

УДК 539.3

© 1995 г. В. М. АЛЕКСАНДРОВ, А. А. ШМАТКОВА

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КОНСОЛЬНОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПАНЕЛИ С СОТОВЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

В конструкциях современной авиационной техники используются трехслойные панели с сотовым наполнителем.¹ Изучено напряженно-деформированное состояние (НДС) такой консольно защемленной панели, находящейся в условиях цилиндрического изгиба. Предполагается, что наполнитель склеен с армирующими его сверху и снизу пластинами, его толщина много больше, а модуль сдвига много меньше толщины и модуля сдвига армирующих пластин. Для описания пластин панели использована модель Кирхгофа — Лява — Мелана.

1. Схематичный вид панели изображен на фиг. 1 (верхняя пластина — 1, нижняя — 2, сотовый наполнитель — 3). Предполагаем, что справа у панели имеется жесткая законцовка — 4, а слева панель жестко защемлена — 5. Панель находится в условиях цилиндрического изгиба и нагружена по верхней грани нормальным напряжением $\sigma_1(x)$, по нижней — $\sigma_2(x)$, на правом торце продольным T и поперечным P усилиями, а также изгибающим моментом M . Материал пластин 1 и 2 изотропный и имеет упругие характеристики G и ν . Геометрические характеристики панели: длина — l , толщина пластин 1 и 2 — $2h$, толщина наполнителя — $2H$.

Разрежем панель, как показано на фиг. 2 и введем в рассмотрение контактные нормальные и касательные напряжения $\sigma_1^0(x)$, $\sigma_2^0(x)$ и $\tau(x)$, действующие между пластинами и наполнителем. Введем также реактивные усилия и моменты T_i , P_i , M_i , T_i^y , P_i^y и M_i^y ($i=1, 2$), приложенные к краям пластин.

Условия равновесия пластины 1:

$$\begin{aligned} P_1 - P_1^y + \int_0^l (\sigma_1 - \sigma_1^0) d\xi = 0, \quad T_1 - T_1^y - \int_0^l \tau d\xi = 0 \\ M_1 - M_1^y + P_1^y l + (T_1 - T_1^y) h - \int_0^l \xi (\sigma_1 - \sigma_1^0) d\xi = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

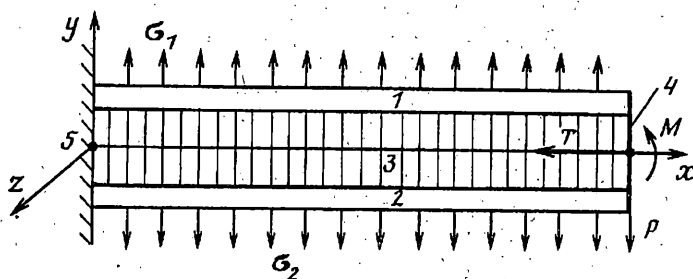
Условия равновесия пластины 2:

$$\begin{aligned} P_2 - P_2^y + \int_0^l (\sigma_2^0 - \sigma_2) d\xi = 0, \quad T_2 - T_2^y + \int_0^l \tau d\xi = 0 \\ M_2 - M_2^y + P_2^y l + (T_2^y - T_2) h - \int_0^l \xi (\sigma_2^0 - \sigma_2) d\xi = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

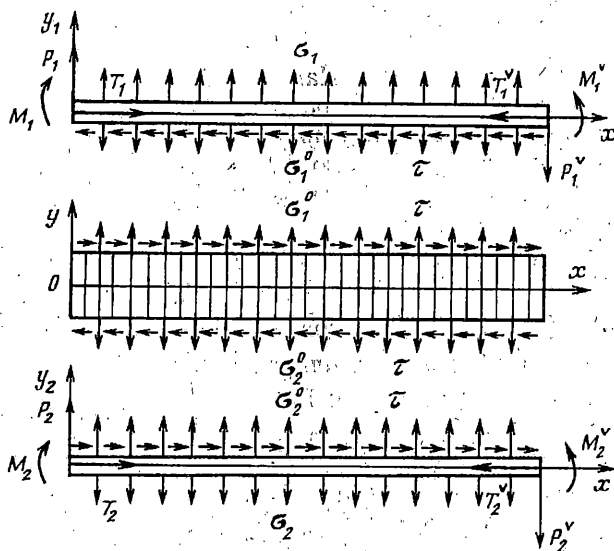
Условия равновесия наполнителя 3:

$$\int_0^l (\sigma_1^0 - \sigma_2^0) d\xi = 0, \quad \int_0^l \xi (\sigma_1^0 - \sigma_2^0) d\xi - 2H \int_0^l \tau d\xi = 0 \quad (1.3)$$

¹ С современным состоянием проблемы можно познакомиться по многочисленным работам А. Я. Александрова, Э. И. Григолока, Л. М. Куршина и других авторов.



Фиг. 1



Фиг. 2

Условия равновесия законцовки 4:

$$P = P_1^v + P_2^v, \quad T = T_1^v + T_2^v$$

$$M_1^v + M_2^v - M + (T_1^v - T_2^v)(H + h) = 0 \quad (1.4)$$

В (1.1)—(1.4) все моменты брались относительно точки O .

Усилия и момент, действующие в любом сечении пластины 1, в системе координат x, y_1 имеют вид

$$\begin{aligned} T_1(x) &= -T_1 + \int_0^x \tau d\xi, \quad Q_1(x) = -P_1 + \int_0^x (\sigma_1^0 - \sigma_1) d\xi \\ M_1(x) &= -M_1 - \int_0^x \xi (\sigma_1^0 - \sigma_1) d\xi - h \int_0^x \tau d\xi + Q_1(x)x \end{aligned} \quad (1.5)$$

Соответственно, те же величины в любом сечении пластины 2, в системе координат x, y_2 имеют вид

$$\begin{aligned} T_2(x) &= -T_2 - \int_0^x \tau d\xi, \quad Q_2(x) = -P_2 + \int_0^x (\sigma_2 - \sigma_2^0) d\xi \\ M_2(x) &= -M_2 - \int_0^x \xi (\sigma_2 - \sigma_2^0) d\xi - h \int_0^x \tau d\xi + Q_2(x)x \end{aligned} \quad (1.6)$$

2. Сотовый наполнитель представляет собой перфорированную среду с упругими

характеристиками G_3 и ν_3 . С помощью известных методов усреднения [1—3] его можно моделировать сплошной ортотропной упругой средой с плоскостями симметрии параллельными координатным. Здесь будем считать, что эта среда находится в условиях плоской деформации и кроме того в ней $\sigma_x \equiv 0$. Последнее допущение весьма важно и отражает тот факт, что сотовый наполнитель практически не будет сопротивляться усилиям растяжения-сжатия в направлении оси x . С учетом $\sigma_x \equiv 0$ из уравнений равновесия

$$\partial \sigma_x / \partial x + \partial \tau_{xy} / \partial y = 0, \quad \partial \sigma_y / \partial y + \partial \tau_{xy} / \partial x = 0 \quad (2.1)$$

и граничных условий

$$\tau_{xy} = \tau (y = \pm H), \quad \sigma_y = \sigma_1^0 (y = H), \quad \sigma_y = \sigma_2^0 (y = -H) \quad (2.2)$$

найдем, что

$$\tau_{xy} \equiv \tau, \quad \sigma_y = -\tau'y + 0,5 (\sigma_1^0 + \sigma_2^0) \quad (2.3)$$

причем должно выполняться соотношение

$$-2H\tau' = \sigma_1^0 - \sigma_2^0 \quad (2.4)$$

Подставляя $\sigma_1^0 - \sigma_2^0$ из (2.4) в (1.3), приходим к выводу, что должны выполняться условия

$$\tau(0) = \tau(l) = 0 \quad (2.5)$$

В соответствии с законом Гука для ортотропной среды [4], а также на основании (2.3) и условия $\sigma_x \equiv 0$, получим

$$E_{11} \frac{\partial u}{\partial x} - E_{12} \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad -E_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + E_{22} \frac{\partial v}{\partial y} = -\tau'y + \frac{\sigma_1^0 + \sigma_2^0}{2} \quad (2.6)$$

