МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1995

УДК 539.3

© 1995 г. Е. Б. КОРЕНЕВА

О РАСШИРЕНИИ ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ОБ АНТИСИММЕТРИЧНОМ ИЗГИБЕ ИЗОТРОПНЫХ И ОРТОТРОПНЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Рассматриваются задачи об антисимметричном изгибе изотропных и ортотропных круглых пластин линейно-переменной толщины: $h = h_0 \,|1 - x|$, $x = \pm r/r_0$, где h_0, τ_0 — постоянные. Задача об антисимметричной деформации подобной ортотропной пластины исследовалась в [1], где решения получены в гипергеометрических функциях и там же показано, что при коэффициенте Пуассона $\nu = 1/3$ указанные решения распадаются на элементарные.

Однако при коэффициенте Пуассона, даже незначительно отличающемся от 1/3, для вычислений используются решения в гипергеометрических функциях, которые являются весьма громоздкими и требуют удержания не менее 30 членов, входящих в решение степенных рядов.

Ниже будет исследована возможность расширения области применения решений в элементарных функциях в задачах об антисимметричном изгибе круглых пластин, когда коэффициент Пуассона отличается от $1/3$. Для этого в публикуемой работе используется метод возмущений, являющийся одним из самых эффективных способов решения задач теории упругости неоднородных тел. Процесс решения видоизменяется по сравнению с другими публикациями, например [2], где в качестве базисных выбирались решения задач теории упругости однородных тел. Здесь процесс решения сводится к рассмотрению последовательности краевых неоднородных задач, сводящихся к решению уравнений с переменными коэффициентами, для которых находятся точные решения. Этот подход имеет заметное преимущество, поскольку позволяет использовать значительно более близкие к изучаемым задачи теории упругости. Для реализации указанного подхода в достаточно простой и удобной форме получены выражения для функций Коши.

1. Рассмотрим антисимметричную деформацию круглой изотропной пластины линейно-переменной толщины; этот случай описывается следующим дифференциальным уравнением [1]:

$$x^3 (1 - x)^3 \frac{d^2\varkappa_0}{dx^2} + 3x^2 (1 - x)^2 (1 - 2x) \frac{d\varkappa_0}{dx} -$$

$$- 3x^3 (1 - x)^2 \left[\frac{1}{x} + 1 + \nu\right] \varkappa_0 = \frac{12 (1 - \nu^2)}{Eh_0^3 r_0} C \tag{1.1}$$

где $\varkappa_0$ — амплитудное значение изгибной деформации, ν — коэффициент Пуассона, E — модуль упругости, C — постоянная интегрирования, определяемая из граничного условия для поперечной силы на контуре.

Как известно, решение однородного уравнения, соответствующего (1.1), выражается в гипергеометрических функциях. Решение этого же уравнения при $\nu = 1/3$ выражается в элементарных функциях

$$\varkappa_\theta^{(1)} = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \varkappa_\theta^{(2)} = \frac{3-4x}{6x^3(1-x)^2} \tag{1.2}$$

С целью расширения области применения решений (1.2) используем метод возмущений; представим коэффициент Пуассона в виде

$$\nu = 1/3 + \varepsilon \tag{1.3}$$

Будем искать решение задачи (1.1), (1.3) в виде ряда по степеням

$$\varkappa_\theta(x) = \varkappa_0(x) + \varepsilon \varkappa_1(x) + \varepsilon^2 \varkappa_2(x) + \ldots \tag{1.4}$$

Внесем (1.3) и (1.4) в уравнение (1.1), в результате чего получим последовательность задач для $\varkappa_i(x)$ $(i = 0, 1, 2 \ldots)$:

$$x^3(1-x)^3(\varkappa_0'' + \varepsilon\varkappa_1'' + \varepsilon^2\varkappa_2'' + \ldots) + 3x^2(1-x)^2(1-2x) \times$$
$$\times (\varkappa_0' + \varepsilon\varkappa_1' + \varepsilon^2\varkappa_2' + \ldots) - 3x^2(1-x^2)[1/x + 4/3 + \varepsilon] \times$$
$$\times [\varkappa_0 + \varepsilon\varkappa_1 + \varepsilon^2\varkappa_2 + \ldots] = 12(8/9 - 2/3\varepsilon - \varepsilon^2)\, C/(Eh_0^3 r_0) \tag{1.5}$$

Для нулевого приближения имеем следующее уравнение:

$$x^3(1-x)^3\varkappa_0'' + 3x^2(1-x)^2(1-2x)\varkappa_0' -$$
$$- 3x^2(1-x)^2[1/x + 4/3]\varkappa_0 = 32C/(3Eh_0^3 r_0) \tag{1.6}$$

