МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1995

УДК 539.3

 Г. И. ПШЕНИЧНОВ, В. И. УЛЬЯНОВА

ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ РАСТЯНУТОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ С УПРУГИМ КОНТУРОМ

Методом декомпозиции [1] получено приближенное аналитическое решение задачи изгиба тонкой упругой прямоугольной пластины, растянутой в двух направлениях различными по величине равномерно распределенными погонными силами. Пластина характеризуется двумя коэффициентами упругости в отношении поворота нормали вокруг линии контура (коэффициенты упругости противоположных сторон контура одинаковы). Поперечная нагрузка по поверхности пластины распределена равномерно.

Сопоставление результатов расчетов в предельных случаях, когда жесткость контура пластины равна нулю или бесконечности, с имеющимися точными решениями указывает на высокую точность полученных приближенных формул.

Известно, что дифференциальное уравнение рассматриваемой задачи при обычных обозначениях имеет вид

$$D\Delta\Delta w - (p_1\partial^2 w/\partial x^2 + p_2\partial^2 w/\partial y^2) = q \tag{1}$$

где p_1, p_2, q — заданные числа ($p_1 \geq 0$, $p_2 > 0$).

Уравнение (1) будем решать при следующих граничных условиях:

$$w = 0, \quad M_x = \pm r_1 \partial w/\partial x \quad (x = \pm a/2)$$

$$w = 0, \quad M_y = \pm r_2 \partial w/\partial y \quad (y = \pm b/2)$$

где r_1, r_2 — коэффициенты упругости контура пластины. Эти условия с учетом безразмерных коэффициентов упругости

$$k_1 = D/(D + r_1 a), \quad k_2 = D/(D + r_2 b) \tag{2}$$

представим в виде

$$w = k_1 a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \pm (1 - k_1)\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \left(x = \pm\frac{a}{2}\right) \tag{3}$$

$$w = k_2 b \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \pm (1 - k_2)\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \left(y = \pm\frac{b}{2}\right) \tag{4}$$

Здесь было учтено, что вторые члены в формулах

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \quad M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{5}$$

на контуре, где $w = 0$, обращаются в нуль. Значения r_1 и r_2 больше или равны нулю. Поэтому в соответствии с (2) коэффициенты k_1 и k_2 изменяются от нуля до единицы (предельные случаи 0 и 1 соответствуют жесткому и шарнирному закреплению сторон пластины).

Введем следующие обозначения: $\alpha = x/a$, $\beta = y/a$, $\lambda = b/a$, $\gamma^2 = p_1/p_2$, $\varepsilon^2 = D/(a^2 p_2)$, $w = qa^2 u/p_2$.

Тогда краевая задача (1), (3), (4) принимает вид

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial \beta^4} \right) - \left(\gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \right) = 1 \qquad (6)$$

$$u = k_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} \pm (1 - k_1) \frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0 \qquad \left(\alpha = \pm \frac{1}{2} \right) \qquad (7)$$

$$u = k_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \pm (1 - k_2) \frac{\partial u}{\partial \beta} = 0 \qquad \left(\beta = \pm \frac{\lambda}{2} \right) \qquad (8)$$

Краевую задачу (6)—(8) будем решать методом декомпозиции [1]. Этот метод дает широкие возможности для решения задач численными или аналитическими методами. На его основе примем следующий путь решения рассматриваемой задачи. Введем в рассмотрение три вспомогательные задачи.

Первая вспомогательная задача: найти решение дифференциального уравнения

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^4 u^{(1)}}{\partial \alpha^4} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial \alpha^2} = f^{(1)}(\alpha, \beta)$$

удовлетворяющее условиям (7) при $u \equiv u^{(1)}$.

Вторая вспомогательная задача: найти решение дифференциального уравнения

$$\varepsilon^2 \partial^4 u^{(2)} / \partial \beta^4 - \partial^2 u^{(2)} / \partial \beta^2 = f^{(2)}(\alpha, \beta)$$

удовлетворяющее условиям (8) при $u \equiv u^{(2)}$.

