МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1995

УДК 624.011:519.2

© 1994 г. Е. В. ЛОБАНОВ

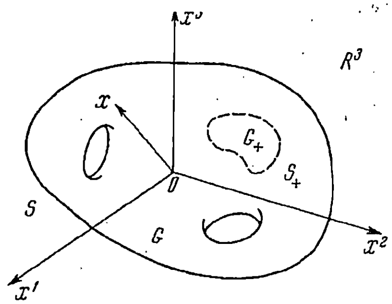
# ТЕОРИЯ НАДЕЖНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

Современные положения теории надежности, основанные на асимптотической теории выбросов случайных процессов и последовательностей, впервые были сформулированы в [1, 2]. В основу теории было положено представление о поведении системы в виде случайного процесса, а достижение предельного состояния — в виде выброса этого процесса из допустимой области. Дальнейшее развитие и систематическое изложение общей теории надежности представлено в [3, 4]. Однако большинство приложений теории ограничено рассмотрением дискретных физических систем, связанных с конечномерным, чаще одномерным, пространством качества. Теория надежности распределенных систем разработана слабо и требует обобщения теории выбросов на случайные скалярные и тензорные поля. Наибольшее продвижение в теории достигнуто при довольно жестком предположении об узкополосности многомерного случайного скалярного поля [3—6]. Простых аналитических соотношений для функции надежности распределенных физических систем в случае многомерного пространства качества, связанного с координатным пространством произвольного числа измерений, при произвольном спектре и произвольном типе распределения компонент случайного тензорного поля до сих пор не получено.

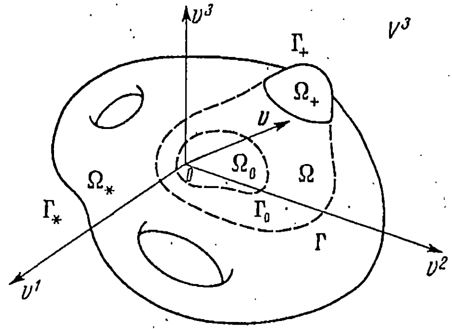
В [7] построена формула для функции надежности распределенной физической системы, качество которой определяется случайной скалярной функцией при довольно общих предположениях о ее спектральных свойствах и типе распределения. Статья [8] посвящена обобщению теории редких выбросов на случай векторных и тензорных полей. Оценка функции надежности проведена на основе многопараметрического критерия надежности в многомерном пространстве качества, связанного с многомерным координатным пространством. Предполагалось, что область допустимых состояний достаточно хорошо аппроксимируется многомерным параллелепипедом.

В публикуемой работе в рамках теории редких выбросов случайных тензорных полей получены простые формулы для функции надежности распределенной физической системы в случае многомерного пространства качества и многомерного координатного, вообще говоря неевклидова, пространства. Ширина спектра и тип распределения компонент случайного однородного тензорного поля согласованы с основным предположением теории о высокой надежности распределенной физической системы. Множество допустимых состояний аппроксимируется произвольной многосвязной областью, ограниченной кусочно-гладкой криволинейной поверхностью.

1. Рассмотрим распределенную физическую систему, качество которой описывается векторным полем $\mathbf{v}$ ($\mathbf{x}$), заданным в области $G$ $n$-мерного координатного пространства $R^n$ (фиг. 1). В качестве компонент вектора $\mathbf{v}$ могут выступать скалярные $A$ ($\mathbf{x}$), векторые $A_a$ ($\mathbf{x}$) и тензорные $A_{\cdot\cdot c}^{ab}$ ($\mathbf{x}$) поля различной физической природы: $\mathbf{v} = \{A, A_1, \ldots, A_n, A_{\cdot\cdot 1}^{11}, \ldots, A_{\cdot\cdot n}^{nn}\} \equiv \{v^1, v^2, \ldots, v^m\}$. Пусть $\Omega_*$ — многосвязная допустимая область в $m$-мерном пространстве качества $V^m$, ограниченная кусочно-гладкой поверхностью $\Gamma_*$ (фиг. 2). Предположим, что внутри области $\Omega_*$ стохастически задана случайная область $\Omega$, которая является геометрическим образом качества физической системы и представляет собой, вообще говоря, подвижное, случайным образом изменяющееся многообразие, размерность которого равна размерности проекции области $G \subset R^n$ на $\Omega \subset V^m$, т. е. $\dim \Omega = n$ $(m > n)$ и $\dim \Omega = m$ $(m \leq n)$. В пространстве $V^m$ область $\Omega$ может принимать вид случайной траектории $\mathbf{v}$ $(x^1)$, случайной гиперповерхности $\mathbf{v}$ $(x^1, x^2,$




Фиг. 1




Фиг. 2

$\ldots, x^{m-1}$) и случайного гиперобъема $\mathrm{v}(x^1, x^2, \ldots, x^m, \ldots, x^n)$. Например, в трехмерном пространстве $V^3$ при использовании четырехмерного пространства—времени $R^4$ с элементами $\mathrm{x} = \{x^1, x^2, x^3, t\}$ область $\Omega$ есть флуктуирующий во времени трехмерный континуум, ограниченный замкнутой поверхностью $\Gamma$ (фиг. 2). Область математического ожидания $\Omega_0 \subset \Omega_*$ случайного неоднородного векторного поля $\mathrm{v}(\mathrm{x})$ в общем случае представляет собой множество той же размерности, что и $\Omega$. Для однородного случайного поля $\mathrm{v}(\mathrm{x})$ область $\Omega_0$ стягивается в точку $v_0 \in \Omega_*$, т. е. $\dim \Omega_0 = 0$.

Если случайный вектор $\mathrm{v}(\mathrm{x}) \in \Omega_*$, то параметры системы удовлетворяют условиям надежности. Выход вектора $\mathrm{v}(\mathrm{x})$ за пределы области $\Omega_*$ или, другими словами, пересечение случайной областью $\Omega$ предельной поверхности $\Gamma_*$ (фиг. 2) называется выбросом случайного поля $\mathrm{v}(\mathrm{x})$. Множеству точек $G_+$ в объеме $G$ координатного пространства $R^n$ (фиг. 1) соответствует множество точек $\Omega_+$ над поверхностью $\Gamma_*$ в пространстве качества $V^m$ (фиг. 2). Отображение множества $G_+ \subset G$ в множество $\Omega_+ \subset \Omega$ осуществляется с помощью преобразования $\mathrm{v} = \mathrm{v}(\mathrm{x})$; обратное преобразование в общем случае может не существовать. Математическое ожидание числа выбросов поля $\mathrm{v}(\mathrm{x})$ за предельную поверхность $\Gamma_*$, отнесенных к единице объема области $G$, будем обозначать через $\nu_{\text{exc}}(\Gamma_*; \mathrm{x})$. Если выбросы случайного вектора $\mathrm{v}(\mathrm{x})$ из области $\Omega_*$ являются редкими, поле $\mathrm{v}(\mathrm{x})$ достаточно перемешанное, а расстояние от поверхности $\Gamma_0$ до поверхности $\Gamma_*$ достаточно велико, для функции надежности $P(G)$ имеет место асимптотическое равенство [3, 9]:

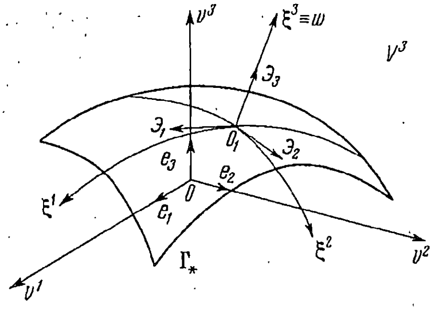
$$P(G) \approx \exp\{-\int_G \nu_{\text{exc}}(\Gamma_*; \mathrm{x})\, dG\} \tag{1.1}$$

Вычислим математическое ожидание числа выбросов $\nu_{\text{exc}}(\Gamma_*; \mathrm{x})$ в единице объема области $G$. Обозначим через $P_1(\Gamma_*; \Delta x)$ вероятность случайного события, состоящего в том, что внутри элементарного объема $\Delta x = \Pi \Delta x^a$ ($a = 1, 2, \ldots, n$) из области $G \subset R^n$ окажется один максимум поля $\mathrm{v}(\mathrm{x})$ над предельной поверхностью $\Gamma_*$ допустимой области $\Omega_* \subset V^m$. Тогда $\nu_{\text{exc}}(\Gamma_*; \mathrm{x})$ можно определить с помощью предельного соотношения [3, 10, 11]:

$$\nu_{\text{exc}}(\Gamma_*; \mathrm{x}) = \lim_{\Delta x \to 0} P_1(\Gamma_*; \Delta x)(\Delta x)^{-1} \tag{1.2}$$

