantom{A}} - 1/2i\mu A_1 - \lambda_1 A_1^2 \bar{A}_1 - \lambda_2 A_1 A_2 \bar{A}_2 + 1/4\Gamma_1 \bar{A}_1 A_2^2 = 0 \quad (3.1)$$

$$-iA_2 \dot{\phantom{A}} - 1/2i\mu A_2 - \lambda_3 A_1 \bar{A}_1 A_2 - \lambda_4 A_2^2 \bar{A}_2 + 1/4\Gamma_2 A_1^2 \bar{A}_2 = 0$$

где  $A_1, A_2$  зависят только от  $T_2$ , точка означает производную по  $T_2$ , коэффициенты  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ),  $\Gamma_j$  ( $j = 1, 2$ ) определяются также, как и в [2].

Повторяя для системы (3.1) ту же самую процедуру, что и для уравнений (2.2), получим

$$(a_1^2) \dot{\phantom{a}} + 1/2\mu a_1^2 - 1/2\Gamma_1 a_1^2 a_2^2 \sin \gamma = 0$$

$$(a_2^2) \dot{\phantom{a}} + 1/2\mu a_2^2 + 1/2\Gamma_2 a_1^2 a_2^2 \sin \gamma = 0 \quad (3.2)$$

$$\varphi_1 \dot{\phantom{\varphi}} - \lambda_1 a_1^2 - \lambda_2 a_2^2 + 1/4\Gamma_1 a_2^2 \cos \gamma = 0$$

$$\varphi_2 \dot{\phantom{\varphi}} - \lambda_3 a_1^2 - \lambda_4 a_2^2 + 1/4\Gamma_2 a_1^2 \cos \gamma = 0 \quad (3.3)$$

$$\gamma = 2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Из уравнений (3.2) находим

$$a_1 = (E_0 \xi)^{1/2} \exp(-\mu T_2), \quad a_2 = [E_0 (1 - \xi) \Gamma_2 \Gamma_1^{-1}]^{1/2} \exp(-\mu T_2) \quad (3.4)$$

где  $\xi = \xi(T_2)$  — пока неизвестная функция,  $E_0$  — начальное значение энергии  $E = E_0 \exp(-\mu T_2)$ .

Учитывая (3.4), из уравнений (3.2) и (3.3) получим

$$\xi \dot{\phantom{\xi}} = 1/2\Gamma_2 E_0 \xi (1 - \xi) \exp(-2\mu T_2) \sin \gamma \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \gamma = [1/4\Gamma_2 E_0 (1 - 2\xi) \cos \gamma - (\lambda_1 - \lambda_3) E_0 \xi - \\ - \Gamma_2 \Gamma_1^{-1} (\lambda_2 - \lambda_4) E_0 (1 - \xi)] \exp(-2\mu T_2) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Представляя  $\gamma = d\gamma/d\xi \xi$  с учетом равенства (3.5), имеем

$$\frac{d \cos \gamma}{d\xi} + \frac{1 - 2\xi}{\xi(1 - \xi)} \cos \gamma - \frac{4(\lambda_1 - \lambda_3)}{\Gamma_2(1 - \xi)} - \frac{4(\lambda_2 - \lambda_4)}{\Gamma_1 \xi} = 0 \quad (3.7)$$

Решение уравнения (3.7) имеет вид

$$G_2(\xi, \gamma) = \xi(1 - \xi) \cos \gamma - \frac{2(\lambda_1 - \lambda_3)}{\Gamma_2} \xi^2 + \frac{2(\lambda_2 - \lambda_4)}{\Gamma_1} (1 - \xi)^2 = G_2^0 \quad (3.8)$$

где  $G_2^0$  — произвольная постоянная, определяемая из начальных условий.

Исключая из (3.5) и (3.8) величину  $\gamma$  и интегрируя по  $T_2$ , находим

$$\frac{1}{\sqrt{m_1 m_2}} \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{((\xi^2 + p_1 \xi + q_1)(\xi^2 + p_2 \xi + q_2))^{1/2}} = \frac{E_0}{4\Gamma_1 \mu} [1 - \exp(-2\mu T_2)] \quad (3.9)$$

где  $\xi_0$  — величина, определяющая относительный уровень начальных амплитуд, коэффициенты  $m_i, p_i, q_i$  ( $i = 1, 2$ ) приведены в [2].