Третья вспомогательная задача: найти решение дифференциального уравнения

$$\Phi(\alpha, \beta) \equiv 2\varepsilon^2 \frac{\partial^4 u^{(3)}}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + f^{(1)}(\alpha, \beta) + f^{(2)}(\alpha, \beta) - 1 = 0 \qquad (9)$$

Решение исходной задачи (6)—(8) будет совпадать с решением вспомогательных задач при условии их равенства, т. е.

$$u = u^{(1)} = u^{(2)} = u^{(3)} \qquad (10)$$

Эти условия позволяют определить неизвестные функции $f^{(1)}(\alpha, \beta)$ и $f^{(2)}(\alpha, \beta)$.

Рассматриваемую задачу будем решать приближенно, принимая

$$f^{(1)}(\alpha, \beta) = f_0^{(1)}(\beta) + \alpha^2 f_2^{(1)}(\beta), \quad f^{(2)}(\alpha, \beta) = f_0^{(2)}(\alpha) + \beta^2 f_2^{(2)}(\alpha) \qquad (11)$$

Решив первую и вторую краевые задачи при условиях (11) и используя условие их равенства (10), получим

$$u^{(1)} = u^{(2)} = C_1 \psi_1(\alpha) \psi_3(\beta) + C_2 \psi_1(\alpha) \psi_4(\beta) + $$
$$+ C_3 \psi_2(\alpha) \psi_3(\beta) + C_4 \psi_2(\alpha) \psi_4(\beta) \qquad (12)$$

$$\psi_1(\alpha) = \varphi_1(\alpha; \gamma, 1, k_1), \quad \psi_2(\alpha) = \varphi_2(\alpha; \gamma, 1, k_1)$$

$$\psi_3(\beta) = \varphi_1(\beta; 1, \lambda, k_2), \quad \psi_4(\beta) = \varphi_2(\beta; 1, \lambda, k_2)$$

$$\varphi_1(z; \delta, \eta, k) = \frac{\eta^2 - 4z^2}{8\delta^2} - \frac{[\eta + (2 - \eta) k] (\operatorname{ch} \varkappa - \operatorname{ch} gz)}{2g\delta^2 [\operatorname{sh} \varkappa + (g \operatorname{ch} \varkappa - \operatorname{sh} \varkappa) k]}$$

$$\varphi_2(z; \delta, \eta, k) = \frac{\eta^4 - 16z^4}{192\delta^2} - \frac{\eta^2 [\eta + k(6 - \eta)] (\operatorname{ch} \varkappa - \operatorname{ch} gz)}{24g\delta^2 [\operatorname{sh} \varkappa + k(g \operatorname{ch} \varkappa - \operatorname{sh} \varkappa)]} +$$

$$+ \frac{2}{g^2} \varphi_1(z; \delta, \eta, k), \quad g = \frac{\delta}{\varepsilon}, \quad \varkappa = \frac{g\eta}{2}$$

где C_1, C_4 — произвольные постоянные.

Выражение (12) представляет собой приближенное решение исходной задачи с точностью до четырех констант. Эти константы, принимая во внимание (10) и (11), найдем из условия приближенного решения дифференциального уравнения (9), которое принимает вид

$$\Phi(\alpha, \beta) \equiv [\psi_1(\alpha) + \psi_3(\beta) + 2\varepsilon^2\psi_1''(\alpha)\psi_3''(\beta)]C_1 + [\beta^2\psi_1(\alpha) +$$

$$+ \psi_4(\beta) + 2\varepsilon^2\psi_1''(\alpha)\psi_4''(\beta)]C_2 + [\psi_2(\alpha) + \alpha^2\psi_3(\beta) + 2\varepsilon^2\psi_2''(\alpha)\psi_3''(\beta)]C_3 +$$

$$+ [\beta^2\psi_2(\alpha) + \alpha^2\psi_4(\beta) + 2\varepsilon^2\psi_2''(\alpha)\psi_4''(\beta)]C_4 - 1 = 0$$

Штрихи означают производные по соответствующим аргументам.