в котором вероятность $P_1(\Gamma_*; \Delta x)$ вычисляется через вероятность сложного события

$$P_1(\Gamma_*; \Delta x) = P\{(v^j \in V_0) \cap (v_a^k \in V_a) \cap (v_{bc}^l \in V_{bc}) \cap (x^a \in \Delta x)\} \tag{1.3}$$




Фиг. 3

Здесь $V_0$, $V_a$, $V_{bc}$ — множества значений компонент скалярных $v^j$ (x), векторных $v_a^k$ (x) $= \partial_a v^k$ (x) и тензорных $v_{bc}^j$ (x) $= \partial_b \partial_c v^j$ (x) полей, которые удовлетворяют условиям существования максимума поля v (x) над поверхностью $\Gamma_*$; $\partial_a \equiv \partial / \partial x^a$; $\cap$ — символ логического произведения случайных событий; латинские индексы первой половины алфавита $a$, $b$, $c$, ... относятся к пространству $R^n$ и пробегают значения 1, 2, ..., $n$; латинские индексы второй половины алфавита $i$, $j$, $k$, ... определяют компоненты векторов в пространстве качества $V^m$ и принимают значения 1, 2, ..., $m$. Вводя в рассмотрение совместную плотность вероятности $p$ ($v^j$, $v_a^k$, $v_{bc}^j$; x) для полей $v^k$ ($x^a$) и их производных $v_a^k$ ($x^b$), $v_{ab}^k$ ($x^c$), выразим вероятность $P_1$ ($\Gamma_*$; $\Delta x$) из (1.3) в виде $m$ ($n$ + 1) ($n$ + 2)/2-кратного интеграла

$$P_1 (\Gamma_*; \Delta x) = \int\limits_{V_0} \prod_{j=1}^{m} dv^j \int\limits_{V_a} \prod_{k=1}^{m} \prod_{a=1}^{n} dv_a^k \int\limits_{V_{bc}} p\,(v^j, v_a^k, v_{bc}^j; \mathrm{x}) \prod_{l=1}^{m} \prod_{b=1}^{n} \prod_{c=b}^{n} dv_{bc}^l \tag{1.4}$$

Формула (1.4) является основной при оценке $\nu_{\text{exc}}$ ($\Gamma_*$; x), если допустимая область $\Omega_*$ достаточно хорошо аппроксимируется $m$-мерным параллелепипедом $\Omega'$ [8]. В этом случае для интенсивности выбросов можно приближенно принять $\nu_{\text{exc}}$ ($\Gamma_*$; x) $\approx \nu_{\text{exc}}$ ($\Gamma'$; x). Если же погрешность такой замены велика, то необходимо иметь оценки для выбросов случайного поля v (x) из области $\Omega_*$ с криволинейной границей.

2. Рассмотрим произвольную многосвязную область $\Omega_*$, ограниченную кусочно-гладкой поверхностью $\Gamma_*$ (фиг. 2). Введем в пространстве качества $V^m$ криволинейную систему координат $\xi^\lambda = \{\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^m\}$, связанную с прямоугольной декартовой системой координат $v^k = \{v^1, v^2, \ldots, v^n\}$ взаимно однозначными, непрерывно дифференцируемыми соотношениями

$$v^k = v^k (\xi^\lambda), \quad \xi^\lambda = \xi^\lambda (v^k) \tag{2.1}$$

Свяжем координатные линии $\xi^\alpha = \{\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^{m-1}\}$ с предельной поверхностью $\Gamma_*$, а координату $\xi^m \equiv w$ будем отсчитывать по нормали к поверхности (фиг. 3). Тогда фундаментальная квадратичная форма в пространстве $V^m$ может быть записана в виде

$$ds^2 = dv_k dv^k = g_{\lambda\mu} d\xi^\lambda d\xi^\mu = g_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta + dw^2 \tag{2.2}$$

где $g_{\lambda\mu}$ ($\xi^\nu$) — метрический тензор в $m$-мерном пространстве качества $V^m$, компоненты которого определяются формулами [12—14]:

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + 2b_{\alpha\beta} w + c_{\alpha\beta} w^2, \quad g_{\alpha m} = \delta_{\alpha m} \tag{2.3}$$

Здесь $a_{\alpha\beta}$ ($\xi^\gamma$), $b_{\alpha\beta}$ ($\xi^\gamma$) и $c_{\alpha\beta} = a^{\gamma\delta} b_{\alpha\gamma} b_{\beta\delta}$ — соответственно первый, второй и третий фундаментальные тензоры поверхности, $\delta_{\alpha m}$ — тензор Кронекера; греческие индексы начала алфавита $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... отмечают объекты, инвариантные относительно преобразований поверхностных координат $\xi^\alpha$, и пробегают значения 1, 2, ..., $m-1$; греческие индексы второй половины алфавита $\varkappa$, $\lambda$, $\mu$, ... относятся к пространству качества $V^m$ и принимают значения 1, 2, ..., $m$; по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Выразим производные $v^k_a$, $v^k_{ab}$ поля $v^k(x^a)$ через производные $\xi^\lambda_a$, $\xi^\lambda_{ab}$ поля $\xi^\lambda(x^a)$ следующими формулами:

$$v^k_a = \partial_a v^k = \frac{\partial v^k}{\partial x^a} = \frac{\partial v^k}{\partial \xi^\lambda}\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^a} = \partial_\lambda v^k \partial_a \xi^\lambda = v^k_\lambda \xi^\lambda_a \tag{2.4}$$

$$v^k_{ab} = \partial_a\partial_b v^k = \frac{\partial^2 v^k}{\partial\xi^\lambda\partial\xi^\mu}\frac{\partial\xi^\lambda}{\partial x^a}\frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^b} + \frac{\partial v^k}{\partial\xi^\lambda}\frac{\partial^2\xi^\lambda}{\partial x^a\partial x^b} = \tag{2.5}$$

$$= \partial_\lambda\partial_\mu v^k \partial_a\xi^\lambda\partial_b\xi^\mu + \partial_\lambda v^k \partial_a\partial_b\xi^\lambda = v^k_{\lambda\mu}\xi^\lambda_a\xi^\mu_b + v^k_\lambda\xi^\lambda_{ab}$$

в которых $v^k_\lambda = \partial v^k/\partial\xi^\lambda$ — компоненты матрицы аффинора. Используя найденные соотношения, представим якобиан преобразования в формуле (1.4) в виде

$$J = \partial(v^j, v^k_a, v^l_{bc})/\partial(\xi^\lambda, \xi^\mu_a, \xi^\nu_{bc}) = |v^k_\lambda|^N \tag{2.6}$$

$$|v^k_\lambda| = \det[v^k_\lambda] = \sqrt{g} = (1 + 2Hw + Kw^2)\sqrt{a}, \quad g = \det[g_{\lambda\mu}(\xi^\nu)] \tag{2.7}$$

$$a = \det[a_{\alpha\beta}(\xi^\gamma)], \quad H = \tfrac{1}{2} b^\alpha_\alpha, \quad K = \tfrac{1}{2}(b^\alpha_\alpha b^\beta_\beta - b^\alpha_\beta b^\beta_\alpha), \quad N = \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

где $H(\xi^\alpha)$ и $K(\xi^\alpha)$ — средняя и гауссова кривизны предельной гиперповерхности $\Gamma_*$ в пространстве $V^m$. Тогда формула (1.4) для $P_1(\Gamma_*; \Delta x)$ может быть переписана следующим образом:

$$P_1(\Gamma_*; \Delta x) = \int\limits_{\Gamma_*}\prod_{\alpha=1}^{m-1} d\xi^\alpha \int\limits_{-\Delta w}^{\infty} |v^k_\lambda|^N dw \int\limits_{-\infty}^{\infty}\prod_{\beta=1}^{m-1}\prod_{a=1}^{n} d\xi^\beta_a \int\limits_{\Delta w_0}\prod_{a=1}^{n} dw_a \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty}\prod_{\gamma=1}^{m-1}\prod_{b=1}^{n}\prod_{c=b}^{n} d\xi^\gamma_{bc}\int\limits_{W_-} p(v^j, v^j_a, v^k_{bc}; \mathrm{x})\prod_{d=1}^{n}\prod_{e=d}^{n} dw_{de}, \quad \Delta w = O(\Delta x^a) \tag{2.8}$$