Решения однородного дифференциального уравнения, соответствующего (1.6), имеют вид (1.2). Для нахождения частного решения неоднородного уравнения (1.6) воспользуемся функциями Коши, которые запишем несколько иначе, чем в [3]:

$$Y_2(x_1; x) = \frac{(1-x_1)}{12}\{(3-4x_1)\varkappa_\theta^{(1)}(x) - 6x_1^4\varkappa_\theta^{(2)}(x)\} \tag{1.7}$$

Определим частное решение неоднородного уравнения (1.6) следующим образом:

$$\varkappa_0^{(C)} = \int_{z=x_1}^{z=x} F(z)\, Y_2(z; x)\, dz, \quad F(z) = \frac{32C}{3Eh_0^3 r_0 z^3(1-z)^3}$$

В результате получим

$$\varkappa_0^{(C)} = -\frac{8C}{9Eh_0^3 r_0}\{\varkappa_\theta^{(1)}[K_1(x) - K_1(x_1)] +$$
$$+ 6\varkappa_\theta^{(2)}[K_2(x) - K_2(x_1)]\} \tag{1.8}$$
$$K_1(x) = \ln\frac{1-x}{x} + \frac{4-3x}{1-x} + \frac{3}{2x^2} + \frac{2}{x}$$
$$K_2(x) = \frac{1}{1-x} + \ln(1-x)$$

Запишем общее решение уравнения (1.6):

$$\varkappa_0 = A_0\varkappa_\theta^{(1)} + B_0\varkappa_\theta^{(2)} + C\varkappa_0^{(C)} \tag{1.9}$$

Постоянные интегрирования A_0, B_0 и C находятся из условий на наружном и внутреннем контурах пластины.

Приравниваем теперь члены уравнения (1.5), содержащие параметр ε в первой степени, получим:

$$x^3(1-x)^3\varkappa_1'' + 3x^2(1-x)^2(1-2x)\varkappa_1' -$$

$$- 3x^2 (1 - x)^2 [1/x + 4/3] \varkappa_1 = - 8C/(Eh_0^3 r_0) + 3x^2 (1 - x)^2 \varkappa_0 \qquad (1.10)$$

где $\varkappa_0$ определено выражением (1.9). Решение однородного уравнения, соответствующего (1.10), совпадает с (1.2). Частное решение неоднородного уравнения (1.10) определяется в виде

$$\varkappa_1^{(C)} = \int_{z=x_1}^{z=x} F_1(z)\, Y_2(z; x)\, dz, \quad F_1(z) = - \frac{8C}{Eh_0^3 r_0 z^3 (1 - z)} + \frac{3}{z (1 - z)} \varkappa_0$$

В результате получим

$$\varkappa_1^{(C)} = \tfrac{1}{4} A_0 \{\varkappa_\theta^{(1)}(x) [F_1(x) - F_1(x_1)] + 6\varkappa_\theta^{(2)}(x) [F_2(x) - F_2(x_1)]\} +$$

$$+ \tfrac{1}{24} B_0 \{\varkappa_\theta^{(1)}(x) [F_3(x) - F_3(x_1)] - 24\varkappa_\theta^{(2)}(x) [F_1(x) - F_1(x_1)]\} -$$

$$- \frac{2C}{9Eh_0^3 r_0} \{3 [\varkappa_\theta^{(1)}(x) [K_1(x) - K_1(x_1)] + 6\varkappa_\theta^{(2)}(x) [F_3(x) - F_3(x_1)]\} +$$

$$+ [\varkappa_\theta^{(1)}(x) K_1(x) + 6\varkappa_\theta^{(2)}(x) K_2(x)] \{\varkappa_\theta^{(1)}(x) [F_4(x) - F_4(x_1)] -$$

$$- \tfrac{3}{2}\varkappa_\theta^{(2)}(x) (x^4 - x_1^4)\} - 6\varkappa_\theta^{(2)}(x) \{\varkappa_\theta^{(1)}(x) [F_5(x) - F_5(x_1)] - 6\varkappa_\theta^{(2)}(x) [F_6(x) -$$

$$- F_6(x_1)]\} - \varkappa_\theta^{(1)}(x) \{\varkappa_\theta^{(1)}(x) [F_7(x) - F_7(x_1)] - 6\varkappa_\theta^{(2)}(x) [F_8(x) - F_8(x_1)]\}\} \qquad (1.11)$$

