

УДК 539.3.

© 1995 г. В. А. ПОСТНОВ, М. И. ТРУБАЧЕВ

НОВАЯ МОДЕЛЬ ИЗОПАРАМЕТРИЧЕСКОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ДЛЯ РАСЧЕТА ОБОЛОЧЕК

Несмотря на простоту основных положений метода конечных элементов (МКЭ), его использование в численных расчетах геометрически сложных оболочек связано с определенными техническими трудностями. Чаще всего в качестве конечных элементов берут части поверхностей фиксированной формы: плоской, цилиндрической, сферической, конической или другой. Форму конечного элемента ограничивают треугольным или четырехугольным контуром с различным количеством промежуточных точек (степеней свободы). Дополнительно подразумевается совпадение границ конечного элемента с главными линиями кривизны срединной поверхности оболочки. Для геометрически сложных тонкостенных конструкций такой подход приводит к необходимости выбора большого количества конечных элементов, неоправданно большим затратам ручного труда при подготовке исходных данных, нарушению плавности формы расчетной модели оболочки в месте сопряжения конечных элементов.

В статье предлагается общая схема построения изопараметрических конечно-элементных моделей, свободная от перечисленных недостатков. В ее основе лежит глобальная параметризация несущей поверхности оболочки системой гауссовых координатных линий, произвольно расположенных на срединной поверхности оболочки. Получены аналитические выражения для вычисления коэффициентов матрицы жесткости и вектора усилий для всей конструкции в целом. Приведены результаты численного расчета усеченного коноида — непологой оболочки, имеющей отрицательную гауссову кривизну.

1. Энергия деформации. Полная энергия деформации произвольного упругого тела \mathcal{E} складывается из потенциальной энергии Π и работы внешних сил

$$\mathcal{E} = \Pi - A \quad (1.1)$$

Выражение для потенциальной энергии деформации в произвольной криволинейной системе координат имеет вид

$$\Pi = \frac{1}{2} \int \int \int_{(V)} e^{ij, mn} \nabla_i u_j \nabla_m u_n dV \quad (1.2)$$

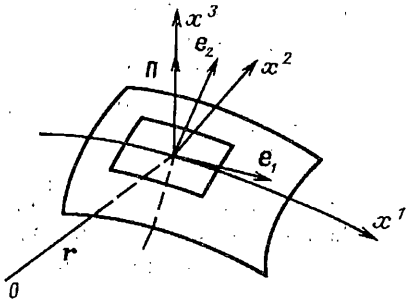
где u_n — ковариантные компоненты вектора перемещений, $e^{ij, mn}$ — тензор упругих постоянных, V — объем упругого тела. Здесь по верхним и нижним повторяющимся индексам производится суммирование (встречающиеся в обозначениях тензорных величин греческие индексы принимают значения 1, 2, а латинские индексы изменяются от 1 до 3).

Для изотропного упругого тела тензор упругих постоянных вычисляется по формулам [1]: $e^{ij, mn} = \lambda g^{ij} g^{mn} + \mu (g^{im} g^{jn} + g^{in} g^{jm})$, где g^{mn} — коэффициенты пространственного метрического тензора криволинейной системы координат, жестко связанной с недеформированным телом; λ и μ — коэффициенты Ламе.

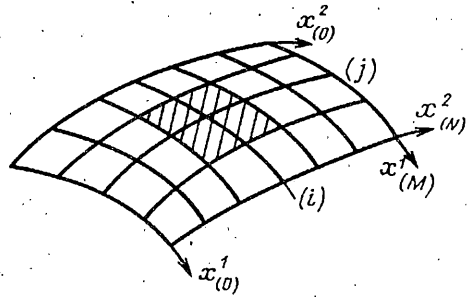
Входящие в выражение для потенциальной энергии (1.2) величины $\nabla_m u_n$ — пространственные ковариантные производные [2]:

$$\nabla_m u_n = \partial_m u_n - \Gamma_{mn}^k u_k$$

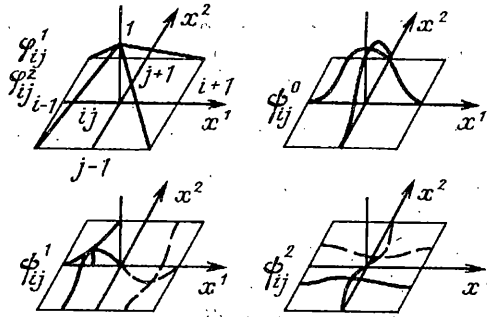
где Γ_{mn}^k — пространственные символы Кристоффеля второго рода.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Параметризуем срединную поверхность оболочки системой гауссовых координатных линий x^λ , $\lambda = 1, 2$. Третью ось координатного триедра x^3 направим по нормали к срединной поверхности оболочки (фиг. 1).

Разложим компоненты вектора перемещений по толщине оболочки в тензорный ряд Тейлора

$$u_i(x^3) = u_i|_{x^3=0} + x^3 \nabla_3 u_i|_{x^3=0} + (x^3)^2 \nabla_3 \nabla_3 u_i|_{x^3=0} + \dots \quad (1.3)$$

Считая оболочку настолько тонкой, что $|hb_\alpha^\beta| \ll 1$, и используя упрощающие гипотезы Кирхгофа — Лява $\varepsilon_{\alpha 3} = (\nabla_\mu u_\alpha + \nabla_\alpha u_\mu)/2 = 0$ для аппроксимации перемещений по толщине оболочки из (1.3) получим соотношения

$$u_\alpha(x^3) = u_\alpha - x^3 \partial_\alpha u_3, \quad u_3(x^3) = u_3 \quad (1.4)$$

где u_α , u_3 — соответственно касательные и нормальные перемещения срединной поверхности.

Подставим (1.4) в (1.2). После интегрирования по толщине в метрике срединной поверхности оболочки, получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Pi = \int \int_{(\Gamma)} e^{\alpha\beta, \gamma\sigma} [h (\nabla_\alpha u_\beta \nabla_\gamma u_\sigma - 2b_{\alpha\beta} u_3 \nabla_\gamma u_\sigma) + \\ + hb_{\alpha\beta} b_{\gamma\sigma} u_3 u_3 + 1/3 h^3 \nabla_\alpha \partial_\beta u_3 \nabla_\gamma \partial_\sigma u_3] \sqrt{\alpha} dx^1 dx^2 \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$e^{\alpha\beta, \gamma\sigma} = \lambda \alpha^{\alpha\beta} \alpha^{\gamma\sigma} + \mu (\alpha^{\alpha\gamma} \alpha^{\beta\sigma} + \alpha^{\alpha\sigma} \alpha^{\beta\gamma}), \quad \alpha = \det |\alpha_{\alpha\beta}|$$

$$\nabla_\alpha u_\beta = \partial_\alpha u_\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda u_\lambda, \quad \nabla_\alpha \partial_\beta u_3 = \partial_\alpha \partial_\beta u_3 - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \partial_\lambda u_3 \quad (1.6)$$

где h — полутолщина оболочки, $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$ — символы Кристоффеля второго рода на срединной поверхности, ∇_α — символы двумерного ковариантного диф-

ференцирования на срединной поверхности Γ , а ∂_α — обычные частные производные от гауссовых координат на срединной поверхности.