Интеграл в выражении (3.9) приводится к неполному эллиптическому интегралу первого рода [5].

Если ввести в рассмотрение фазовую жидкость, которая движется со скоростью  $v$  ( $u_\xi = \xi$ ,  $v_\gamma = \gamma$ ), то, как следует из формул (3.5), (3.6):

$$u_\xi = -\frac{\Gamma_2 E_0}{2} \frac{\partial G_2}{\partial \gamma} \exp(-2\mu T_2), \quad v_\gamma = \frac{\Gamma_2 E_0}{2} \frac{\partial G_2}{\partial \xi} \exp(-2\mu T_2) \quad (3.10)$$

при этом вдоль каждой линии тока

$$G_2(\xi, \gamma) = G_2(\xi_0, \gamma_0) \quad (3.11)$$

Из формул (3.10), (3.11) видно, что, как и в случае внутреннего резонанса два к одному, фазовая жидкость является вязкой, несжимаемой, а ее течение установившимся и вихревым ( $\text{rot } v = 1/2 \Gamma_2 E_0 \Delta G_2 \exp(-2\mu T_2) k \neq 0$ ).

4. Проведем качественный анализ колебательных режимов исходя из гидродинамической интерпретации этих процессов [6].

В качестве примеров рассмотрим нелинейные затухающие колебания всячего моста «Золотые ворота» в Сан-Франциско в пяти случаях: 1)  $\omega_{\delta 5}^0 = \Omega_{\delta 3}^0 = 2,61$  рад/с, 2)  $\omega_{\delta 3}^0 \approx \Omega_{\delta 1}^0 = 1,33$  рад/с, 3)  $\omega_{\delta 2}^0 \approx \Omega_{\delta 1}^0 = 1,17$  рад/с, 4)  $\omega_{\delta 4}^0 \approx \Omega_{\delta 2}^0 = 1,83$  рад/с, 5)  $\omega_{\delta 6}^0 = 2\Omega_{\delta 1}^0 = 2,66$  рад/с. Здесь индекс  $s$  указывает на симметричную моду колебаний, а индекс  $a$  — на антисимметричную моду. Числовые данные взяты из [3].

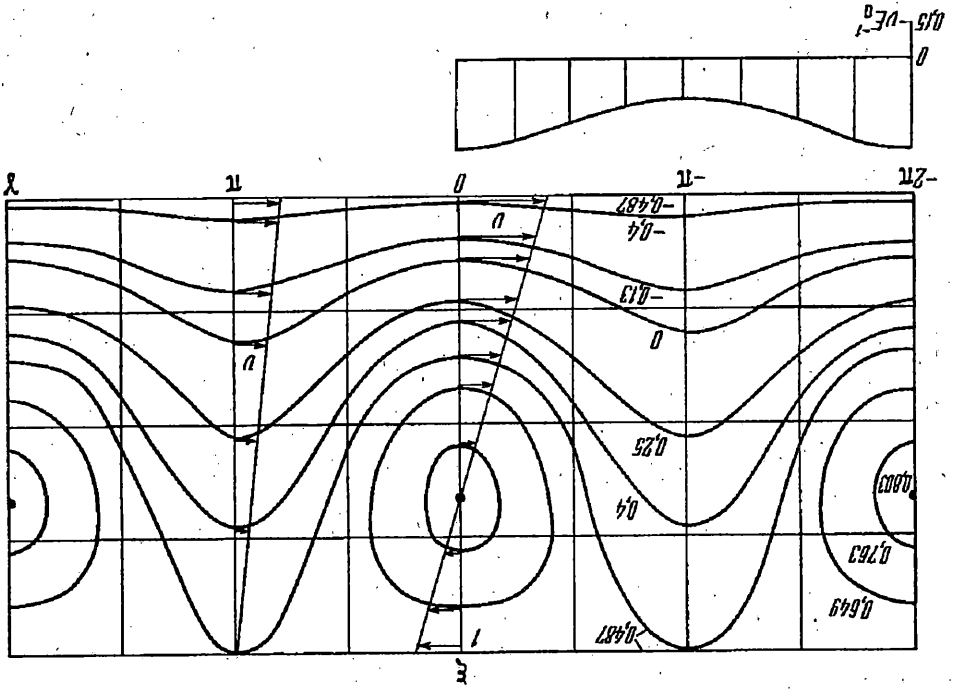
Изучим каждый их этих случаев в отдельности, причем сначала положим коэффициент вязкости  $\mu$  равным нулю, а затем оценим влияние вязкости на свободные колебания.