Здесь $W_-$ — множество значений компонент поля $w_{ab}(\mathrm{x})$, которым соответствует отрицательно определенная матрица Гессе $[w_{ab}]$; переменные $v^j$, $v^j_a$, $v^k_{bc}$ выражаются через $\xi^\lambda$, $\xi^\mu_a$, $\xi^\nu_{bc}$ в соответствии с соотношениями (2.1), (2.4), (2.5); $\Delta w_0$ — параллелепипед в пространстве переменных $w_a$, содержащий точку $w_a = 0$; объем этого параллелепипеда равен

$$\Delta w_0 = \prod_{a=1}^{n}\Delta w_a = |\det| [w_{ab}]| \Delta x + o(\Delta x) \tag{2.9}$$

По аналогии с [8] нетрудно показать, что условия $w > 0$, $w_a = 0$, $w_{ab} \in W_-$ эквивалентны необходимым и достаточным условиям существования максимума функции $w(\xi^\alpha)$ над криволинейной гиперповерхностью $\Gamma_*$:

$$w(\xi^\alpha_0) = w(x^a_0) > 0, \quad dw = \partial_\alpha w(\xi^\beta_0)\, d\xi^\alpha = \partial_a w(x^b_0)\, dx^a = 0$$

$$d^2 w = \partial_\alpha\partial_\beta w(\xi^\gamma_0)\, d\xi^\alpha d\xi^\beta = \partial_a\partial_b w(x^c_0)\, dx^a dx^b < 0 \tag{2.10}$$

Замена ковариантных производных $\nabla_\alpha w$ на частные производные $\partial_\alpha w = \partial w/\partial\xi^\alpha$ в формулах (2.10) не является ограничительным обстоятельством.

Действительно, условия максимума функции $w(\xi^\alpha)$ над неевклидовой гиперповерхностью $\Gamma_*$ в общем случае имеют вид

$$w(\xi_0^\alpha) > 0,\ dw = \nabla_\alpha w(\xi_0^\beta)\, d\xi^\alpha = 0,\ d^2w = \nabla_\alpha \nabla_\beta w(\xi_0^\gamma)\, d\xi^\alpha d\xi^\beta < 0 \tag{2.11}$$

Однако по отношению к преобразованиям криволинейных поверхностных координат $\xi^\alpha$ функция $w$ является скаляром. Поэтому тензорные производные $\nabla_\alpha w$ и $\nabla_\alpha \nabla_\beta w$ могут быть представлены в форме $\nabla_\alpha w = \partial_\alpha w$, $\nabla_\alpha \nabla_\beta w = \partial_\alpha \partial_\beta w - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \partial_\gamma w$, где $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ — символы Кристоффеля на поверхности $\Gamma_*$ с метрическим тензором $a_{\alpha\beta}(\xi^\gamma)$. В силу равенства $\nabla_\alpha w(\xi_0^\beta) = 0$ имеем $\nabla_\alpha \nabla_\beta w(\xi_0^\gamma) = \partial_\alpha \partial_\beta w(\xi_0^\gamma)$ и, следовательно, в точке максимума $\xi_0^\alpha = \xi^\alpha(x_0^a)$ условия (2.11) совпадают с условиями (2.10). Правомерность замены $\nabla_a w \to \partial_a w$, $\nabla_a \nabla_b w \to \partial_a \partial_b w$ в точке $x_0^a \in G$, соответствующей точке максимума $\xi_0^\alpha = \xi^\alpha(x_0^a)$, доказывается аналогичным образом.

Заметим также, что преобразование (2.4) $v_a^k \rightleftarrows \xi_a^\lambda$ при фиксированных величинах $\xi^\alpha$, $w$ и преобразование (2.5) $v_{ab}^k \rightleftarrows \xi_{ab}^\lambda$ при заданных значениях $\xi^\alpha$, $w$, $\xi_a^\alpha$, $w_a$ являются линейными. Матрица преобразований $[v_\lambda^k]$ осуществляет деформацию и поворот координатных систем $\xi_a^\lambda$, $\xi_{ab}^\lambda$, а компоненты вектора $v_{\lambda\mu}^k \xi_a^\lambda \xi_b^\mu$ определяют параллельный перенос осей $\xi_{ab}^\lambda$ относительно $v_{ab}^k$. В случае криволинейной гиперповерхности $\Gamma_*$ транспонированная матрица $[v_\lambda^k]^T$ не совпадает с обратной $[v_\lambda^k]^{-1}$, а определитель $\det[v_\lambda^k]$, вообще говоря, не равен единице. Поэтому преобразования (2.4), (2.5) не ортогональны и матрица аффинора $[v_\lambda^k]$ не совпадает с матрицей направляющих косинусов $[C_\lambda^k]$. Установим связь между элементами этих матриц.

Введем в пространстве $V^m$ две системы некомпланарных базисных векторов $\mathbf{e}_k$ и $\mathbf{э}_\lambda$, направленных по касательным к координатным линиям $v^k$, $\xi^\lambda$ (фиг. 3) и связанных соотношениями $\mathbf{э}_\lambda = \partial\mathbf{v}/\partial\xi^\lambda = \partial v^k/\partial\xi^\lambda \mathbf{e}_k = v_\lambda^k \mathbf{e}_k$. Скалярные произведения векторов $\mathbf{э}_\lambda \mathbf{э}_\mu$ образуют ковариантный метрический тензор $g_{\lambda\mu} = \mathbf{э}_\lambda \mathbf{э}_\mu = v_\lambda^k v_\mu^l \delta_{kl}$ с компонентами, определяемыми формулами (2.3). Отсюда следует, что длина вектора $\mathbf{э}_\lambda$ равна $|\mathbf{э}_\lambda| = \sqrt{g_{(\lambda\lambda)}}$, а отношение $\mathbf{э}_\lambda / |\mathbf{э}_\lambda| = \mathbf{э}_\lambda / \sqrt{g_{(\lambda\lambda)}} = \mathbf{э}_\lambda'$ представляет собой единичный базис. С другой стороны, единичные векторы $\mathbf{э}_\lambda'$, касательные к координатным линиям $\xi^\lambda$, можно вычислить через направляющие косинусы: $\mathbf{э}_\lambda' = C_\lambda^k \mathbf{e}_k$. Сравнивая два последних равенства, получим $\mathbf{э}_\lambda = C_\lambda^k \sqrt{g_{(\lambda\lambda)}}\, \mathbf{e}_k = v_\lambda^k \mathbf{e}_k$. Откуда найдем связь между компонентами матрицы аффинора и матрицы направляющих косинусов $v_\lambda^k = C_\lambda^k \sqrt{g_{(\lambda\lambda)}}$.

**3.** Для понижения размерности интеграла в формуле (2.8) воспользуемся свойством согласованности для совместной плотности вероятности

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(z_1, z_2, \ldots, z_N) \prod_{L=M+1}^{N} dz_L = p_1(z_1, z_2, \ldots, z_M) \tag{3.1}$$

Тогда для $P_1(\Gamma_*; \Delta x)$ получим выражение

$$P_1(\Gamma_*; \Delta x) = \int_{\Gamma_*} \prod_{\alpha=1}^{m-1} d\xi^\alpha \int_{-\Delta w}^{\infty} dw \int_{\Delta w_0} \prod_{a=1}^{n} dw_a \int_{W_-} p_1(\xi^\alpha, w, w_a, w_{bc}) \prod_{b=1}^{n} \prod_{c=b}^{n} dw_{bc} \tag{3.2}$$

в котором плотность распределения случайных величин $\xi^\alpha$, $w$, $w_a$, $w_{bc}$ определяется $(m-1)(n+3)n/2$-кратным интегралом

$$p_1(\xi^\alpha, w, w_a, w_{bc}) = |v^k_\lambda(\xi^\mu)|^N \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\alpha=1}^{m-1} \prod_{a=1}^{n} d\xi^\alpha_a \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} p\,[v^j(\xi^\lambda),\ v^j_\lambda \xi^\lambda_a,\ v^k_\mu \xi^\mu_{bc} + v^k_{\mu\nu}\xi^\mu_b \xi^\nu_c] \prod_{\beta=1}^{m-1} \prod_{b=1}^{n} \prod_{c=b}^{n} d\xi^\beta_{bc} \tag{3.3}$$