Для приближенного решения этого уравнения используем следующие четыре условия [2]:

$$\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2} = \frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = \beta = 0 \tag{13}$$

В результате константы $\overline{C_1, C_4}$ в приближенном аналитическом решении (12) определяются как компоненты вектора C путем решения системы из четырех линейных алгебраических уравнений

$$AC = f$$

$$a_{11} = \psi_1 + \psi_3 + 2\varepsilon^2\psi_1''\psi_3'', \quad a_{12} = \psi_4 + 2\varepsilon^2\psi_1''\psi_4''$$

$$a_{13} = \psi_2 + 2\varepsilon^2\psi_2''\psi_3'', \quad a_{14} = 2\varepsilon^2\psi_2''\psi_4''$$

$$a_{21} = \psi_1'' + 2\varepsilon^2\psi_1^{IV}\psi_3'', \quad a_{22} = 2\varepsilon^2\psi_1^{IV}\psi_4''$$

$$a_{23} = \psi_2'' + 2\psi_3 + 2\varepsilon^2\psi_2^{IV}\psi_3'', \quad a_{24} = 2(\psi_4 + \varepsilon^2\psi_2^{IV}\psi_4'')$$

$$a_{31} = \psi_3'' + 2\varepsilon^2\psi_1''\psi_3^{IV}, \quad a_{32} = 2\psi_1 + \psi_4'' + 2\varepsilon^2\psi_1''\psi_4^{IV}$$

$$a_{33} = 2\varepsilon^2\psi_2''\psi_3^{IV}, \quad a_{34} = 2(\psi_2 + \varepsilon^2\psi_2''\psi_4^{IV})$$

$$a_{41} = 2\varepsilon^2\psi_1^{IV}\psi_3^{IV}, \quad a_{42} = 2(\psi_1'' + \varepsilon^2\psi_1^{IV}\psi_4^{IV})$$

$$a_{43} = 2(\psi_3'' + \varepsilon^2\psi_2^{IV}\psi_3^{IV}), \quad a_{44} = 2(\psi_2'' + \psi_4'' + \varepsilon^2\psi_2^{IV}\psi_4^{IV})$$

Элементы матрицы A вычисляются при $\alpha = \beta = 0$. Компоненты вектора f, за исключением первого ($f_1 = 1$), равны нулю.

Для широкого диапазона изменения параметров задачи: $\lambda = 1$; 1,5; 2, $\gamma^2 = 0$; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1, $\varepsilon^2 = 0{,}001$; 0,005; 0,03; 0,15; 0,6; 1; 2; 3 при $\nu = 0{,}3$ были получены результаты решения в случаях, когда пластина по всему контуру закреплена жестко ($k_1 = k_2 = 0$) и шарнирно ($k_1 = k_2 = 1$), т. е. было решено 288 задач. В этих и всех последующих задачах принималось $\nu = 0{,}3$.

В первом случае закрепления пластины имеется численное решение [3], во втором — легко получить точное аналитическое решение в виде разложения в двойные тригонометрические ряды. Каждым из этих методов было решено по 144 задачи с указанными параметрами.

Сопоставление результатов показало, что полученное в настоящей статье приближенное решение обладает высокой точностью как по прогибам пластины, так и по изгибающим моментам: во всех случаях погрешность максимальных по модулю значений этих функций не превышала 4%.

Рассмотрим квадратную пластину ($\lambda = 1$), растянутую в обоих направлениях усилиями одинаковой интенсивности ($\gamma^2 = 1$). Две противоположные стороны пластины закреплены жестко ($k_1 = 0$), а две другие — опираются шарнирно ($k_2 = 1$).

Зависимость решения задачи поперечного изгиба пластины от параметра ε^2 представлена в табл. 1.