На фиг. 1 в фазовой плоскости  $\gamma, \xi$  изображены линии тока фазовой жидкости в первом случае. Цифрами у кривых указаны значения величины  $G_2$ , которая соответствует линии тока; стрелками на линиях тока показано направление движения частиц жидкости. По незамкнутым линиям тока движение частиц жидкости происходит в сторону уменьшения величины  $\gamma$ , а по замкнутым — против движения часовой стрелки. Кроме того, в двух сечениях  $\gamma = 0$  и  $\gamma = \pi$  канала, ограниченного линиями  $\xi = 0, \xi = 1$ , дано распределение скоростей  $v$  фазовой жидкости по координате  $\xi$ . В этих сечениях наблюдается монотонное возрастание скорости при изменении  $\xi$  от 0 до 1. При  $\xi \rightarrow 0$  скорость  $v \rightarrow 1,05E_0$  (сечение  $\gamma = 0$ ) и  $v \rightarrow 0,18E_0$  (сечение  $\gamma = \pi$ ), а при  $\xi \rightarrow 1$  скорость  $v \rightarrow 2,45E_0$  и  $v \rightarrow 3,68E_0$ .

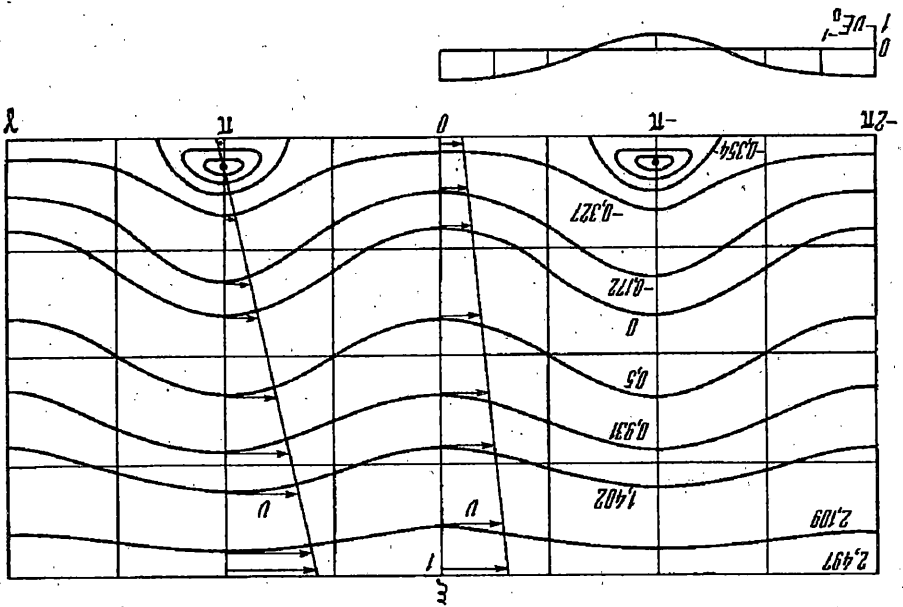
На фиг. 1 также даны распределения скоростей  $v$  по переменной  $\gamma$  при подходе к правому ( $\xi = 1$ ) и левому ( $\xi = 0$ ) берегам канала. Из этих эпюр видно, что в точках ветвления, которые находятся у левого берега канала, скорость  $v$  равна нулю.