2. Работа внешних сил. Обозначим через

$$\{p_m\} = p_m^{(+)} + p_m^{(-)} \quad (m = 1, 2, 3) \quad (2.1)$$

$$[p_m] h = [p_m^{(+)} - p_m^{(-)}] h \quad (m = 1, 2)$$

систему приведенных к срединной поверхности оболочки внешних сил и присоединенных моментов. Здесь $p_m^{(-)}, p_m^{(+)}$ — компоненты сил на различных сторонах оболочки. Тогда работа внешних сил в метрике срединной поверхности вычисляется по формуле

$$A = \iint_{(\Gamma)} [\alpha^{\alpha\beta} h (\{p_\alpha\} u_\beta - h [p_\alpha] \partial_\beta u_3 + \{p_3\} u_3) \sqrt{\alpha} dx^1 dx^2 \quad (2.2)$$

3. Вариационная формулировка задачи. Исключительно для удобства дальнейших выкладок введем новое символическое обозначение для ковариантной производной от компонента вектора (1.6):

$$\square_{\alpha\beta}^\lambda u_\lambda = \delta_\beta^\lambda \partial_\alpha u_\lambda - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda u_\lambda = \nabla_\alpha u_\beta \quad (3.1)$$

где δ_β^λ — символы Кронекера, и повторной ковариантной производной от нормального перемещения

$$\Delta_{\alpha\beta} u_3 = \partial_\alpha \partial_\beta u_3 - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \partial_\lambda u_3 = \nabla_\alpha \partial_\beta u_3 \quad (3.2)$$

В этих обозначениях выражение для функционала энергии оболочки в произвольной криволинейной системе координат примет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \iint_{(\Gamma)} e^{\alpha\beta, \gamma\sigma} [h (\square_{\alpha\beta}^\lambda u_\lambda \square_{\gamma\sigma}^\mu u_\mu - 2b_{\alpha\beta} u_3 \square_{\gamma\sigma}^\mu u_\mu) + \\ + hb_{\alpha\beta} b_{\gamma\sigma} u_3 u_3 + 1/3 h^3 \Delta_{\alpha\beta} u_3 \Delta_{\gamma\sigma} u_3] \sqrt{\alpha} dx^1 dx^2 - \\ - \iint_{(\Gamma)} [\alpha^{\alpha\beta} h (\{p_\alpha\} u_\beta - h [p_\alpha] \partial_\beta u_3) + \{p_3\} u_3] \sqrt{\alpha} dx^1 dx^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

где u_λ, u_3 — касательные и нормальные перемещения оболочки на срединной поверхности.

Ограничения, накладываемые на перемещения оболочки, в самой общей форме формулируются так

$$u_\lambda(x^1, x^2) = \omega_\lambda(x^1, x^2), \quad u_3(x^1, x^2) = \psi_0(x^1, x^2) \quad (3.4)$$

$$\partial_\lambda u_3(x^1, x^2) = \psi_\lambda(x^1, x^2) \quad \text{на } \partial\Gamma$$

где $\partial\Gamma$ — граница поверхности приведения оболочки или какая-то ее часть; $\omega_\lambda, \psi_0, \psi_\lambda$ — заданные на границе оболочки функции.

В соответствии с принципом минимума потенциальной энергии неизвестные перемещения срединной поверхности оболочки можно определить из условия минимума полной энергии

$$\delta\mathcal{E} = 0$$

Уравнения (3.3) — (3.5) составляют вариационную формулировку задачи определения деформированного состояния оболочки от действия заданных внешних сил.

4. Метод конечных элементов. Для отыскания решений вариационной задачи, описывающей поведение оболочки, очень эффективным является метод конечных элементов. Важным моментом этого метода является выбор системы координатных функций.

Допустим, что линии границ срединной поверхности оболочки совпадают с соответствующими координатными линиями. Зафиксируем конечное число координатных линий в одном и другом направлениях:

$x_{(i)}^1$ ($i = 1, 2, \dots, M$), $x_{(j)}^2$ ($j = 1, 2, \dots, N$). Такая система криволинейных линий разбивает всю поверхность Γ на неперекрывающиеся участки. Области, ограниченные соседними координатными линиями и линиями границ, примем за конечные элементы. Точки, находящиеся на пересечении координатных линий с координатами $(x_{(i)}^1, x_{(j)}^2)$, назовем (i, j) узлами сетки. Таким образом, к любому узлу сетки примыкает не более четырех конечных элементов (фиг. 2).