Представим плотность вероятности $p$ в экспоненциальной форме [8]:

$$p(v^j, v^j_a, v^k_{bc}) = f(\xi^\lambda, \xi^\mu_a, \xi^\nu_{bc}) \exp[\lambda_* S(\xi^\lambda, \xi^\mu_a, \xi^\nu_{bc})] \tag{3.4}$$

где $\lambda_*$ большой положительный параметр, и вычислим интегралы (3.3) методом Лапласа [15]. Рассмотрим вначале внутренний интеграл по переменным $\xi^\alpha_{ab}$. Определяя координаты точки максимума $\hat{\xi}^\alpha_{ab} = \hat{\xi}^\alpha_{ab}(\xi^\lambda, \xi^\mu_c, w_{de})$ из уравнений $\partial S/\partial \xi^\alpha_{ab} = 0$, найдем

$$p_1(\xi^\alpha, w, w_a, w_{bc}) = \left[\left(\frac{2\pi}{\lambda_*}\right)^{1/2(m-1)n} |v^k_\lambda(\xi^\mu)|^{(n+2)}\right]^{1/2(n+1)} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \left| \det\left[\frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial \xi^\alpha_{ab} \partial \xi^\beta_{cd}}\right] \right|^{-1/2} p\,[v^j(\xi^\lambda),\ v^j_\mu \xi^\mu_a,$$

$$v^k_\alpha \hat{\xi}^\alpha_{ab} + C^k_m w_{ab} + v^k_{\lambda\mu}\xi^\lambda_a \xi^\mu_b] \prod_{\alpha=1}^{m-1} \prod_{a=1}^{n} d\xi^\alpha_a\,[1 + O(\lambda_*^{-1})] \tag{3.5}$$

Интегралы по переменным $\xi^\alpha_a$ вычислим аналогичным образом. Функция $S[\xi^\lambda, \xi^\alpha_a, w_a, \hat{\xi}^\beta_{bc}(\xi^\gamma_d), w_{ef}]$ достигает наибольшего значения в точке $\hat{\xi}^\alpha_a = \hat{\xi}^\alpha_a(\xi^\lambda, w_b, w_{cd})$, определяемой уравнениями $\partial S/\partial \xi^\alpha_a = 0$. Поэтому главный член асимптотики интеграла по $\xi^\alpha_a$ оценивается также, как и интеграла по $\xi^\alpha_{ab}$. Объединяя результаты повторного интегрирования, получим

$$p_1(\xi^\alpha, w, w_a, w_{bc}) = \left(\frac{2\pi}{\lambda_*}\right)^M |v^k_\lambda|^N \times$$

$$\times \left| \det\left[\frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial \xi^\alpha_a \partial \xi^\beta_b}\right] \det\left[\frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial \xi^\alpha_{ab} \partial \xi^\beta_{cd}}\right] \right|^{-1/2} \times$$

$$\times p\,[v^j(\xi^\alpha, w),\ v^k_\alpha \hat{\xi}^\alpha_a + C^k_m w_a,\ v^k_\alpha \hat{\xi}^\alpha_{ab} + C^k_m w_{ab} +$$

$$+ v^k_{\alpha\beta}\hat{\xi}^\alpha_a \hat{\xi}^\beta_b + 2v^k_{\alpha m}\hat{\xi}^\alpha_a w_b]\,[1 + O(\lambda_*^{-1})],\quad M = 1/4\,(m-1)(n+3)\,n \tag{3.6}$$

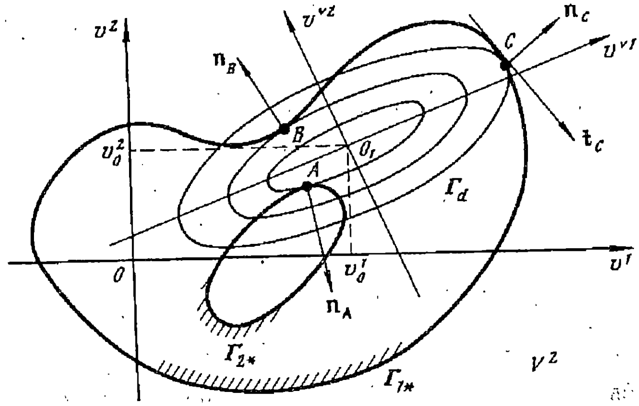
Производные $\hat{S}''$ вычисляются здесь в точках с координатами $\hat{\xi}^\alpha_a = \hat{\xi}^\alpha_a(\xi^\lambda, w_b, w_{cd})$, $\hat{\xi}^\alpha_{ab} = \hat{\xi}^\alpha_{ab}(\xi^\lambda, \hat{\xi}^\beta_c, w_d, w_{ef})$.

Введем далее совместную плотность вероятности для скалярной функции $w(\mathbf{x})$ и ее производных $w_a(\mathbf{x})$, $w_{ab}(\mathbf{x})$:

$$p_2(w, w_a, w_{bc}) = \int_{\Gamma_*} p_1(\xi^\alpha, w, w_a, w_{bc}) \prod_{\alpha=1}^{m-1} d\xi^\alpha \tag{3.7}$$

Вычисление интеграла (3.7) по криволинейной римановой поверхности $\Gamma_*$, вложенной в евклидово пространство $V^m$, в общей схеме метода Лапласа мало чем отличается от асимптотической оценки кратных интегралов (3.3). Отличие — только в том, что решение уравнений $\partial S/\partial \xi^\alpha = 0$, определяющее координаты точки максимума функции $S$ на поверхности $\Gamma_*$, является неединственным. Поэтому для оценки интеграла (3.7) необходимо учесть сумму вкладов по всем точкам максимумов.

По существу, в неявной форме эта сумма просматривается в формулах




Фиг. 4

(5) — (17) из [8] при интегрировании по $2m$ граням $m$-мерного параллелепипеда $\Omega'$. В действительности, однако, не все величины максимумов будут равновелики. Например, в ситуации, изображенной на фиг. 4, первое касание эллипса рассеивания $\Gamma_d$ и предельной кривой $\Gamma_* = \Gamma_{1*} \cup \Gamma_{2*}$ имеет место в точке $A$. Кроме того, помимо точек $B$ и $C$, касание произойдет еще в четырех-пяти точках. При этом лишь первый максимум функции $S\,(v_A^1, v_A^2)$ будет иметь решающее значение; вкладами остальных точек максимумов можно пренебречь [8].

Заметим, что координаты точки касания гиперповерхности рассеивания $\Gamma_d$ и предельной гиперповерхности $\Gamma_*$ совпадают с координатами точки максимума функции $S\,(\xi^\alpha, w)$. Действительно, предельная гиперповерхность $\Gamma_*$ задана в параметрической форме уравнениями (2.1) $v^k = v^k\,(\xi^\alpha, 0)$. Гиперповерхность рассеивания $\Gamma_d$ представлена в неявном виде уравнением $F\,[v^k\,(\xi^\alpha, w)] = \lambda_* S\,[v^k\,(\xi^\alpha, w)] - d^2$, где $d$ — параметр семейства гиперповерхностей. Дифференцируя уравнение $F=0$ по $\xi^\alpha$, получим $(\partial F/\partial v^k)\,(\partial v^k/\partial \xi^\alpha) = 0$. При $w=0$ это уравнение представляет собой условие касания поверхностей $\Gamma_*$ и $\Gamma_d$, поскольку величины $v_\alpha^k = \partial v^k/\partial \xi^\alpha$ определяют компоненты $m-1$ касательных векторов к поверхности $\Gamma_*$, а величины $F_k = \partial F/\partial v^k$ — компоненты вектора нормали к поверхности $\Gamma_d$ [16]. В точке касания эти векторы должны быть взаимно перпендикулярны, а их скалярные произведения $F_k v_\alpha^k$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, m-1$) равны нулю. С другой стороны, уравнения $\lambda_*^{-1} F_k v_\alpha^k = \partial S/\partial \xi^\alpha = 0$ дают необходимые условия существования максимума функции $S\,(\xi^\alpha, w)$ по переменным $\xi^\alpha$. Таким образом, координаты точки касания гиперповерхностей $\Gamma_d$, $\Gamma_*$ и точки максимума совпадают.