где $E_{ij} > 0$ ($i, j = 1, 2$), $E_{12} = E_{21}$, u и v — перемещения соответственно по осям x и y . Исключая из (2.6) величину u_x' , найдем

$$2\theta_3 v = -1/2 \tau'y^2 + 1/2 (\sigma_1^0 + \sigma_2^0) y + C(x) \\ 2\theta_3 (v_+ - v_-) = (\sigma_1^0 + \sigma_2^0) H, \quad \theta_3 = 1/2 (E_{11} E_{22} + E_{12}^2) \quad (2.7)$$

где v_+ и v_- — нормальные перемещения соответственно точек верхней и нижней граней наполнителя, а θ_3 — его приведенная контактная жесткость.

Снова в соответствии с законом Гука для ортотропной среды [4] и на основании (2.3) получим

$$G_3 (\partial u / \partial y + \partial v / \partial x) = \tau \quad (2.8)$$

где G_3 — приведенный модуль сдвига в плоскости x, y . Подставляя в (2.8) выражение v из (2.7), найдем

$$G_3 u = \tau y + \frac{G_3}{4\theta_3} \left[\frac{1}{3} \tau'' y^3 - \frac{1}{2} (\sigma_1^{0'} + \sigma_2^{0'}) y^2 - 2C'(x) y \right] + D(x) \\ G_3 (u_+ - u_-) = 2H\tau + G_3 \theta_3^{-1} [1/6 H^3 \tau'' - C'(x) H] \quad (2.9)$$

где u_+ и u_- — тангенциальные перемещения соответственно точек верхней и нижней граней наполнителя. Нетрудно убедиться, что перемещения (2.7) и (2.9) удовлетворяют условию совместности деформаций

$$\partial^2 \epsilon_x / \partial y^2 + \partial^2 \epsilon_y / \partial x^2 = \partial^2 \gamma_{xy} / \partial x \partial y \quad (2.10)$$

Заметим, что в случае чистого сдвига ($\tau = \text{const}$) второе соотношение (2.9) должно иметь вид $G_3 (u_+ - u_-) = 2H\tau$. Отсюда следует, что в (2.9) нужно положить $C'(x) = 0$.

Рассматривая второе соотношение (2.9) как дифференциальное уравнение относительно τ при граничных условиях (2.5), найдем

$$\tau = \frac{kG_3}{2H} \left[\int_0^x (u_+ - u_-) \sin k(x - \xi) d\xi - \frac{\sin kx}{\sin kl} \int_0^l (u_+ - u_-) \sin k(l - \xi) d\xi \right], \quad k^2 = \frac{12\theta_3}{H^2 G_3} \quad (2.11)$$

Итак, НДС в заполнителе определяется соотношением $\sigma_x \equiv 0$, а также формулами (2.3), (2.7), (2.9) и (2.11) при дополнительном условии (2.4).

3. Для пластин 1 и 2 будем использовать модель Кирхгофа — Лява — Мелана. Тогда можем записать [5]:

$$\begin{aligned} 4/3 \theta h^3 v_i^{IV} &= (-1)^{i-1} (\sigma_i - \sigma_i^0) + h\tau' \\ 4\theta h u_i'' &= (-1)^{i-1} \tau - \mu h (\sigma_i' + \sigma_i^{0'}) \\ \theta &= G(1 - \nu)^{-1}, \quad \mu = \nu(1 - \nu)^{-1} \end{aligned} \quad (3.1)$$