$$F_1(x) = 1/(2 (1 - x)) + \ln (1 - x)$$

$$F_2(x) = \frac{x^3}{3 (1 - x)^3} - \frac{4}{3} \ln (1 - x) + \frac{4}{1 - x} - \frac{2}{(1 - x)^2} + \frac{4}{9 (1 - x)^3}.$$

$$F_3(x) = - \frac{3}{x^3 (1 - x)} + \frac{6}{x^2 (1 - x)} + \frac{2}{x (1 - x)} - \frac{68}{1 - x} + 4 \ln (1 - x) + 32 \ln x$$

$$F_4(x) = 3 \ln x - 4x$$

$$F_5(x) = 5 \ln (1 - x) - 4x \ln (1 - x) + 3 \ln x - 3\, \mathrm{Li}_2(x) - 4 (1 - x)$$

$$F_6(x) = \tfrac{1}{3} (1 - x)^3 - \tfrac{3}{2} (1 - x)^2 + 3 (1 - x) +$$

$$+ \tfrac{1}{4} (x^4 - 5) \ln (1 - x) - \tfrac{1}{4} [\tfrac{1}{4} x^4 + \tfrac{1}{3} x^3 + \tfrac{1}{2} x^2 + x]$$

$$F_7(x) = - 3\, \mathrm{Li}_2(x) - 13 \ln (1 - x) - 4x \ln (1 - x)/x - 3 (\ln x)^2/2 +$$

$$+ 4 (\ln x - 1) - 12x - 9/x^2$$

$$F_8(x) = [\tfrac{1}{4} (x^4 - 1) - 1] \ln (1 - x) - \tfrac{1}{4} x^4 \ln x + 2 (1 - x)^2 [\tfrac{2}{3} (1 - x) - 3] +$$

$$+ 12 (1 - x) + \tfrac{3}{4} x^4 + \tfrac{19}{12} x^3 + \tfrac{5}{8} x^2 + \tfrac{11}{4} x$$

где $\mathrm{Li}_2(x)$ — дилогарифм Эйлера.

Найденное выражение для $\varkappa_1^{(C)}$ дает возможность расширить область применения элементарных решений при расчете на действие антисимметричных нагрузок изотропных пластин с толщиной $h = h_0 |1 - x|$ при коэффициенте Пуассона, отличном от $\tfrac{1}{3}$. Расчеты, выполненные для кольцевой пластины, показывают, что в случае, когда коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}3$, максимальное амплитудное значение изгибной деформации в первом приближении отличается от подобного значения в нулевом приближении на $\Delta\varkappa_\theta\% = 0{,}904\%$, для максимального радиального изгибающего момента это отличие составляет $\Delta M_2\% = 1{,}18\%$; при $\nu = 0{,}35$ подобные отличия составляют соответственно $\Delta\varkappa_\theta\% = 0{,}537\%$, $\Delta M_2\% = 0{,}668\%$. Таким образом, следует отметить, что при $\nu = 0{,}3$; $\nu = 0{,}35$ и при других близких к ним значениях коэффициента Пуассона в расчетах можно непосредственно использовать решения в элементарных функциях, полученные для $\nu = \tfrac{1}{3}$. Вычисления показывают также, что при $\nu = \tfrac{1}{4}$ отличия результатов первого и нулевого приближений составляют $\Delta\varkappa_\theta\% = 2{,}21\%$, $\Delta M_2^{\max}\% = 2{,}77\%$; при $\nu = 1/6$ соответственно $\Delta\varkappa_\theta\% = 4{,}36\%$, $\Delta M_2^{\max}\% = 5{,}41\%$. Отсюда можно сделать вывод, что если коэффициент Пуассона принимает значение, равное $1/6$ или близкие к нему, то в этих случаях нельзя ограничиться лишь нулевым приближением; в решения, выраженные через элементарные функции, вносят уточнения, используя описанную выше процедуру метода возмущений.

2. Рассмотрим теперь антисимметричную деформацию круглой ортотропной пластины с толщиной $h = h_0|1 - x|$. В этом случае решения соответствующего дифференциального уравнения представляются в гипергеометрических функциях, которые, как показал их анализ, не распадаются на элементарные ни при каких частных значениях коэффициента Пуассона. Ниже исследуем возможность применения элементарных решений, полученных для изотропной пластины с данной толщиной при коэффициенте Пуассона $\nu = 1/3$ для расчета ортотропной пластины с таким же коэффициентом Пуассона.