Граничные колебательные режимы  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$  не получаются из общих соотношений (3.5), (3.6), так как в процессе преобразований формул (3.5) производилось деление на величины  $a_1$  и  $a_2$ . В этих случаях необходимо использовать уравнения (3.1), которые дают  $a_1 = 0, a_2 = \text{const}, \gamma = 2\varphi_2 = 2(\lambda_4 \Gamma_2 \Gamma_1^{-1} E_0) = 0,782E_0$  при  $\xi = 0$ ;  $a_1 = \text{const}, a_2 = 0, \gamma = -2\varphi_1 = -2\lambda_4 E_0 = -4,288E_0$  при  $\xi = 1$ , т. е. в граничных точках скорость фазовой жидкости претерпевает разрыв. Из графика видно, что в точках с координатами  $\xi_0 = 0,043, \gamma = \pi \pm 2\pi n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) наблюдаются стационарные колебательные режимы, так как в этих точках  $v = 0$ . Незамкнутые линии тока соответствуют колебательным режимам, при которых амплитуды меняются периодически, а фазы — аperiodически, замкнутые линии тока отвечают колебательным процессам с периодическим изменением амплитуд и фаз. Линия тока  $G_2 = -0,354$  имеет точки ветвления с координатами  $\xi = 0, \gamma = 3\pi/4 \pm 2\pi n$  и  $\xi_0 = 0, \gamma = 5\pi/4 \pm 2\pi n$ , из которых выходят две ветви решения: одна соответствует граничному колебательному режиму с модуляцией только по фазе  $\xi = 0, \gamma = 2\varphi_2 = 2(\lambda_4 \Gamma_2 \Gamma_1^{-1} E_0) T_2 + \varphi_{20}$ , где  $\varphi_{20}$  — начальная фаза, другая — аperiodическому режиму. Линия аperiodического режима служит границей раздела областей замкнутых и незамкнутых линий тока, т. е. является сепаратрисой. Ширина области замкнутых линий равна  $2\xi_0 = 0,093$ , а длина —  $\pi/2$ . Периодическое изменение амплитуд отвечает двустороннему энергообмену между вертикальными и крутильными колебаниями, аperiodическое — одностороннему энергообмену, а при колебательных режимах  $\xi = \text{const}$  (стационарный и граничные режимы) энергообмена между двумя под-

Фиг. 2



Фиг. 1



системами не наблюдается. С течением времени в силу наличия вязкости амплитуды колебаний затухают до нуля.

Из фиг. 1 также следует, что граничный режим  $\xi = 1$  обладает слабой неустойчивостью, так как при малом отклонении характеристической точки от правой стенки канала она сносится вдоль границы канала на сколь угодно большое расстояние от первоначального положения, оставаясь при этом вблизи границы. Граничный режим  $\xi = 0$  обладает сильной неустойчивостью, так как малое начальное отклонение характеристической точки от левой границы канала приводит к тому, что в последующие моменты времени она сносится вдоль границы и может отклоняться от этой границы на значительное расстояние.

Стационарная точка  $\xi_0 = 0,043$ ,  $\gamma = \pi$  является центром, так как при малом отклонении от нее частица начинает двигаться вокруг нее по замкнутой траектории.

Что касается апериодического режима, то он является неустойчивым: малое начальное возмущение точки от этого режима приводит к большим отклонениям в последующие моменты времени.

На фиг. 2 изображены линии тока для второго случая. Картины расположения линий тока на фиг. 2 и фиг. 1 похожи друг на друга с той лишь разницей, что зоны циркуляции на фиг. 2 расположены у правого берега ( $\xi = 1$ ) канала и окружены линией, которой соответствует значение  $G_2 = -2(\lambda_1 - \lambda_3) \Gamma_2^{-1} = 0,487$ . Эта линия состоит из двух частей, соединенных друг с другом в точках ветвления; одна ветвь отвечает режиму фазовой модуляции  $\xi = 1$ , другая — апериодическому. Эти же точки ветвления являются общими точками соседних циркуляционных зон, длина каждой из которых  $2\lambda$ , а ширина —  $2(1 - \xi_0) = 0,662$ , где  $\xi_0 = 0,669$ ,  $\gamma_0 = \pm 2\lambda l$  — координаты стационарных точек. Области замкнутых и незамкнутых линий тока разделяются линиями — сепаратрисами.

Для двух сечений  $\gamma = 0$  и  $\gamma = \pi$  построены эпюры распределения скоростей точек фазовой жидкости  $v$  по ширине канала. В сечении  $\gamma = \pi$  скорость возрастает от  $-0,163E_0$  до 0 при изменении  $0 < \xi < 1$ , а в сечении  $\gamma = 0$  — от  $-0,338E_0$  до  $0,167E_0$ , обращаясь в ноль в стационарной точке.