где u_i и v_i — перемещения точек срединной поверхности пластин 1 ($i=1$) и 2 ($i=2$) соответственно вдоль осей x и y . К (3.1) нужно добавить очевидные условия контакта пластин с заполнителем

$$v_+ = v_1, \quad u_+ = u_1, \quad v_- = v_2, \quad u_- = u_2 \quad (3.2)$$

Вычтем из уравнений (3.1) при $i=1$ эти же уравнения при $i=2$. Далее учтем второе соотношение (2.7), второе соотношение (2.9) и формулы (2.4), (3.2). В результате получим

$$4/3 \theta h^3 V^{IV} + 2\theta_3 H^{-1} V = \sigma_1 + \sigma_2 \quad (3.3)$$

$$4\theta h U'' - \mu k^2 h G_3 U - (1 - \mu h H k^2) 2\tau = -\mu h (\sigma_1' - \sigma_2') \quad (3.4)$$

$$(V = v_1 - v_2, \quad U = u_1 - u_2)$$

Заметим, что уравнение (3.3) есть уравнение изгиба балки на основании Фусса — Винклера. Продифференцируем уравнение (3.4) два раза и, учитывая снова второе соотношение (2.9), а также формулы (3.2), найдем

$$4\theta h U^{IV} - \mu k^2 h G_3 U'' - (1 - \mu h H k^2) (k^2 G_3 H^{-1} U - 2k^2 \tau) = -\mu h (\sigma_1^{IV} - \sigma_2^{IV}) \quad (3.5)$$

$$\text{Исключая из уравнений (3.4) и (3.5) величину } \tau, \text{ окончательно будем иметь} \\ 4\theta h U^{IV} + k^2 h (4\theta - \mu G_3) U'' - k^2 G_3 H^{-1} U = -\mu h [\sigma_1^{IV} - \sigma_2^{IV} + k^2 (\sigma_1' - \sigma_2')] \quad (3.6)$$

Сформулируем теперь граничные условия для уравнений (3.3) и (3.6). Поскольку на крае $x=0$ — жесткое защемление, а на крае $x=l$ — жесткая законцовка, то

$$V(0) = V'(0) = U(0) = 0, \quad V(l) = V'(l) = U(l) = 0 \quad (3.7)$$

Еще два граничных условия для уравнения (3.6) получим следующим образом: положим в (3.4) $x=0$ и с учетом (2.11), (3.2) найдем

$$4\theta U''(0) = -\mu [\sigma_1'(0) - \sigma_2'(0)] \quad (3.8)$$

Дифференцируя уравнение (3.4) один раз и снова полагая $x=0$, будем с учетом (2.11), (3.2) иметь

$$\begin{aligned} 4\theta h U'''(0) - \mu k^2 h G_3 U'(0) + k^2 G_3 H^{-1} (1 - \mu h H k^2) \times \\ \times \frac{1}{\sin kl} \int_0^l U(\xi) \sin k(l - \xi) d\xi = -\mu h [\sigma_1''(0) - \sigma_2''(0)] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Учитывая, что аэродинамические нагрузки на панель изменяются плавно,

далее аппроксимируем напряжения σ_1 и σ_2 полиномами второй степени, т. е. примем

$$\sigma_i(x) = a_i(x/l)^2 + b_i(x/l) + c_i \quad (i = 1, 2) \quad (3.10)$$

4. Решение уравнения (3.3) при граничных условиях (3.7) и с учетом (3.10) имеет вид

$$V = \text{sh } mx (C_1 \sin mx + C_2 \cos mx) + \text{ch } mx (C_3 \sin mx + C_4 \cos mx) + \frac{H}{2\theta_3} \left[(a_1 + a_2) \left(\frac{x}{l} \right)^2 + (b_1 + b_2) \frac{x}{l} + c_1 + c_2 \right] \quad (4.1)$$

$$C_1 = [D(ml)]^{-1} [mf_1(\cos 2ml - \text{ch } 2ml) + f_2(\sin 2ml - \text{sh } 2ml) + 4mf_3 \sin ml \text{sh } ml + 2f_4(\cos ml \text{sh } ml - \sin ml \text{ch } ml)]$$

$$C_2 = [D(ml)]^{-1} [-mf_1(\sin 2ml + \text{sh } 2ml) - 2f_2 \sin^2 ml + 2mf_3(\cos ml \text{sh } ml + \sin ml \text{ch } ml) - 2f_4 \sin ml \text{sh } ml]$$