Из этого сразу следует простой графический способ определения наиболее вероятных координат точек выброса $\xi^\alpha = \widehat{\xi}_t^\alpha$ и оценка наибольшего из максимумов $S\,(\widehat{\xi}_+^\alpha, 0) = \sup S\,(\widehat{\xi}_t^\alpha, 0)$ по $t$. Кроме того, и это важно, координаты точки касания $\widehat{\xi}_+^\alpha$ позволяют оценить наиболее вероятные значения функций $v_+^k = v^k\,(\widehat{\xi}_+^\alpha, 0)$ в момент выброса векторного поля $\mathbf{v}\,(\mathbf{x})$ из области допустимых состояний $\Omega_*$.

Применяя метод Лапласа к поверхностному интегралу (3.7) и суммируя полученный результат с выражением (3.6), получим

$$p_2(w, w_a, w_{bc}) = \sum_t \left[ \left(\frac{2\pi}{\lambda_*}\right)^{1/2(m-1)} |\hat{\vartheta}^k_\lambda| \right]^N \times$$

$$\times \left| \det\left[\frac{\partial^2 \hat{S}_t}{\partial\xi^\alpha \partial\xi^\beta}\right] \det\left[\frac{\partial^2 \hat{S}_t}{\partial\xi^\alpha_a \partial\xi^\beta_b}\right] \det\left[\frac{\partial^2 \hat{S}_t}{\partial\xi^\alpha_{ab} \partial\xi^\beta_{cd}}\right] \right|^{-1/2} \times$$

$$\times p\,[\vartheta^j(\hat{\xi}^\alpha_t, w),\ \hat{\vartheta}^k_\alpha \hat{\xi}^\alpha_a + \hat{C}^k_m w_a,\ \hat{\vartheta}^k_\alpha \hat{\xi}^\alpha_{ab} + \hat{C}^k_m w_{ab} +$$

$$+ \hat{\vartheta}^k_{\alpha\beta} \hat{\xi}^\alpha_a \hat{\xi}^\beta_b + 2\hat{\vartheta}^k_{\alpha m} \hat{\xi}^\alpha_a w_b]\,[1 + O(\lambda_*^{-1})] \tag{3.8}$$

$$\hat{\xi}^\alpha_a = \hat{\xi}^\alpha_a(\hat{\xi}^\beta_t, w, w_b, w_{cd}), \quad \hat{\xi}^\alpha_{ab} = \hat{\xi}^\alpha_{ab}(\hat{\xi}^\beta_t, w, \hat{\xi}^\gamma_c, w_d, w_{ef})$$

$$\hat{\vartheta}^k_\lambda = \vartheta^k_\lambda(\hat{\xi}^\alpha_t, w), \quad \hat{\vartheta}^k_{\lambda\mu} = \vartheta^k_{\lambda\mu}(\hat{\xi}^\alpha_t, w), \quad \hat{C}^k_m \doteq C^k_m(\hat{\xi}^\alpha_t, w)$$

Если гиперповерхности $\Gamma_*$ и $\Gamma_d$ имеют общий центр и геометрически подобны, то их касание произойдет не в счетном множестве точек, а по всей поверхности $\Gamma_*$. Вычисление совместной плотности вероятности $p_2(w, w_a, w_{bc})$ в этом случае можно провести следующим образом. Применяя линейное преобразование $\mathrm{U} = A\mathrm{V} + \mathrm{B}$, отобразим области $\Omega_*$ и $\Omega_d$ в $m$-мерные шары с радиусами $R_*$, $R_d$ соответственно, т. е. приведем вектор $\mathrm{V} = \{v_i{}^i, v^j_a, v^k_{bc}\}$ к случайному вектору $\mathrm{U} = \{u^i, u^j_a u, u^k_{bc}\}$ с независимыми составляющими [17]. Переходя затем от ортогональных декартовых координат $u^k$ к сферическим координатам $\chi = R_*(1 + w/R_*)$, $\theta_1 = \xi^1/R_*$, $\theta_2 = \xi^2/R_*, \ldots, \theta_{m-1} = \xi^{m-1}/R_*$ и используя соотношения (2.4), (2.5), проинтегрируем (3.3) по переменным $\xi^\alpha_a$, $\xi^\beta_{bc}$. В результате имеем

$$|\vartheta^k_\lambda|^N \iint p\,d\xi^\alpha_a d\xi^\beta_{bc} = p_1 |\vartheta^k_\lambda| = p_1 (1 + w/R_*)^2 \sqrt{a(\xi^\alpha)}$$

где $a(\xi^\alpha)$ — определитель метрического тензора $a_{\alpha\beta}(\xi^\gamma)$ на поверхности $\Gamma_{**}$. Поскольку плотность $p_1(w, w_a, w_{bc})$ не зависит от $\xi^\alpha$, то интегрирование по $\xi^\alpha$ в (3.7) сводится к простому вычислению площади поверхности $\Gamma_{**}$ $m$-мерной сферы радиуса $R_*$. В итоге получим выражение для плотности вероятности

$$p_2(w, w_a, w_{bc}) = p_1(w, w_a, w_{bc})(1 + w/R_*)^2 M(\Gamma_{**}) \tag{3.9}$$

$$M(\Gamma_{**}) = \int_{\Gamma_{**}} \sqrt{a(\xi^\alpha)} \prod_{\alpha=1}^{m-1} d\xi^\alpha = \frac{2R_*^{m-1}\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}$$

в котором $M(\Gamma_{**})$-мера площади поверхности сферы $\Gamma_{**}$; $\Gamma(m/2)$ — гамма-функция. Случайное скалярное поле $w(\mathrm{x}) = \left[\sum_{k=1}^m u_k(\mathrm{x})\,u^k(\mathrm{x})\right]^{1/2} - R_*$ является обобщением случайного $\chi(t)$-процесса Пирсона с $m$ степенями свободы [10—11].

Проинтегрируем в (3.2) функцию $p_2(w, w_a, w_{bc})$ по объему гиперпараллелепипеда $\Delta w_0$ в пространстве переменных $w_a$, используя равенство (2.9) и формулу

$$\int_{\Delta w_0} p_2(w, w_a, w_{bc}) \prod_{a=1}^n dw_a = p_2(w, 0, w_{bc})\,|\det[w_{bc}]|\,\Delta x + o(\Delta x) \tag{3.10}$$

Подставляя полученный результат в соотношение (1.2) и переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим формулу для математического ожидания числа выбросов векторного поля $\mathrm{v}(\mathrm{x})$, отнесенных к единице объема области $G \subset R^n$:

$$\nu_{\text{exc}}(\Gamma_*; \mathrm{x}) = \int_0^\infty dw \int_{W_-} p_2(w, 0, w_{ab})\,|\det[w_{ab}]| \prod_{a=1}^n \prod_{b=a}^n dw_{ab} \tag{3.11}$$

Здесь $\det[\hat{w}_{ab}]$ — гессиан функции $w(\mathbf{x})$, $W_-$ — множество значений-компонент тензорного поля $w_{ab}(\mathbf{x})$, которым соответствует отрицательно определенная матрица $[w_{ab}] = [\partial^2 w / \partial x^a \partial x^b]$.

Следует отметить, что на основании результатов статей [7, 8] конкрстный вид области $W_-$ не требуется. Важно лишь, чтобы критическая точка $\hat{w}_{ab} = \hat{w}_{ab}(w)$, определяемая уравнениями $\partial \hat{S}_t / \partial w_{ab} = 0$, являлась внутренней невырожденной точкой максимума функции $\hat{S}_t(w, w_{ab})$, т. е. $\hat{w}_{ab} \in W_-$. Поэтому границы области интегрирования $W_-$ при выполнении условия $\lambda_* \gg 1$ можно отнести в бесконечность и применить к внутреннему интегралу стандартную схему метода Лапласа [15].

Во внешнем интеграле (3.11) функция $\hat{S}_t(w)$ достигает своего наибольшего значения в граничной точке $\hat{w} = 0$, которая не является точкой максимума. Экстремальное значение $w = w_0$ находится внутри допустимой области $\Omega_*$ и совпадает с центром области рассеивания $\Omega_d$. Поэтому для оценки вклада граничной точки $\hat{w} = 0$ во внешнем интеграле необходимо использовать вариантную схему метода Лапласа [15].