Используя данные, приведенные в этой таблице, можно вычислить максимальный прогиб (в центре пластины) и максимальный по модулю изгибающий момент (в серединах жестко закрепленных сторон) по формулам

Таблица 1

ε^2	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	2	3
$10^3 u_0$	14,5	8,08	5,61	4,30	3,48	2,93	2,52	2,22	1,98	1,79	0,905	0,606
$10^2 M_0$	55,9	30,3	20,8	15,8	12,8	10,7	9,22	8,09	7,21	6,51	3,28	2,20
$10^3 c_1$	1,45	1,62	1,68	1,72	1,74	1,76	1,76	1,78	1,78	1,79	1,81	1,82
$-10^2 c_4$	5,59	6,06	6,24	6,32	6,40	6,42	6,45	6,47	6,49	6,51	6,56	6,60

Таблица 2

k	0	0,03	0,06	0,09	0,12	0,15	0,18	0,21	0,24	0,27	0,40
0,4	66,2 479	73,7 332	78,1 251	81,0 200	83,1 164	84,6 137	85,8 118	86,8 102	87,6 92,3 *	88,2 92,4 *	90,1 92,7 *
1	50,8 393	56,1 267	59,0 200	60,8 158	62,1 129	63,0 107	63,7 91,3	64,3 78,6	64,7 68,3	65,1 64,6 *	66,2 64,7 *

Таблица 3

k	0	0,03	0,06	0,09	0,12	0,15	0,18	0,21	0,24	0,27	0,40
0,4	27,8 128	32,7 106	36,4 89,7	39,3 77,3	41,7 67,5	43,7 59,4	45,4 57,9 *	46,9 58,8 *	48,1 59,6 *	49,2 60,2 *	52,7 62,4 *
1	24,5 116	28,6 94,6	31,5 79,4	33,8 67,9	35,6 58,8	37,1 51,4	38,4 47,6 *	39,4 48,1 *	40,3 48,6 *	41,1 48,9 *	43,5 50,2 *

$$w = qa^2 u_0/p_2, \quad M = -qDM_0/p_2 \tag{14}$$

В [4] приводятся значения этих величин для случая, когда пластина не растянута ($p_1 = p_2 = 0$):

$$w = c_1 qa^4/D, \quad M = c_4 qa^2 \tag{15}$$

$$c_1 = 1{,}92\cdot 10^{-3}, \quad c_4 = -6{,}97\cdot 10^{-2} \tag{16}$$

Если представить формулы (14) в виде (15), получим

$$c_1 = \varepsilon^2 u_0, \quad c_4 = -\varepsilon^2 M_0 \tag{17}$$

Решение (17) должно совпадать с (16) при $\varepsilon^2 \to \infty$. В табл. 1 приведены также значения c_1 и c_4.

Требуется выполнить расчеты прямоугольной пластины с упругим контуром. Жесткость контура одинакова по всему периметру ($k_1 = k_2 = k$).

Результаты расчетов для некоторых значений параметров задачи приведены в табл. 2—5 соответственно при следующих значениях λ и ε^2: (1; 0,005), (1; 0,03), (2; 0,005), (2; 0,03). В них даны значения $10^3 u_0$ и $10^2\,|M_0|$, которые размещены соответственно в верхних и нижних строках, относящихся к значениям $\gamma^2 = 0{,}4$ и $\gamma^2 = 1$. Если максимальные значения прогибов всегда в центре пластины, то максимальные по модулю значения M_0 с ростом k перемещаются с контурной точки пластины (на контуре $M_0 > 0$) в ее центральную точку (в центре $M_0 < 0$ и соответствующие цифры отмечены в таблицах звездочками).

Из анализа представленных в таблицах результатов можно сделать некоторые выводы. При абсолютно жестком контуре ($k = 0$) максимальный прогиб пластины минимален, а изгибающий момент по модулю принимает максимальное значение.