$$C_3 = [D(ml)]^{-1} [mf_1(\sin 2ml + \text{sh } 2ml) + 2f_2 \text{sh}^2 ml - 2mf_3(\text{ch } ml \sin ml + \cos ml \text{sh } ml) + 2f_4 \sin ml \text{sh } ml]$$

$$C_4 = f_1, \quad D(ml) = 2m(\text{sh}^2 ml - \sin^2 ml)$$

$$f_1 = -\frac{H}{2\theta_3}(c_1 + c_2), \quad f_3 = -\frac{H}{2\theta_3}(a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2)$$

$$f_2 = -\frac{H}{2l\theta_3}(b_1 + b_2), \quad f_4 = -\frac{H}{2l\theta_3}(2a_1 + 2a_2 + b_1 + b_2)$$

$$4m^4 = 3\theta_3(2\theta H h^3)^{-1}$$

Решение уравнения (3.6) при граничных условиях (3.7)–(3.9) с учетом (3.10) имеет вид

$$U = C_1^* \text{sh } \eta px + C_2^* \text{ch } \eta px + C_3^* \sin \zeta px + C_4^* \cos \zeta px + A^* x + B^* \quad (4.2)$$

$$A^* = \frac{2\mu h H}{G_3 l^2}(a_1 - a_2), \quad B^* = \frac{\mu h H}{G_3 l}(b_1 - b_2)$$

$$2p^2 = k^2(1 - \mu G_3/(4\theta)), \quad n^4 = k^2 G_3/(4\theta h H)$$

$$\eta^2 = \sqrt{1 + (n/p)^4} - 1, \quad \zeta^2 = \sqrt{1 + (n/p)^4} + 1$$

$$C_1^* = \frac{g_5 + Bg_6}{p^2(\zeta^2 + \eta^2) \text{sh } \eta pl}, \quad C_2^* = \frac{-g_1 \zeta^2 p^2 - g_2}{p^2(\zeta^2 + \eta^2)}$$

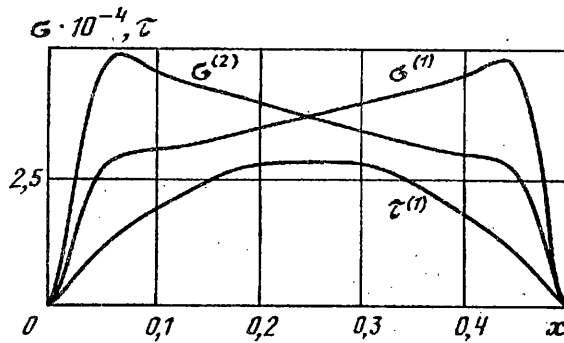
$$C_3^* = \frac{-g_5 + Ag_6}{p^2(\zeta^2 + \eta^2) \sin \zeta pl}, \quad C_4^* = \frac{-g_1 \eta^2 p^2 + g_2}{p^2(\zeta^2 + \eta^2)}$$

$$g_1 = B^*, \quad g_2 = n^4 k^{-2} B^*, \quad g_4 = A^* l + B^*$$

$$g_3 = \frac{1}{\sin kl} [n^4 + k^2(2p^2 - k^2)] \left(\frac{l}{k} A^* + \frac{1 - \cos kl}{k} B^* \right)$$

$$g_5 = -\frac{\sin kl}{k} g_3 - AaC_2^* - \frac{\zeta p}{k} BbC_4^*$$

$$g_6 = -g_4 - C_2^* \text{ch } \eta pl - C_4^* \cos \zeta pl$$



Фиг. 3

$$A = \eta^2 p^2 + 2p^2 - k^2, \quad B = \zeta^2 p^2 - 2p^2 + k^2$$

$$a = \operatorname{ch} \eta pl - \cos kl, \quad b = \cos \zeta pl - \cos kl$$

Здесь предположено, что имеет место неравенство

$$GG_3^{-1} > 1/4\nu \quad (4.3)$$

которое в практических ситуациях всегда выполняется, ибо $G \gg G_3$.