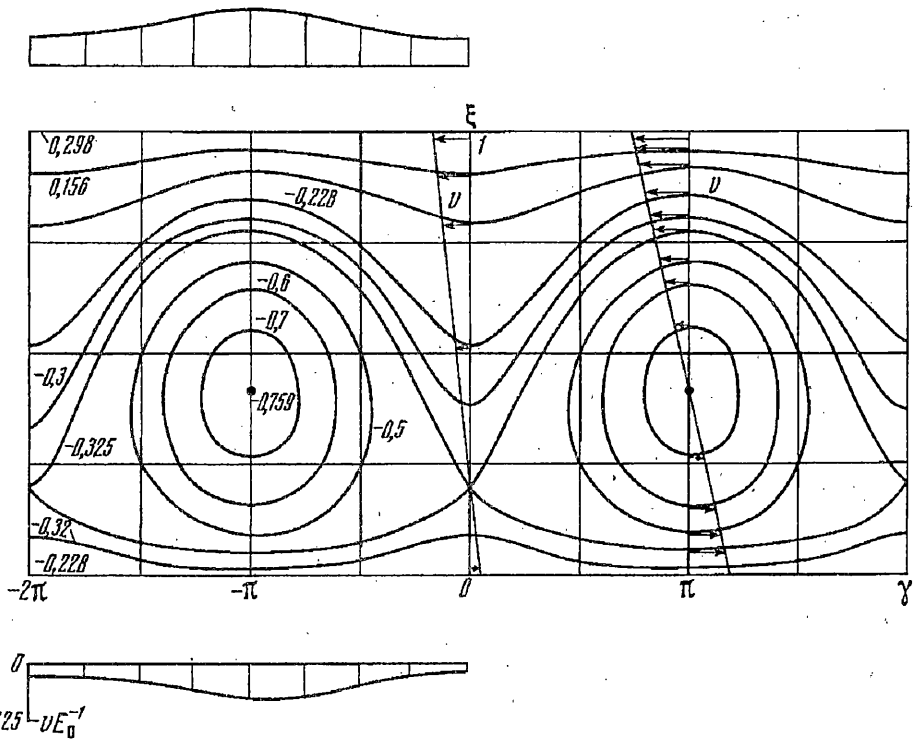
На фиг. 2 также даны распределения скоростей  $v$  по переменной  $\gamma$  при подходе к правому ( $\xi = 1$ ) и левому ( $\xi = 0$ ) берегам канала. Из этих эпюр видно, что скорость течения фазовой жидкости обращается в ноль в точке ветвления у правого берега при  $\gamma = \pi \pm 2\lambda l$ . При  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$  величина  $\xi = 0$ , а  $\gamma = -0,164E_0$  и  $\gamma = 0,048E_0$  соответственно.

В отличие от предыдущего примера граничный режим  $\xi = 0$  обладает слабой неустойчивостью, а граничный режим  $\xi = 1$  — сильной.

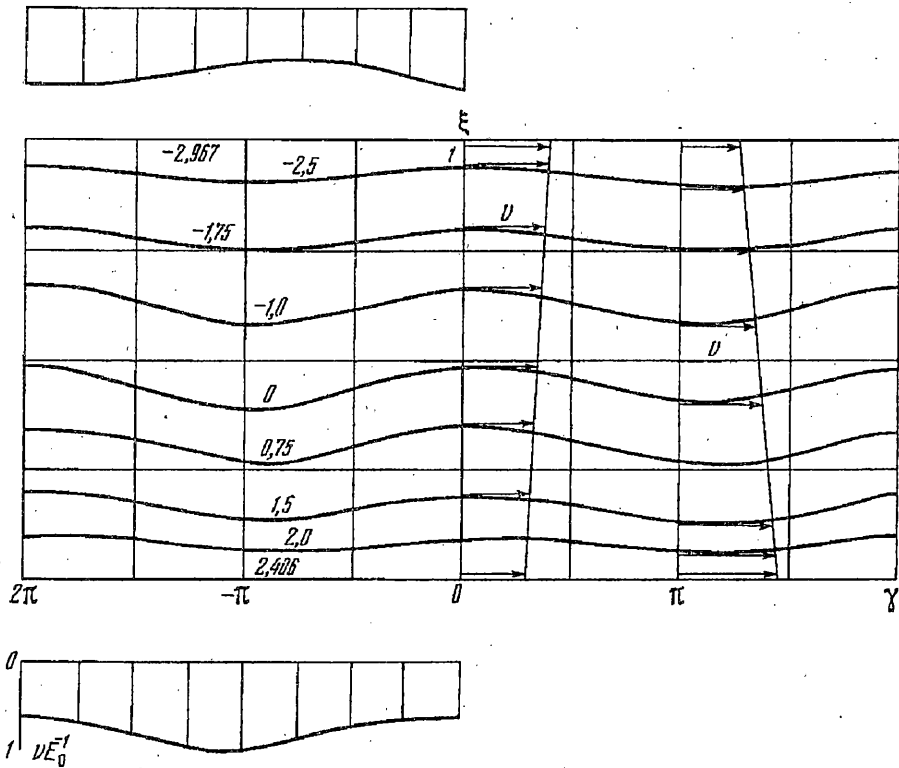
На фиг. 3 изображены линии тока для третьего случая. Из графиков видно, что в отличие от первых двух случаев зоны циркуляции находятся внутри канала. Длина каждой из зон равна  $2\lambda$ , а ширина —  $0,771$ . Соседние циркуляционные зоны соприкасаются друг с другом в точках с координатами  $\xi = 0,174$ ,  $\gamma = 2\lambda l$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), причем граничные линии этих зон принадлежат самим зонам. Величина  $G_2$  на этих линиях принимает значение  $-0,3255$ . Расположение циркуляционных зон напоминает вихревые цепочки Кармана с симметричным порядком. Точки ветвления линий, окружающих циркуляционные зоны, уходят в бесконечность, а сами линии превращаются в две независимые линии с одним и тем же значением  $G_2 = -0,228$ . Одна линия отвечает режиму фазовой модуляции  $\xi = 0$ , а другая — периодическому режиму для амплитуд и апериодическому для сдвига фаз.