Дифференциальное уравнение, описывающее антисимметричную деформацию ортотропной пластины с заданной толщиной записывается следующим образом:

$$x^3(1-x)^3\frac{d^2\varkappa_\theta}{dx^2} + 3(1-2x)x^2(1-x)^2\frac{d\varkappa_\theta}{dx} -$$
$$- x(1-x)^2\left\{n^2 + 2/3 + \frac{3(n^2 - 1/9)}{2n^2} - \left[n^2 - \frac{19}{3} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{3(n^2 - 1/9)}{2n^2}\right]x\right\}\varkappa_\theta = \frac{32C}{3Eh_0^3n_2r_0} \qquad (2.1)$$

где $n^2 = n_1n_2$, $E_1 = E/n_1$, $E_2 = En_2$; $\sigma_1 = \sigma/n^2$, $\sigma_2 = \sigma$ — модули упругости и коэффициенты Пуассона в радиальном и окружном направлениях.

Применим к решению данной задачи также процедуру метода возмущений. Представим соотношение между параметрами анизотропии следующим образом: положим, что $n_2 = 1$, что имеет место для ряда материалов, а n_1 представим следующим образом [4]:

$$n_1 = 1 + \varepsilon \qquad (2.2)$$

Ищем решение задачи (2.1), (2.2) в виде ряда по степеням параметра ε (1.4). Вносим (2.2) и (1.4) в уравнение (2.1); в результате получим

$$x^3(1-x)^3[\varkappa_0'' + \varepsilon\varkappa_1'' + \varepsilon^2\varkappa_2'' + \ldots] +$$
$$+ 3(1-2x)x^2(1-x)^2[\varkappa_0' + \varepsilon\varkappa_1' + \varepsilon^2\varkappa_2' + \ldots] -$$
$$- x(1-x)^2[5/3 + \varepsilon + 3/2(8/9 + \varepsilon) - [-16/3 + \varepsilon +$$
$$+ 3/2(8/9 + \varepsilon)]x\}[\varkappa_0 + \varepsilon\varkappa_1 + \varepsilon^2\varkappa_2 + \ldots] = 32C/(3Eh_0^3r_0) \qquad (2.3)$$

Приравнивая члены, содержащие параметр ε в нулевой степени, установим, что соответствующее дифференциальное уравнение совпадает с (1.6). Общее решение неоднородного дифференциального уравнения в нулевом приближении определяется выражением (1.9), в котором $\varkappa_\theta^{(1)}$, $\varkappa_\theta^{(2)}$ и $\varkappa_0^{(C)}$ соответственно описываются формулами (1.2) и (1.8).

Приравниваем теперь члены, содержащие параметр ε в первой степени

$$x^3(1-x)^3\varkappa_1'' + 3(1-2x)x^2(1-x)^2\varkappa_1' -$$
$$- x(1-x)^2(3+4x)\varkappa_1 = 5/2x(1-x)^3\varkappa_0^{(C)} \qquad (2.4)$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения (2.4). Определим его следующим образом:

$$\varkappa_1^{(C)} = 5/2 \int\limits_{z=x_1}^{z=x} \frac{\varkappa_0(z, x)}{z^2} Y_2(z; x)\, dz$$

В результате получаем

$$\begin{aligned}
\varkappa_1^{(C)} = {} & 5/2 \{1/12 \{\varkappa_\theta^{(1)}(x) \{[F_1^*(x) - F_1^*(x_1)] + 1/6 [F_3^*(x) - F_3^*(x_1)]\} - \\
& - 6\varkappa_\theta^{(2)}(x) \{F_2^*(x) - F_2^*(x_1) + 1/6 [F_4^*(x) - F_4^*(x_1)]\}\} + [\varkappa_\theta^{(1)}(x) K_1(x) + \\
& + 6\varkappa_\theta^{(2)}(x) K_2(x)] \{[F_4^*(x) - F_4^*(x_1)] \varkappa_\theta^{(1)}(x) - 6\varkappa_\theta^{(2)}(x) [F_5^*(x) - F_5^*(x_1)]\} - \\
& - 6\varkappa_\theta^2(x) \{\varkappa_\theta^{(1)}(x) [F_6^*(x) - F_6^*(x_1)] - 6\varkappa_\theta^{(2)}(x) [F_7^*(x) - F_7^*(x_1)]\} - \\
& - \varkappa_\theta^{(1)}(x) \{\varkappa_\theta^{(1)}(x) [F_8^*(x) - F_8^*(x_1)] - 6\varkappa_\theta^{(2)}(x) [F_9^*(x) - F_9^*(x_1)]\}\}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$F_1^*(x) = \ln(1 - x) + 3\ln x$$

$$F_2^*(x) = 1/3 (1 - x)^3 - 3/2 (1 - x)^2 + 3(1 - x) - \ln(1 - x)$$

$$F_3^*(x) = -\frac{9}{4x^4} + \frac{5}{x^3} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} - \ln\frac{1 - x}{x}$$