Прогиб в центре пластины представляет собой монотонно возрастающую

Таблица 4

k	0	0,03	0,06	0,09	0,12	0,15	0,18	0,21	0,24	0,27	0,40
0,4	141	156	166	173	178	182	185	187	189	191	196
	737	561	448	368	309	264	228	199	178 *	178 *	178 *
1	81,8	89,6	93,9	96,7	98,6	100	101	102	103	103	105
	566	390	293	232	190	159	135	116	101	91 *	91 *

Таблица 5

k	0	0,03	0,06	0,09	0,12	0,15	0,18	0,21	0,24	0,27	0,40
0,4	57,2	67,1	75,2	81,9	87,6	92,5	96,7	100	104	107	116
	212	184	162	144	128	115	109 *	111 *	113 *	115 *	120 *
1	43,8	50,5	55,5	59,5	62,7	65,4	67,6	69,5	71,1	72,6	77,1
	180	151	128	111	96,7	85,1	75,5	73,5 *	74,1 *	74,7 *	76,4 *

Таблица 6

k_2	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,40
$10^3\, u_0$	24,5	25,3	25,9	26,4	26,9	27,2	27,6	27,9	28,2	28,4	28,6	31,2
$10^2\, M_0$	116	119	121	123	124	126	127	128	129	130	131	140

функцию k, асимптотически стремящуюся к некоторому пределу, зависящему от других параметров задачи.

Максимум модуля изгибающего момента с ростом k от нуля до некоторого предельного значения монотонно убывает и остается в точке контура пластины. При дальнейшем возрастании параметра k этот максимум перемещается в центр пластины и очень слабо и монотонно возрастает, стремясь асимптотически к пределу, зависящему от других параметров задачи.

С ростом параметра λ, а также с уменьшением γ^2, максимальные значения прогиба и модуля изгибающего момента возрастают.

При практических расчетах можно считать, что при $k > 0{,}3$ пластину можно считать шарнирно закрепленной по контуру $(k = 1)$.

Эти выводы согласуются с физическими представлениями о задаче.

Рассмотрим поперечный изгиб квадратной ($\lambda = 1$) пластины, растянутой в обоих направлениях силами одинаковой интенсивности ($\gamma^2 = 1$). Две противоположные стороны пластины закреплены жестко $(k_1 = 0)$, две другие — упруго. Результаты решения задачи для различных значений k_2 при $\varepsilon^2 = 0{,}03$ приведены в табл. 6. Отметим, что методом декомпозиции [1] получены решения достаточно большого числа новых линейных и нелинейных краевых задач. Из публикаций (их более двадцати) укажем на [2, 4—7][1].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-01734).

[1] См. также: *Баклановская В. Ф., Галишникова В. В., Клабукова Л.С., Пшеничнов Г. И.* О численном и аналитическом решениях некоторых краевых задач для уравнений с частными производными методом декомпозиции//2 Всес. конф. Новые подходы к решению дифференциальных уравнений. Тез. докл. М.: ВЦ АН СССР, 1989. С. 15.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пшеничнов Г. И.* Метод декомпозиции решения уравнений и краевых задач//Докл. АН СССР. 1985. Т. 282. № 4. С. 792—794.
2. *Галишникова В. В., Пшеничнов Г. И.* Решение задачи изгиба прямоугольной пластинки с упругим контуром методом декомпозиции//Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1990. Вып. 32. С. 67—72.
3. *Абрамов А. А., Ульянова В. И.* Об одном методе решения уравнения типа бигармонического с сингулярно входящим малым параметром//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32. № 4. С. 567—575.
4. *Пшеничнов Г. И., Скориков А. В.* Свободные колебания пологой сферической оболочки с упругим контуром//Теоретическая и прикладная механика. Харьков: Вища шк., 1989. Вып. 20. С. 76—80.
5. *Клабукова Л. С.* О применении метода декомпозиции для решения некоторых задач математической физики. М.: ВЦ АН СССР, 1989. Сообщения по прикладной математике. 28 с.
6. *Пшеничнов Г. И.* Метод декомпозиций и его применение к решению задач упругости//Численные методы решения задач теории упругости и пластичности. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1990. С. 177—181.
7. *Пшеничнов Г. И., Скориков А. В.* Свободные колебания ортотропной прямоугольной пластины с упругим контуром//Изв. АН. МТТ. 1992. № 2. С. 166—169.

Москва

Поступила в редакцию
15.VI.1993