Эпюры скоростей  $v$  в сечениях  $\gamma = 0$  и  $\gamma = \pi$  представляют собой наклонные прямые линии, на концах которых скорость принимает значения  $0,023E_0$  при  $\xi \rightarrow 0$  и  $-0,11E_0$  при  $\xi \rightarrow 1$  (сечение  $\gamma = 0$ ),  $0,16E_0$  при  $\xi \rightarrow 0$  и  $0,25E_0$  при  $\xi \rightarrow 1$  (сечение  $\gamma = \pi$ ). Эти линии проходят через точки с координатами  $\xi = 0,174$ ,  $\gamma = 0$  и  $\xi = 0,389$ ,  $\gamma = \pi$ , скорость в которых равна нулю. В этих точках наблюдаются стационарные режимы. При этом колебательный режим, соответствующий стационарной точке в сечении  $\gamma = 0$ , является неустойчивым, так как при малом начальном отклонении от нее частица жидкости в последующие моменты может находиться сколь угодно далеко от этой точки. Эта стационарная точка является седлообразной. Колебательный режим, отвечающий стационарной точке в сечении  $\gamma = \pi$ , устойчив, так как эта точка является центром. Эпюры распределения скоростей  $v$  по переменной  $\gamma$  при подходе к берегам канала являются периодическими функциями. При  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$  величина  $\xi = 0$ , а  $\gamma = 0,242E_0$  и  $\gamma = -0,47E_0$  соответственно.

Заметим, что оба граничных режима обладают слабой неустойчивостью: малые начальные