С учетом сделанных замечаний получим окончательное выражение для интенсивности выбросов $\nu_{\mathrm{exc}}(\Gamma_*; \mathbf{x})$ при произвольном типе распределения многомерных стохастически связанных случайных функций $\vartheta^j(\mathbf{x})$, $\vartheta^j_a(\mathbf{x})$, $\vartheta^k_{bc}(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned}
&\nu_{\mathrm{exc}}(\Gamma_*; \mathbf{x}) = \left(\frac{2\pi}{\lambda_*}\right)^K \sum_t |\hat{\vartheta}^k_\lambda|^N \, |\det[\hat{w}_{ab}]| \times \\
&\times \left| \lambda_* \frac{\partial \hat{S}_t}{\partial w} \right|^{-1} \left| \det\left[\frac{\partial^2 \hat{S}_t}{\partial w_{aa} \partial w_{bb}}\right] \det\left[\frac{\partial^2 \hat{S}_t}{\partial \xi^\alpha \partial \xi^\beta}\right] \times \right. \\
&\times \det\left[\frac{\partial^2 \hat{S}_t}{\partial \xi^\alpha_a \partial \xi^\beta_b}\right] \det\left[\frac{\partial^2 \hat{S}_t}{\partial \xi^\alpha_{ab} \partial \xi^\beta_{cd}}\right] \Bigg|^{-1/2}, \quad p\,[\vartheta^j(\hat{\xi}^\alpha_t, 0), \\
&\hat{\vartheta}^k_\alpha \hat{\xi}^\alpha_a, \hat{\vartheta}^k_\alpha \hat{\xi}^\alpha_{ab} + \hat{C}^k_m \hat{w}_{ab} + \hat{\vartheta}^k_{\alpha\beta} \hat{\xi}^\alpha_a \hat{\xi}^\beta_b]\,[1 + O(\lambda_*^{-1})], \\
&K = 1/4\,(n+1)\,[(m-1)(n+2) + n] \\
&\hat{\xi}^\alpha_{ab} = \hat{\xi}^\alpha_{ab}(\hat{\xi}^\beta_t, \hat{w} = 0, \hat{\xi}^\gamma_c, \hat{w}_d = 0, \hat{w}_{ef}), \quad \hat{w}_{ab} = \hat{w}_{ab}(\hat{w} = 0, \hat{w}_c = 0) \\
&\hat{\xi}^\alpha_a = \hat{\xi}^\alpha_a(\hat{\xi}^\beta_t, \hat{w} = 0, \hat{w}_b = 0, \hat{w}_{cd}), \quad \hat{\xi}^\alpha_t = \hat{\xi}^\alpha_t(\hat{w} = 0, \hat{w}_a = 0, \hat{w}_{bc})
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Производные $\hat{S}_t'$, $\hat{S}_t''$ вычисляются при $\xi^\alpha = \hat{\xi}^\alpha_t$, $w = 0$, $\xi^\alpha_a = \hat{\xi}^\alpha_a$, $w_a = 0$, $\xi^\alpha_{ab} = \hat{\xi}^\alpha_{ab}$, $w_{ab} = \hat{w}_{ab}$.

**4.** Применим полученные формулы для оценки интенсивности выбросов однородного гауссовского случайного векторного поля. Запишем совместную плотность вероятности для компонент поля $\vartheta^j(\mathbf{x})$ и производных $\vartheta^j_a(\mathbf{x})$, $\vartheta^k_{ab}(\mathbf{x})$ в виде

$$\begin{aligned}
&p(\vartheta^j, \vartheta^j_a, \vartheta^k_{bc}) = (2\pi)^{-1/2 mN} (\det[A])^{-1/2} \times \\
&\times \exp\{-1/2\,[B_{kl}(\vartheta^k - \langle\vartheta^k\rangle)(\vartheta^l - \langle\vartheta^l\rangle) + 2B^a_{kl}(\vartheta^k - \langle\vartheta^k\rangle)\vartheta^l_a + \\
&+ 2' B^{ab}_{kl}(\vartheta^k - \langle\vartheta^k\rangle)\vartheta^l_{ab} + B^{ab}_{kl}\vartheta^k_a \vartheta^l_b + 2B^{abc}_{kl}\vartheta^k_a \vartheta^l_{bc} + B^{abcd}_{kl}\vartheta^k_{ab}\vartheta^l_{cd}]\}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

По повторяющимся ко- и контравариантным индексам подразумевается суммирование в соответствии с принятым соглашением об индексации компонент тензорных полей буквами латинского и греческого алфавитов; элементы матрицы $[A]$ выражаются через корреляционные функции полей $\vartheta^k(\mathbf{x})$, $\vartheta^k_a(\mathbf{x})$, $\vartheta^k_{ab}(\mathbf{x})$ [11, 17]:

$$[A] = \left\| \begin{matrix} \langle ^* v^i v^j \rangle & \langle ^* v^i v^k_a \rangle & \langle ^* v^i v^l_{ab} \rangle \\ \langle ^* v^i_a v^k \rangle & \langle ^* v^j_a v^k_b \rangle & \langle ^* v^j_a v^l_{bc} \rangle \\ \langle ^* v^i_{ab} v^l \rangle & \langle ^* v^j_{ab} v^l_c \rangle & \langle ^* v^k_{ab} v^l_{cd} \rangle \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} A^{ij} & A^{ik}_a & 'A^{il}_{ab} \\ A^{ik}_a & A^{jk}_{ab} & A^{jl}_{abc} \\ 'A^{il}_{ab} & A^{jl}_{abc} & A^{kl}_{abcd} \end{matrix} \right\| \tag{4.2}$$

Матрица $[A]$ представлена в блочном виде; размерности блоков на главной диагонали соответственно равны $m \times m$, $mn \times mn$, $m(n+1)(n/2) \times m(n+1)(n/2)$; $[B]$ — матрица, обратная $[A]$, верхний индекс в виде звездочки, расположенный слева от буквы, отмечает комплексно-сопряженные величины; угловыми скобками обозначена операция вычисления математического ожидания.

Введем криволинейные координаты $\xi^\lambda = \xi^\lambda(v^k)$, связанные с гиперповерхностью $\Gamma_*$, и осуществим функциональное преобразование системы случайных величин $\{v^i, v^j_a, v^k_{bc}\}$ по формулам (2.1), (2.4), (2.5). Тогда плотность вероятности случайных величин $\{\xi^\lambda, \xi^\mu_a, \xi^\nu_{bc}\}$ принимает вид

$$p(\xi^\lambda, \xi^\mu_a, \xi^\nu_{bc}) = p\,[v^i(\xi^\lambda), v^j_\lambda(\xi^\mu)\,\xi^\lambda_a, v^k_\lambda(\xi^\mu)\,\xi^\lambda_{bc} + v^k_{\lambda\mu}(\xi^\nu)\,\xi^\lambda_b\xi^\mu_c\,]\,|\,v^k_\lambda(\xi^\mu)\,|^N \tag{4.3}$$

Отличительным свойством многомерных нормальных распределений является их устойчивость по отношению к линейным преобразованиям случайных величин, в результате которых тип распределения сохраняется, а числовые характеристики пересчитываются методами линейной алгебры. Однако функциональное преобразование (2.1), (2.4), (2.5) в целом является нелинейным и плотность вероятности (4.3) по переменным $\xi^\lambda$, $\xi^\mu_a$ не сохраняет свойство гауссовости. Существенное упрощение формул (3.12), (4.3) может быть достигнуто путем принятия дополнительной гипотезы, вытекающей из основного предположения о высокой надежности рассматриваемой физической системы. А именно: в силу условия о редких выбросах характерные масштабы $\Delta\xi^\mu_+$ выброса $\Omega_+$ (фиг. 2) за предельную гиперповерхность $\Gamma_*$ будут малы по сравнению с характерными размерами $R^\mu_*$ допустимой области $\Omega_*$, т. е. $\lambda_+^{-1} = \max(\Delta\xi^\mu_+/R^\mu_*) << 1$, $1 \le \mu \le m$. Например, для компонент $\xi^\alpha(x)$ с дисперсиями $\sigma^2_{(\alpha)}$ и эффективными волновыми числами $\varkappa_{(\alpha)}$ имеем оценки [11]:

$$\Delta\xi^\alpha_+/R^{(\alpha)}_* \sim \sigma_{(\alpha)}\,[(\xi^\alpha_* - \langle\xi^\alpha\rangle)\,\varkappa_{(\alpha)}R^{(\alpha)}_*]^{-1} << 1 \text{ при } \varkappa_{(\alpha)}R^{(\alpha)}_* \gtrsim 1,$$

$$\lambda_* = \min_{1\le\alpha\le m-1}(\xi^\alpha_* - \langle\xi^\alpha\rangle)^2\,\sigma^{-2}_{(\alpha)} >> 1$$