Для каждого внутреннего узла (i, j) введем систему из пяти координатных функций (фиг. 3): $\varphi_{ij}^\lambda(x^1, x^2)$ ($\lambda = 1, 2$), $\psi_{ij}^e(x^1, x^2)$ ($e = 1, 2, 3$) и примем для компонент перемещения срединной поверхности оболочки следующие выражения:

$$u_1(x^1, x^2) = u_1^i \varphi_{ij}^1, u_2(x^1, x^2) = u_2^j \varphi_{ij}^2 \quad (4.1)$$

$$u_3(x^1, x^2) = w_0^j \psi_{ij}^0 + w_2^j \psi_{ij}^2 + w_3^j \psi_{ij}^3$$

где по нижним и верхним повторяющимся индексам, как обычно, проводится суммирование.

Каждая координатная функция непрерывна и отлична от нуля не более чем в четырех примыкающих к узлу конечных элементов. Функции ψ_{ij}^e должны дополнительно располагать непрерывными первыми производными.

Выполнение указанных выше требований к координатным функциям обеспечивает условия гладкости C_0 для перемещений u_1, u_2 и C_1 для нормального перемещения u_3 [3, 4].

Функции $\varphi_{ij}^\lambda(x^1, x^2), \psi_{ij}^e(x^1, x^2)$ можно аппроксимировать полиномами, тригонометрическими функциями, экспонентами или их комбинациями. Ниже используются степенные полиномы. Наиболее простое полиномиальное представление этих функций имеет вид

$$\varphi_{ij}^1 = \varphi_{ij}^2 = (1/(h^1 h^2)) (h^1 - |\xi^1|) (h^2 - |\xi^2|)$$

$$\psi_{ij}^0 = (1/(h^1 h^2)^3) (h^1 + \xi^1)^2 (h^2 + \xi^2)^2 (h^1 - 2|\xi^1|) (h^2 - 2|\xi^2|)$$

$$\psi_{ij}^1 = (1/[(h^1)^2 (h^2)^3]) \xi^1 (h^1 + \xi^1)^2 (h^2 + \xi^2)^2 (h^2 - 2|\xi^2|)$$

$$\psi_{ij}^2 = (1/[(h^1)^3 (h^2)^2]) \xi^2 (h^1 + \xi^1)^2 (h^2 + \xi^2)^2 (h^1 - 2|\xi^1|)$$

$$\xi^1 = x^1 - x_i^1, \xi^2 = x^2 - x_j^2$$

где h^1, h^2 — шаг сетки разбиения вдоль x^1 и x^2 соответственно; $|\xi^1(x^1)| < h^1, |\xi^2(x^2)| < h^2$.

Таким образом φ_{ij}^λ обычные билинейные функции формы, равные единице в узле (i, j) , а ψ_{ij}^e функции, представленные полиномами третьей степени по каждой переменной. Такой выбор координатных функций удовлетворяет всем требованиям, обеспечивающим сходимость метода конечных элементов [5].

Подстановка (4.1) в функционал энергии (3.3) превращает последний в функцию переменных u_λ^i и w_e^j . Из условия минимума полученной функции $\mathcal{E}(u_\lambda^i, w_e^j)$:

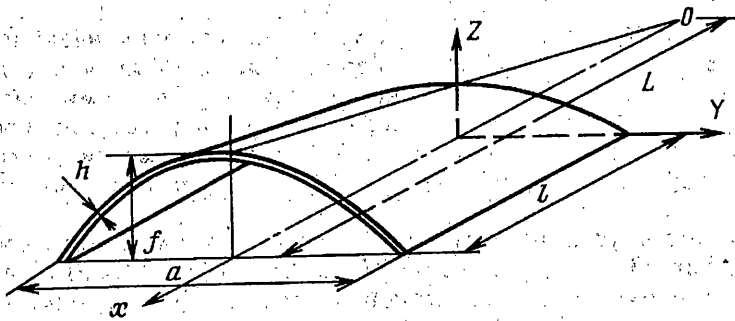
$$\partial \mathcal{E} / \partial u_\lambda^i = 0, \partial \mathcal{E} / \partial w_e^j = 0 \quad (e = 1, 2, 3) \quad (4.2)$$

получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных параметров аппроксимации u_λ^i и w_e^j

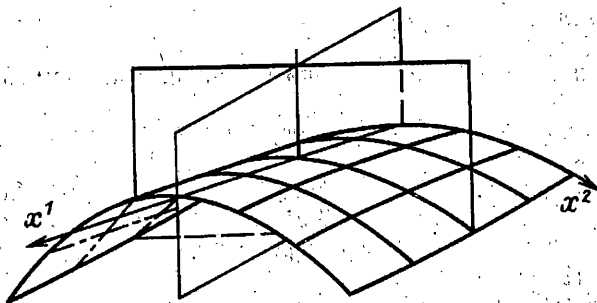
$$\left\| \begin{array}{cc} K_{ij, mn}^{\lambda \mu} & K_{ij, mn}^{k \mu} \\ K_{ij, mn}^{\lambda e} & K_{ij, mn}^{k e} \end{array} \right\| \times \left\| \begin{array}{c} u_\mu^i \\ w_k^j \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} p_{mn}^\lambda \\ p_{mn}^e \end{array} \right\| \quad (4.3)$$

Элементы матрицы жесткости этой системы вычисляются по формулам

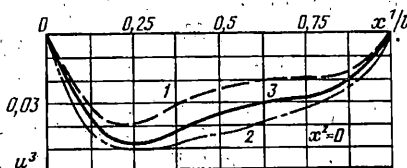
$$K_{ij, mn}^{\lambda \mu} = 2 \iint_{(\Gamma)} e^{\alpha\beta, \gamma\sigma} h \square_{\alpha\beta}^\lambda \varphi_{ij}^\lambda \square_{\gamma\sigma}^\mu \varphi_{mn}^\mu \sqrt{\alpha} dx^1 dx^2 \quad (\Gamma)$$



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

$$K_{ij, mn}^{ku} = -2 \int \int_{(\Gamma)} e^{\alpha\beta, \gamma\sigma} h b_{\alpha\beta} \psi_{ij}^k \square_{\gamma\sigma}^u \varphi_{mn}^u \sqrt{\alpha} dx^1 dx^2 \quad (4.4)$$

$$K_{ij, mn}^{\lambda e} = -2 \int \int_{(\Gamma)} e^{\alpha\beta, \gamma\sigma} h b_{\alpha\beta} \psi_{mn}^e \square_{\gamma\sigma}^{\lambda} \varphi_{ij}^{\lambda} \sqrt{\alpha} dx^1 dx^2$$

$$K_{ij, mn}^{ek} = 2 \int \int_{(\Gamma)} e^{\alpha\beta, \gamma\sigma} \left[h b_{\alpha\beta} b_{\gamma\sigma} \psi_{ij}^e \psi_{mn}^k + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} h^3 \Delta_{\alpha\beta} \psi_{ij}^e \Delta_{\gamma\sigma} \psi_{mn}^k \right] \sqrt{\alpha} dx^1 dx^2$$

элементы вектора узловых нагрузок по формулам

$$p_{mn}^{\lambda} = \int \int_{(\Gamma)} \alpha^{\alpha\lambda} \{ p_{\alpha} \} \varphi_{mn}^{\lambda} \sqrt{\alpha} dx^1 dx^2 \quad (4.5)$$

$$p_{mn}^e = \int \int_{(\Gamma)} [-\alpha^{\alpha\beta} h \{ p_{\alpha} \} \partial_{\beta} \psi_{mn}^e + \{ p_{\beta} \} \psi_{mn}^e] \sqrt{\alpha} dx^1 dx^2$$

Приведенные зависимости для матрицы жесткости и вектора узловых нагрузок можно использовать при построении изопараметрических конечных элементов оболочек произвольной формы, имеющих сложную геометрию поверхности и произвольно нанесенную координатную сетку.