5. Перейдем к определению контактных напряжений σ_1^0 , σ_2^0 и τ . По (2.7) с учетом (3.2) найдем

$$\sigma_1^0 + \sigma_2^0 = 2\sigma^* = 2\theta_3 V/H \quad (5.1)$$

где V определяется формулой (4.1). По (2.11) с учетом (3.2) и (4.2) найдем

$$\begin{aligned} \tau = \frac{kG_3}{2H} & \left[\frac{C_1^* k}{\eta^2 p^2 + k^2} \operatorname{sh} \eta px + \frac{C_2^* k}{\eta^2 p^2 + k} \operatorname{ch} \eta px - \frac{C_3^* k}{\zeta^2 p^2 - k^2} \sin \zeta px + \right. \\ & + \frac{C_4^* \zeta p}{\zeta^2 p^2 - k^2} \cos \zeta px - \left. \left(\frac{C_2^* k}{\eta^2 p^2 + k^2} + \frac{C_4^* \zeta p}{\zeta^2 p^2 - k^2} + \frac{B^*}{k} \right) \times \right. \\ & \left. \times \cos kx + \frac{1}{k} (B^* + A^* x) \right] \quad (5.2) \end{aligned}$$

Условие того, что $\zeta^2 p^2 \neq k^2$, имеет вид

$$1/12 (1 - \nu) \nu^{-1} \neq \theta_3 h (G_3 H)^{-1} \quad (5.3)$$

последнее в практических ситуациях всегда выполняется, ибо минимум левой части (5.3) равен $1/12$, а в правой части $h \ll H$, θ_3 и G_3 — одного порядка.

Далее по формулам (2.4), (5.1) и (5.2) отдельно найдем σ_1^0 и σ_2^0 :

$$\sigma_1^0 = \sigma^* - H\tau', \quad \sigma_2^0 = \sigma^* + H\tau' \quad (5.4)$$

Рассмотрим характерный пример. Пусть $h = 0,001$ м, $H = 0,05$ м, $l = 0,5$ м, $G = 8 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu = 0,28$, $G_3 = 1,2 \cdot 10^8$ Па, $\theta_3 = 0,6 \cdot 10^8$ Па, $a_1 = a_2 = b_2 = c_2 = 0$, $P = T = M = 0$ и кроме того $b_1 = 5 \cdot 10^4$ Па, $c_1 = 5 \cdot 10^4$ Па (вариант 1), $b_1 = -5 \cdot 10^4$ Па, $c_1 = 10^5$ Па (вариант 2). На фиг. 3 представлены результаты расчетов по указанным выше формулам. Значения нормальных контактных напряжений σ_1^0 и σ_2^0 в основном имеют порядок 10^4 Па; ввиду малости $H\tau'$ они мало разнятся и даны кривой 1 ($\sigma^{(1)}$) для варианта 1 и кривой 2 ($\sigma^{(2)}$) для варианта 2. В малой окрестности $x = 0$ и $x = l$ значения σ_1^0 и σ_2^0 на четыре порядка меньше основных, но отличаются знаками. Именно:

при $x = 0$ для варианта 1 $\sigma_2^0 = -\sigma_1^0 = 1,22$ Па, для варианта 2 $\sigma_1^0 = -\sigma_2^0 = 1,22$ Па;

при $x=l$ для варианта 1 $\sigma_1^0 = -\sigma_2^0 = 1,21$ Па, для варианта 2 $\sigma_2^0 = -\sigma_1^0 = 1,21$ Па.

Касательные контактные напряжения τ на четыре порядка меньше нормальных и даны кривой 3 ($\tau^{(1)}$) для варианта 1, $\tau^{(2)} = -\tau^{(1)}$. Установлено, что вообще при разумных геометрических и механических параметрах панели способ ее нагружения мало влияет на порядок контактных касательных напряжений.