$$F_4^*(x) = -3/x - 7\ln x + 4x, \quad F_5^*(x) = x^3/3 - x^4/4$$

$$F_6^*(x) = 7\,\mathrm{Li}_2(x) - 7\ln x - (3/x - 4x + 1)\ln(1 - x) - 3/x + 4(1 - x)$$

$$\begin{aligned}
F_7^*(x) = {} & -1/3 (1 - x)^3 + (1 - x)^2 - (1 - x) + [1/3 (x^3 + 1) - \\
& - 1/4 (x^4 - 1)] \ln(1 - x) + 1/16 x^4 - 1/12 (1/3 x^3 + 1/2 x^2 + x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_8^*(x) = {} & -[3/x - 4x + 1]\ln(1 - x) + 7\,\mathrm{Li}_2(x) - 20\ln x + \\
& + 3\ln x/x + 7/2 (\ln x)^2 - 4x\ln x + 12x + 4 - 1/x + 9/x^2 - 27/2x^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_9^*(x) = {} & -(1/4 x^4 - 1/3 x^3)\ln(1 - x)/x + 7/12 \ln(1 - x) - 7/3 (1 - x)^3 + \\
& + 17/2 (1 - x)^2 - 13(1 - x) - 3/4 x^4 - 57/56 x^3 + 5/24 x^2 + 17/12 x
\end{aligned}$$

Найденное выражение дает возможность применять выражения в элементарных функциях (1.9) к расчету ортотропных пластин с коэффициентом Пуассона $\nu = 1/3$.

Приведем некоторые из результатов вычислений, выполненных для кольцевой пластины с заданной толщиной. Расчеты показали, что отличия между результатами, полученными в нулевом и первом приближениях для амплитудных значений изгибной деформации $\Delta\varkappa_\theta\%$ и радиальных изгибающих моментов $\Delta M_r\%$ составляют: при $n_1 = 1{,}01$, $\Delta\varkappa_\theta\% = 0{,}638\%$; $\Delta M_r\% = 1{,}768\%$; при $n_1 = 1{,}02$, $\Delta\varkappa_\theta\% = 1{,}196\%$; $\Delta M_r\% = 2{,}814$; при $n_1 = 1{,}05$, $\Delta\varkappa_\theta\% = 2{,}293\%$; $\Delta M_r\% = 6{,}985\%$; при $n_1 = 0{,}985$, $\Delta\varkappa_\theta\% = 0{,}976\%$; $\Delta M\% = 2{,}461$; при $n_1 = 0{,}975$, $\Delta\varkappa_\theta\% = 1{,}873\%$; $\Delta M_r\% = 4{,}910$.

Оценивая полученные результаты, можно сделать вывод, что при значениях параметра анизотропии n_1, весьма близком к единице, можно непосредственно использовать решения (1.9). Если же n_1 отклоняется от единицы сильнее, то для случая $n_1 = 1{,}05$ используется описанная выше процедура метода возмущений и в решение вносится поправка с учетом полученного выражения (2.5). Аналогичные результаты можно получить, положив $n_1 = 1$ и приняв $n_2 = 1 + \varepsilon$. Следует отметить, что для ортотропных пластин возможности описанного здесь подхода весьма ограниченны.

Аналогичным образом можно построить и второе приближение. Проведенные вычисления показали, как это было отмечено выше, что при $\nu = 1/6$, т. е. для железобетонной пластины максимальная относительная погрешность, вносимая первым приближением для усилий, немного превышает 5% и ее следует учитывать.

В этом случае второе приближение дает максимальную относительную погрешность гораздо меньшую, чем в первом приближении и ее можно в инженерных расчетах не рассматривать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Григоренко Я. М.* Про антисиметричну деформацію круглої пластини зміної товщини//ДАН УРСР. 1962. № 6. С. 760—763.
2. *Ломакин В. А.* Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-е МГУ, 1976. 361 с.
3. *Коренева Е. Б.* Изотропные и ортотропные круглые пластины и диски переменной толщины при разрывных антисимметричных воздействиях//Тр. XIV Всес. конф. по теории пластин и оболочек. Т. 2. Тбилиси: Из-во ТГУ, 1987. С. 80—85.
4. *Коренева Е. Б.* Об одном приближенном методе расчета круглых ортотропных пластин линейно-переменной толщины//Изв. ВУЗов. Строительство и архитектура. 1991. № 8. С. 26—29.

Москва

Поступила в редакцию 21.X.1992