5. Расчет усеченного коноида. Усеченный коноид — непологая оболочка, имеющая отрицательную гауссову кривизну. В [6] на основе теории пологих

оболочек проведен численный расчет этой задачи методом конечных элементов. Здесь использовался конечный элемент с 20-ю степенями свободы.

Срединная поверхность усеченного коноида в трехмерном декартовом пространстве XYZ определяется уравнением

$$z = f(1 - 4y^2/a^2)(x + L - l)/L \quad (5.1)$$

Внешний вид и размеры рассматриваемой оболочки, принятые при численных расчетах, приведены на фиг. 4. При расчетах коноид рассматривался как свободно опертый и нагруженный равномерно распределенной по внешней поверхности, нормальной нагрузкой интенсивности g .

В качестве координатных линий примем линии пересечения срединной поверхности оболочки с системой продольных и поперечных плоскостей, как показано на фиг. 5.

В принятой криволинейной системе координат параметрическое уравнение поверхности коноида имеет вид

$$x = x^1, \quad y = x^2 \quad (5.2)$$

$$z = f(1 - 4(x^2)^2/a^2)(x^1 + L - l)/L$$

Метрические коэффициенты рассматриваемой оболочки определяются по формулам

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= 1 + f^2(1 - 4(x^2)^2/a^2)^2/L^2 \\ \alpha_{12} &= -8f^2x^2(1 - 4(x^2)^2/a^2)(x^1 + L - l)/(a^2L^2) \\ \alpha_{22} &= 1 + 64f^2(x^2)^2(x^1 + L - l)^2/(a^4L^2) \\ b_{11} &= 0, \quad b_{12} = -8fx^2/(a^2L\sqrt{\alpha}) \\ b_{22} &= -8f(x^1 + L - l)/(a^2L\sqrt{\alpha}) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Расчет усеченного коноида с помощью изопараметрической конечно-элементной модели проводился при дискретизации оболочки на 20, 40 и 80 конечных элемента. Сравнение полученных результатов с известными результатами приведено на фиг. 6.

Штриховая линия 1 соответствует решению, полученному в [6]. Штрих-пунктирная линия 2 — решению, полученному в работе, цитированной в сноске. Сплошная линия 3 соответствует решению, полученному при использовании разработанного в публикуемой работе изопараметрического конечного элемента, и при разбиении половины оболочки на 20 конечных элементов (КЭ). Результаты расчета при дискретизации более мелкой сеткой (40 и 80 КЭ) практически совпадают с решением при 20 КЭ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Векуа И. Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов. М.: Наука, 1978. 296 с.
2. Постнов В. А., Хархурим И. Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1974. 342 с.
3. Постнов В. А. Численные методы расчета судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1977. 280 с.
4. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 594 с.
5. Сокольников И. Тензорный анализ. М.: Наука, 1971. 374 с.
6. Brebbia C. A., Hadid H. A. Analysis of plates and shells using finite elements//Pev. roum. sci. techn. sec. appl. 1973. V. 18. No. 5. P. 939—962.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
21.VI.1994

¹ Результаты расчета МКЭ этого коноида как непологой оболочки приведены в работе: Николаев А. П. Конечно-элементные решения задач деформирования тонких оболочек в линейной и нелинейной постановках: Дис. доктора техн. наук: Волгоград, ВСИ. 1988. Здесь коноид разбивался на 32 КЭ, с числом степеней свободы каждого КЭ, равным 36.