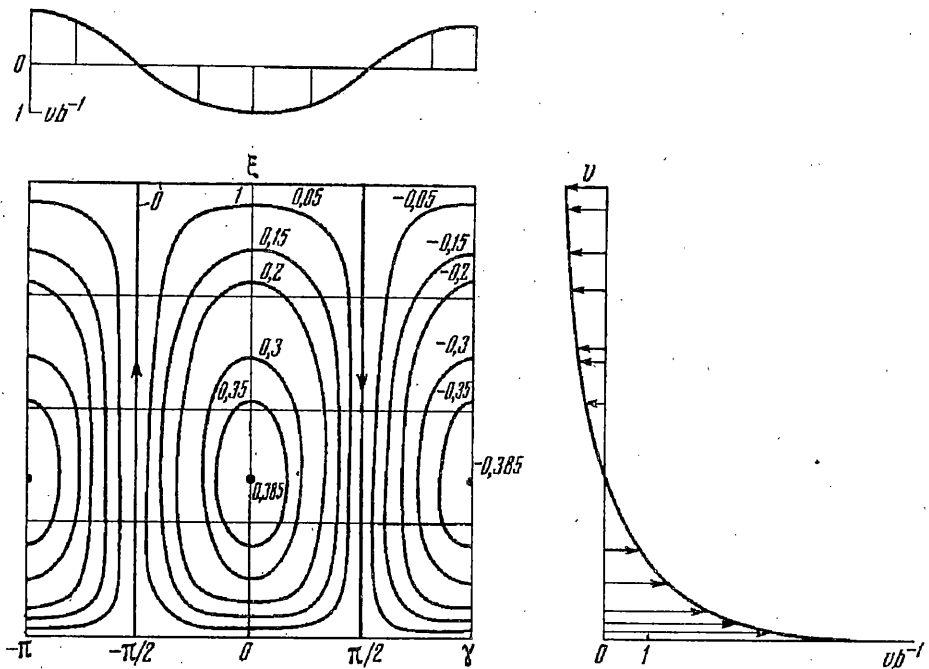


Фиг. 3

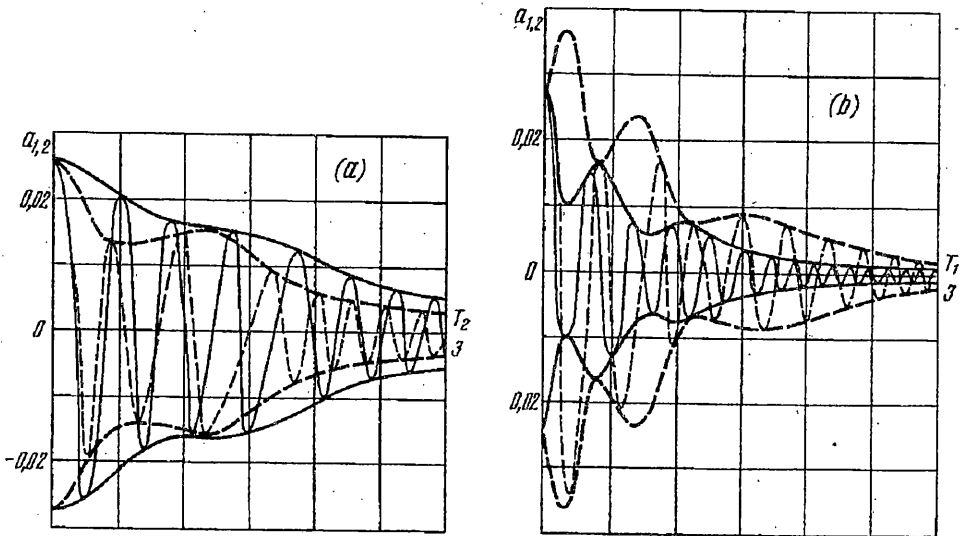


Фиг. 4





Фиг. 5



Фиг. 6

Изменения  $\xi$  и  $\gamma$  у границ приводят к тому, что в последующие моменты времени  $\xi$  изменяется слабо, а  $\gamma$  убывает до  $-\infty$  у границы  $\xi = 1$  и возрастает до  $+\infty$  у границы  $\xi = 0$ . Иначе говоря, течение фазовой жидкости вблизи берегов канала направлено в разные стороны.

На фиг. 4 для четвертого случая изображены линии тока фазовой жидкости, представляющие собой незамкнутые линии, вдоль которых течение жидкости происходит в сторону увеличения величины  $\gamma$ . Эпюры распределения скоростей  $v$  в двух сечениях  $\gamma = 0$  и  $\gamma = \pi$  являются наклонными прямыми, на концах которых скорости равны  $0,706 E_0$  при  $\xi \rightarrow 0$  и  $0,951 E_0$  при  $\xi \rightarrow 1$  (сечение  $\gamma = 0$ );  $1,015 E_0$  при  $\xi \rightarrow 1$  и  $0,64 E_0$  при  $\xi \rightarrow 0$  (сечение  $\gamma = \pi$ ). Распределения скоростей по переменной  $\gamma$  при подходе к берегам канала показывают, что скорости точек фазовой жидкости отличны от нуля при

любом значении  $\gamma$ . При  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$  величина  $\xi' = 0$ , а  $\gamma = 0,607 E_0$  и  $\gamma = -0,93 E_0$  соответственно. Оба граничных режима обладают слабой неустойчивостью.