6. Чтобы найти усилия и моменты, действующие на краях пластин 1 и 2, нужно сформулировать условия совместности деформаций пластин в узле $x=l$. С этой целью придадим уравнениям (3.1) на основании (1.5) и (1.6) вид

$$4/3 \theta h^3 v_i'' = -M_i(x) \quad (i = 1, 2) \quad (6.1)$$

$$40hu_i' = T_i(x) - \mu h(\sigma_i + \sigma_i^0)$$

Учитывая далее, что пластины 1 и 2 на крае $x=0$ жестко защемлены, т. е.

$$v_i'(0) = v_i(0) = u_i(0) = 0 \quad (6.2)$$

найдем из (6.1) следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \theta h^3 v_i' &= M_i x - \frac{1}{2} (-1)^{i-1} \int_0^x (\sigma_i^0 - \sigma_i) (x - \xi)^2 d\xi + h \int_0^x \tau (x - \xi) d\xi + \frac{1}{2} P_i x^2 \\ \frac{4}{3} \theta h^3 v_i &= \frac{1}{2} M_i x^2 - \frac{1}{6} (-1)^{i-1} \int_0^x (\sigma_i^0 - \sigma_i) (x - \xi)^3 d\xi + \\ &+ \frac{h}{2} \int_0^x \tau (x - \xi)^2 d\xi + \frac{1}{6} P_i x^3 \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$40hu_i = -T_i x + (-1)^{i-1} \int_0^x \tau (x - \xi) d\xi - \mu h \int_0^x (\sigma_i + \sigma_i^0) d\xi$$

С помощью формул (6.3) составим теперь выражения V' , V и U . Удовлетворяя затем условиям (3.7) на крае $x=l$ и учитывая (2.4), будем иметь

$$\begin{aligned} (M_1 - M_2) l - \frac{1}{2} \int_0^l (2\sigma^* - \sigma_1 - \sigma_2) (l - \xi)^2 d\xi + \frac{1}{2} (P_1 - P_2) l^2 &= 0 \\ (M_1 - M_2) l^2 - \frac{1}{3} \int_0^l (2\sigma^* - \sigma_1 - \sigma_2) (l - \xi)^3 d\xi + \frac{1}{3} (P_1 - P_2) l^3 &= 0 \quad (6.4) \\ (T_1 - T_2) l - 2 \int_0^l \tau (l - \xi) d\xi + \mu h \int_0^l (\sigma_1 - \sigma_2) d\xi &= 0 \end{aligned}$$

Добавляя к (6.4) соотношения (1.1), (1.2) и (1.4), получим систему 12 уравнений для определения всех усилий и моментов.

Соотношения (1.1) и (1.2) с учетом (2.4) можно представить в более удобном для вычислений виде

$$\begin{aligned} P_1 - P_1^y - P_2 + P_2^y - \int_0^l (2\sigma^* - \sigma_1 - \sigma_2) d\xi &= 0 \\ P_1 - P_1^y + P_2 - P_2^y + \int_0^l (\sigma_1 - \sigma_2) d\xi &= 0 \quad (6.5) \\ T_1 - T_1^y - T_2 + T_2^y - 2 \int_0^l \tau d\xi = 0, \quad T_1 - T_1^y + T_2 - T_2^y &= 0 \\ M_1 - M_1^y - M_2 + M_2^y + (P_1^y - P_2^y) l + \int_0^l \xi (2\sigma^* - \sigma_1 - \sigma_2) d\xi &= 0 \end{aligned}$$

$$M_1 - M_1^y + M_2 - M_2^y + (P_1^y + P_2^y) l + 2(H + h) \int_0^l \tau d\xi - \int_0^l \xi (\sigma_1 - \sigma_2) d\xi = 0$$

В (6.4) и (6.5) функции σ_1 , σ_2 , σ^* и τ даются соответственно формулами (3.10), (5.1) и (5.2).

Для рассмотренного выше примера из (1.4), (6.4) и (6.5) определим усилия и моменты

P_1	T_1	M_1	P_1^y	T_1^y	M_1^y
$-1,93 \cdot 10^4$	$-1,41 \cdot 10$	$5,22 \cdot 10^3$	$1,10 \cdot 10^3$	$-1,51 \cdot 10$	$1,29 \cdot 10$
$-1,98 \cdot 10^4$	$-1,51 \cdot 10$	$4,18 \cdot 10^3$	$5,70 \cdot 10^2$	$-1,41 \cdot 10$	$7,21$
P_2	T_2	M_2	P_2^y	T_2^y	M_2^y
$-1,82 \cdot 10^4$	$1,41 \cdot 10$	$5,20 \cdot 10^3$	$-1,10 \cdot 10^3$	$1,51 \cdot 10$	$1,14 \cdot 10$
$-1,76 \cdot 10^4$	$1,51 \cdot 10$	$4,16 \cdot 10^3$	$-5,70 \cdot 10^2$	$1,41 \cdot 10$	$5,77$