Поэтому соотношение (2.5) может быть переписано в форме

$$v^k_{ab} = v^k_\alpha(\xi^\alpha_{ab} + \Gamma^\alpha_{\lambda\mu}\xi^\lambda_a\xi^\mu_b) + C^k_m(w_{ab} + \Gamma^m_{\alpha\beta}\xi^\alpha_a\xi^\beta_b) =$$

$$= (v^k_\alpha\xi^\alpha_{ab} + C^k_m w_{ab})\,[1 + O(\lambda_+^{-1})], \quad \Gamma^m_{\alpha\beta} = -(b_{\alpha\beta} + wc_{\alpha\beta}) \tag{4.4}$$

Здесь $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}(\xi^\alpha, w)$ — символы Кристоффеля в пространстве с метрическим тензором (2.3); символы Кристоффеля с двумя индексами $m$ и более равны нулю [12—14]; размеры выброса по всем направлениям имеют одинаковый порядок $\Delta w_+ \sim \Delta\xi^\alpha_+ \sim \Delta\xi_+$; второй и третий фундаментальные тензоры поверхности обратно пропорциональны характерным радиусам кривизны $b_{\alpha\beta} \sim (R^{\alpha\beta}_*)^{-1}$, $c_{\alpha\beta} \sim (R^{\alpha\beta}_*)^{-2}$; производные $v^k_\lambda$ и $v^k_{\lambda\mu}$ связаны равенством $v^k_{\lambda\mu} = \Gamma^\nu_{\lambda\mu}v^k_\nu$, вытекающим из формул для производных базисных векторов

$$\frac{\partial Э_\lambda}{\partial\xi^\mu} = \Gamma^\nu_{\lambda\mu}Э_\nu = \Gamma^\nu_{\lambda\mu}v^k_\nu e_k = \frac{\partial v^k_\lambda}{\partial\xi^\mu}e_k = v^k_{\lambda\mu}e_k \tag{4.5}$$

Таким образом, для плотности вероятности (4.3) получаем выражение

$$p(\xi^\lambda, \xi^\mu_a, \xi^\nu_{bc}) = (2\pi)^{-1/2mN}(\det[A_0(\xi^\lambda)])^{-1/2} \times$$

$$\times \exp\{-1/2\,[B_{kl}(v^k-\langle v^k\rangle)(v^l-\langle v^l\rangle)+2B^a_{kl}v^l_\lambda(v^k-\langle v^k\rangle)\xi^\lambda_a+$$
$$+2'B^{ab}_{kl}v^l_\lambda(v^k-\langle v^k\rangle)\xi^\lambda_{ab}+B^{ab}_{kl}v^k_\lambda v^l_\mu\xi^\lambda_a\xi^\mu_b+2B^{abc}_{kl}v^k_\lambda v^l_\mu\times$$
$$\times\xi^\lambda_a\xi^\mu_{bc}+B^{abcd}_{kl}v^k_\lambda v^l_\mu\xi^\lambda_{ab}\xi^\mu_{cd}]\}\,[1+O(\lambda_+^{-1})] \tag{4.6}$$

в котором определитель $\det[A_0(\xi^\lambda)]$ подсчитывается по формуле произведения определителей [18]. Например, для блока $[A^{ij}]=\langle{}^*v^iv^j\rangle$ в матрице $[A]$ имеем

$$\det[A_0^{\lambda\mu}]=\det[A^{ij}](\det[v^k_\lambda])^{-2}=\det[A^{ij}](\det[\xi^\lambda_k])^2=$$
$$=\det[\xi^\lambda_k]\det[\xi^\mu_l]\det[A^{ij}]=\det[\xi^\lambda_k\xi^\mu_lA^{kl}] \tag{4.7}$$

где $[\xi^\lambda_k]$ — матрица размерности $m\times m$, обратная матрице аффинора $[v^k_\lambda(\xi^\mu)]$. В общем виде корреляционная матрица $[A_0(\xi^\lambda)]$ может быть записана в форме

$$[A_0(\xi^\lambda)]=\begin{Vmatrix} A^{ij}\xi^\lambda_i\xi^\mu_j & A^{ik}_a\xi^\lambda_i\xi^\mu_k & 'A^{il}_{ab}\xi^\lambda_i\xi^\mu_l \\ A^{ik}_a\xi^\lambda_i\xi^\mu_k & A^{jk}_{ab}\xi^\lambda_j\xi^\mu_k & A^{jl}_{abc}\xi^\lambda_j\xi^\mu_l \\ 'A^{il}_{ab}\xi^\lambda_i\xi^\mu_l & A^{jl}_{abc}\xi^\lambda_j\xi^\mu_l & A^{kl}_{abcd}\xi^\lambda_k\xi^\mu_l \end{Vmatrix} \tag{4.8}$$

В силу свойства согласованности для нормально распределенных случайных величин $\xi^\lambda_a$, $\xi^\mu_{bc}$ интеграл (3.3) с подынтегральной функцией (4.6) вычисляется точно

$$p(\xi^\lambda, w_a, w_{bc})=(2\pi)^{-L}(\det[A_1(\xi^\lambda)])^{-1/2}\exp\{-1/2\,[B_{kl}(v^k-\langle v^k\rangle)\times$$
$$\times(v^l-\langle v^l\rangle)+2B^a_{kl}C^l_m(v^k-\langle v^k\rangle)w_a+2'B^{ab}_{kl}C^l_m(v^k-\langle v^k\rangle)w_{ab}+B^{aa}_{kl}C^k_mC^l_mw_aw_a+$$
$$+B^{abcd}_{kl}C^k_mC^l_mw_{ab}w_{cd}]\}\,[1+O(\lambda_+^{-1})],\quad L=1/4\,(n^2+3n+2m) \tag{4.9}$$

Здесь $C^k_m(\xi^\lambda)=v^k_m(\xi^\lambda)$ — компоненты матрицы направляющих косинусов $[C^m_k]=[C^k_m(\xi^\lambda)]^{-1}=[C^k_m(\xi^\lambda)]^T$; элементы $A^{jl}_{abc}C^m_jC^m_l$ матрицы $[A_1]$ обращаются в нуль в силу свойства некоррелированности однородных случайных полей $w_a(\mathrm{x})$ и $w_{bc}(\mathrm{x})$ [9—11, 17]; матрица $[A_1(\xi^\lambda)]$ имеет вид

$$[A_1(\xi^\lambda)]=\begin{Vmatrix} A^{ij}\xi^\lambda_i\xi^\mu_j & A^{ik}_a\xi^\lambda_iC^m_k & 'A^{il}_{ab}\xi^\lambda_iC^m_l \\ A^{ik}_aC^m_i\xi^\lambda_k & A^{jk}_{ab}C^m_jC^m_k & 0 \\ 'A^{il}_{ab}C^m_i\xi^\lambda_l & 0 & A^{kl}_{abcd}C^m_kC^m_l \end{Vmatrix} \tag{4.10}$$

На следующем шаге необходимо вычислить поверхностный интеграл (3.7), определив предварительно точки максимума функции (4.9) на гиперповерхности $\Gamma_*$. Однако преобразования в общем виде без конкретизации геометрических свойств поверхности $\Gamma_*$, т. е. без фиксирования функций $v^k=v^k(\xi^\lambda)$, приводят к непрозрачному выражению типа (3.8). В целях получения простых асимптотических формул линеаризуем функции $v^k(\xi^\lambda)$ в окрестности их математических ожиданий:

$$v^k=v^k(\langle\xi^\lambda\rangle)+v^k_\lambda(\langle\xi^\mu\rangle)(\xi^\lambda-\langle\xi^\lambda\rangle)+1/2\,v^k_{\lambda\mu}(\langle\xi^\nu\rangle)(\xi^\lambda-\langle\xi^\lambda\rangle)\times$$
$$\times(\xi^\mu-\langle\xi^\mu\rangle)+\ldots=v^k(\langle\xi^\lambda\rangle)+v^k_\lambda(\langle\xi^\mu\rangle)(\xi^\lambda-\langle\xi^\lambda\rangle)\,[1+O(\lambda_+^{-1})] \tag{4.11}$$