На фиг. 5 показаны линии тока для пятого случая, который соответствует внутреннему резонансу два к одному. Из графиков видно, что все фазовые траектории являются замкнутыми линиями, которые расположены внутри прямоугольников, ограниченных прямыми  $\xi = 0, \xi = 1, \gamma = \pm \pi/2 \pm 2\pi l$  ( $l = 0, 1, 2, \dots$ ). На всех четырех сторонах прямоугольника  $G_I = 0$ , а внутри — величина  $G_I$  сохраняет знак. На линиях  $\gamma = \pi/2 \pm \pi l$  реализуется аperiодический режим, так как с возрастанием  $t$  от 0 до  $\infty$   $\xi$  возрастает от  $\xi_0$  до 1 (прямая  $\gamma = -\pi/2$ ) или убывает от  $\xi_0$  до 0 (прямая  $\gamma = \pi/2$ ). На линии  $\xi = 1$  и в точках с координатами  $\xi = 1/3, \gamma = \pi l$  наблюдаются стационарные режимы, причем граничный стационарный режим является неустойчивым, а внутренний стационарный режим — устойчивым. Переход частиц жидкости от точек с координатами  $\xi = 0, \gamma = \pi/2 \pm 2\pi l$  к точкам  $\xi = 0, \gamma = -\pi/2 \pm 2\pi l$  ( $l = 0, 1, 2, \dots$ ) осуществляется скачкообразно, поскольку согласно распределению скоростей в сечении  $\gamma = 0$  величина скорости  $v$  возрастает до бесконечности при  $\xi \rightarrow 0$ . Распределение скоростей вдоль вертикальных линий  $\gamma = \pm \pi/2 \pm 2\pi l$  носит аperiодический характер, а вблизи горизонтальной линии  $\xi \rightarrow 1$  — периодический.

При наличии вязкости картины линий тока во всех пяти случаях не меняются, а скорости частиц фазовой жидкости экспоненциально затухают при движении частиц вдоль линий тока. При этом стационарные и граничные режимы становятся аperiодическими, т. е. амплитуды и фазы экспоненциально затухают с течением времени.

На фиг. 6 приведены результаты расчета колебательного процесса, проведенного с учетом вязкости, для близких частот (случай 1) и внутреннего резонанса два к одному (случай 5) при  $\xi_0 = 0,5, \gamma_0 = 0$ . Сплошные кривые соответствуют вертикальным колебаниям (их огибающая — амплитуда  $a_1$ ), штриховые кривые — крутильным колебаниям (их огибающая — амплитуда  $a_2$ ).

Из графиков видно, что перекачка энергии при внутреннем резонансе два к одному (фиг. 6, *b*) происходит в два раза быстрее и интенсивнее, чем в случае внутреннего резонанса один к одному (фиг. 6, *a*). Наличие малой вязкости, порядок малости которой зависит от характера колебательного процесса в висячей комбинированной системе, приводит к затуханию перекачки энергии и к увеличению длительности энергообменного цикла с течением времени.

В случае внутреннего резонанса два к одному крутильные колебания преобладают над вертикальными, а при внутреннем резонансе один к одному — наоборот, т. е. режим внутреннего резонанса два к одному является более опасным по сравнению с режимом близких частот. Точки касания огибающих ( $a_i = a_{1i} = a_{2i}, T_i$ ) позволяют определять величину, характеризующую рассеяние энергии при колебаниях, по формуле  $(T_{i+1} - T_i)^{-1} \ln(a_{i+1}/a_i)$ , где  $a_i$  определяется из выражения (3.4) (фиг. 6, *a*) или (2.5) (фиг. 6, *b*) при  $T = T_i$ .

Предложенная методика, основанная на использовании гидродинамической аналогии, позволяет выявить все возможные колебательные режимы и провести их качественный анализ.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 94-01-00254-А) и Международным научным фондом (RJ—5000).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Abdel—Ghaffar A. M., Scanlan R. H.* Ambient vibration studies of Golden Gate Bridge: 1. Suspended structure//Amer. Soc. Civ. Eng. J. Eng. Mech. 1985. V. 111. № 4. P. 463—482.
2. *Россихин Ю. А., Шитикова М. В.* Влияние начальных условий на характер протекания колебательных процессов в висячей комбинированной системе//Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 3. С. 143—154.
3. *Abdel—Ghaffar A. M., Rubin L. I.* Nonlinear free vibrations of suspension bridges: Theory and application//Amer. Soc. Civ. Eng. J. Eng. Mech. 1983. V. 109. № 1. P. 313—345.
4. *Найфэ А.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
5. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1968. 344 с.
6. *Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V.* Nonlinear free vibrations of suspension bridges//Developments in Mechanics. V. 16. Proc. 22nd Midwestern Mech. Conf. Rolla, 1991. P. 460—461.