Здесь первые строчки для варианта 1, вторые — для варианта 2, размерность усилий — Н/м, а размерность моментов — Н. По формулам (1.5) и (1.6) далее могут быть найдены усилия и моменты в любом сечении пластин 1 и 2.

7. Перейдем к определению напряжений в пластинах 1 и 2. Для определенности рассмотрим пластину 1. Очевидно, что усилия $T_1(x)$, $Q_1(x)$ и $M_1(x)$, действующие в ее сечении, можно представить в форме следующих интегралов:

$$T_1(x) = \int_{-h}^h \sigma_x dx, \quad Q_1(x) = \int_{-h}^h \tau_{xy} dy, \quad M_1(x) = \int_{-h}^h y \sigma_x dy \quad (7.1)$$

Для модели Кирхгофа — Лява — Мелана известно, что σ_x линейно по y , тогда в силу (7.1):

$$\sigma_x = 3M_1(x)y/(2h^3) + T_1(x)/(2h) \quad (7.2)$$

Подставляя (7.2) в первое уравнение равновесия (2.1), найдем

$$\tau_{xy} = -\frac{3M_1'(x)}{4h^3} y^2 - \frac{T_1'(x)}{2h} y + E(x) \quad (7.3)$$

Интегрируя полученное соотношение по y в пределах от $-h$ до h , с учетом (7.1) будем иметь

$$\tau_{xy} = \frac{M_1'(x)}{4h} \left(1 - \frac{3y^2}{h^2}\right) - \frac{T_1'(x)}{2h} y + \frac{Q_1(x)}{2h} \quad (7.4)$$

Условия $\tau_{xy}(x, h) = 0$ и $\tau_{xy}(x, -h) = \tau$ с учетом формул (1.5) автоматически выполняются. Далее из второго уравнения равновесия (2.1) на основании (7.4) получим

$$\sigma_y = -\frac{M_1''(x)}{4h} \left(y - \frac{y^3}{h^2}\right) + \frac{T_1''(x)}{4h} y^2 - \frac{Q_1'(x)}{2h} y + F(x) \quad (7.5)$$

Удовлетворим условию $\sigma_y(x, h) = \sigma_1$; тогда окончательно

$$\sigma_y = -\frac{M_1''(x)}{4h} \left(y - \frac{y^3}{h^2}\right) - \frac{T_1''(x)h}{4} \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) + \frac{Q_1'(x)}{2} \left(1 - \frac{y}{h}\right) + \sigma_1 \quad (7.6)$$

Условие $\sigma_y(x, -h) = \sigma_1^0$ с учетом второй формулы (1.5) автоматически выполняется.

Заметим, что формулы типа (7.2), (7.4) и (7.6) получены в [5] (см. (4.8) гл. 1) асимптотическим методом, учитывающим малость относительной толщины пластины. Выражения $T_1(x)$, $Q_1(x)$ и $M_1(x)$, которые нужно подставить в (7.2), (7.4) и (7.6) даются соотношениями (1.5). Для пластины 2 в формулах (7.2), (7.4) и (7.6) нужно заменить $T_1(x)$, $Q_1(x)$, $M_1(x)$, σ_1 и σ_1^0 соответственно на $T_2(x)$, $Q_2(x)$, $M_2(x)$, σ_2 и σ_2^0 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Победра Б. Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
2. *Ванин Г. А.* Микромеханика композиционных материалов. Киев: Наук. думка, 1985. 302 с.
3. *Григолюк Э. И., Фильшинский Л. А.* Периодические кусочно-однородные упругие структуры. М.: Наука, 1992. 287 с.
4. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
5. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.

Москва

Поступила в редакцию
6.VII.1993