используя оценки типа (4.4), (4.5) и оставаясь при этом в рамках погрешности $\lambda_+^{-1}=\max(\Delta\xi^\mu_+/R^\mu_*)\ll 1$ $(1\le\mu\le m)$. Подставляя (4.11) в (4.9), определим координаты $\xi^\alpha=\hat{\xi}^\alpha$ точки максимума функции $\exp(\lambda_*S)$ из уравнений $\partial S/\partial\xi^\alpha=0$:

$$B_{kl}v^k_\alpha(\langle\xi^\gamma\rangle, w)\,v^l_\beta(\langle\xi^\gamma\rangle, w)(\xi^\beta-\langle\xi^\beta\rangle)=-v^k_\alpha(\langle\xi^\gamma\rangle, w)\times$$

$$\times C^l_m(\langle\xi^\gamma\rangle, w)\,[B_{kl}(w-\langle w\rangle) + B^a_{kl}w_a + {}'B^{aa}_{kl}w_{aa}]\,[1 + O(\lambda_+^{-1})] \tag{4.12}$$

Используя далее выражение (3.8), получим формулу для совместной плотности вероятности

$$p(w, w_a, w_{bc}) = (2\pi)^{-1/2N}(\det[A_2(\langle\xi^\alpha\rangle, w)])^{-1/2}\times$$
$$\times\exp\{-1/2\,[B_{kl}(w-\langle w\rangle)]^2 + 2'B^{aa}_{kl}(w-\langle w\rangle)\,w_{aa} + B^{aa}_{kl}w_aw_a +$$
$$+ B^{abcd}_{kl}w_{ab}w_{cd}]\,C^k_m(\langle\xi^\alpha\rangle, w)\,C^l_m(\langle\xi^\alpha\rangle, w)\}\,[1 + O(\lambda_+^{-1}, \lambda_*^{-1})] \tag{4.13}$$

с корреляционной матрицей

$$[A_2(\langle\xi^\alpha\rangle, w)] = \begin{Vmatrix} A^{ij}M_{ij} & 0 & 'A^{il}_{aa}M_{il} \\ 0 & A^{jk}_{aa}M_{jk} & 0 \\ 'A^{il}_{aa}M_{il} & 0 & A^{kl}_{abcd}M_{kl} \end{Vmatrix}$$

где нулями отмечено отсутствие статистической связи между однородными случайными полями $w(\mathbf{x})$ и $w_a(\mathbf{x})$; $w_a(\mathbf{x})$ и $w_{bc}(\mathbf{x})$; $M_{ij} = C^m_i(\langle\xi^\alpha\rangle, w)\,C^m_j(\langle\xi^\alpha\rangle, w)$. По существу, в результате вычисления интеграла (3.7) методом Лапласа на месте матрицы $[A_2]$ в формуле (4.13) должно стоять произведение матриц $[A_2(\xi^\alpha, w)]\,[\partial^2 S(\xi^\alpha, w, w_a, w_{bc})/\partial\xi^\alpha\partial\xi^\beta]$. Однако в пределах погрешности $\lambda_+^{-1} \ll 1$ это произведение равно матрице $[A_2(\langle\xi^\alpha\rangle, w)]\,[1 + O(\lambda_+^{-1})]$.

Подставим плотность вероятности (4.13) в (3.11), используем выражение (3.12) и результаты из [7]. В итоге получим формулу для интенсивности выбросов однородного случайного гауссовского векторного поля $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ из области допустимых состояний $\Omega_*$:

$$\nu_{exc}(\Gamma_*) = (2\pi)^{-1/2(n+1)h}\prod_{a=1}^{h} k_{ae}\left|\frac{\langle w\rangle}{\sigma_w}\right|^{n-1}\exp\left[-\frac{\langle w\rangle^2}{2\sigma_w^2}\right]\,[1 + O(\lambda_+^{-1}, \lambda_*^{-1})] \tag{4.14}$$

Здесь $k_{ae} = \sigma_{w_a}/\sigma_w$ — эффективные волновые числа случайного скалярного поля $w\,[v^k(\mathbf{x})]$; через $\sigma_w^2$, $\sigma_{w_a}^2$ обозначены дисперсии поля $w(x)$ и его производных $w_a(x) = \partial w/\partial x^a$:

$$\sigma_w^2 = \langle{}^*v^kv^l\rangle\,C^m_k(\langle\xi^\alpha\rangle, 0)\,C^m_l(\langle\xi^\alpha\rangle, 0),\quad \sigma_{w_a}^2 = \langle{}^*v^k_av^l_a\rangle\,C^m_k(\langle\xi^\alpha\rangle, 0)\,C^m_l(\langle\xi^\alpha\rangle, 0) \tag{4.15}$$

Математическое ожидание случайного поля $w(\mathbf{x})$ вычисляется по формуле $\langle w\rangle = w(\langle v^k\rangle)\,[1 + O(\lambda_+^{-2})]$; $C^k_m(\langle\xi^\alpha\rangle, 0)$ — элементы матрицы направляющих косинусов единичной нормали к поверхности $\Gamma_*$ в точке $\xi^\alpha = \langle\xi^\alpha\rangle = \xi^\alpha(\langle v^k\rangle)\,[1 + O(\lambda_+^{-2})]$.

Координаты $\xi^\alpha_+$ точки касания гиперобъема $\Omega$ с предельной гиперповерхностью $\Omega_*$ определяются из уравнения (4.12) при $w = 0$, $w_a = 0$. Особенно простое решение получается при выполнении неравенства $'B^{aa}_{kl}w_{aa} \ll B_{kl}\langle w\rangle$. В этом случае решение системы алгебраических уравнений

$$B_{kl}v^k_\alpha(\langle\xi^\gamma\rangle, 0)\,v^l_\beta(\langle\xi^\gamma\rangle, 0)\,(\xi^\beta - \langle\xi^\beta\rangle) = B_{kl}v^k_\alpha(\langle\xi^\gamma\rangle, 0)\,C^l_m(\langle\xi^\gamma\rangle, 0)\,\langle w\rangle \tag{4.16}$$

может быть найдено по правилу Крамера

$$\xi^\alpha_+ - \langle\xi^\alpha\rangle = -\frac{\mathbf{B}_{m\alpha}}{\mathbf{B}_{mm}}\langle w\rangle = -\frac{A^{\alpha m}}{A^{mm}}\langle w\rangle = -\frac{A^{ij}\xi^\alpha_iC^m_j}{A^{kl}C^m_kC^m_l}\langle w\rangle \tag{4.17}$$

где $\mathbf{B}_{\lambda\mu}$ — алгебраическое дополнение элемента $B_{\lambda\mu}$ в определителе $\det[B_{\lambda\mu}] = \det[B_{kl}v^k_\lambda v^l_\mu]$. Наиболее вероятные значения компонент векторного поля $v(x)$ в момент выброса вычисляются по формуле $v^k_+ = v^k(\xi^\alpha_+, w = 0)$.

Примечательным в полученных соотношениях (4.14), (4.17) является то, что в них используются только элементы корреляционных подматриц $A^{kl} = \langle {}^*v^k v^l \rangle$ и $A^{kl}_{aa} = \langle {}^*v^k_a v^l_a \rangle$. Информации о других подматрицах, формирующих матрицу (4.2) не требуется. Не приходится также вообще вычислять элементы обратной матрицы $[B]$.

Отметим, что формула (4.14) используемая при оценке функции надежности (1.1), получена в предположении, что гиперповерхность $\Gamma_*$ одинакова для всех $\mathrm{x} \in G \subset R^n$. Если же граница области допустимых состояний зависит от x, то предлагаемую теорию необходимо обобщить на случай выбросов неоднородного векторного поля v (x) за стохастически неоднородную гиперповерхность $\Gamma_*$ (x) [3, 10]. Для детерминировано изменяющейся границы $\Gamma_*$ (x) формула (4.14), тем не менее, сохраняет свое значение при условии, что характерные масштабы изменения параметров, характеризующих гиперповерхность $\Gamma_*$ (x), достаточно велики по сравнению с характерными масштабами изменения компонент векторного поля v (x).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болотин В. В.* Статистическая теория сейсмостойкости сооружений//Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1959. № 4. С. 123—129.
2. *Болотин В. В.* Применение статистических методов для оценки прочности конструкций при сейсмическом воздействии//Изв. АН СССР. Инж. сб. 1960. Т. 27. С. 58—69.
3. *Болотин В. В.* Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М.: Стройиздат, 1982. 351 с.
4. *Болотин В. В.* Ресурс машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1990. 448 с.
5. *Longuet-Higgins M. S.* The statistical analysis of a random moving surface//Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1957. V. 249. No. 966. P. 321—387.
6. *Беляев Ю. К.* О всплесках и бликах случайных полей//Докл. АН СССР. 1967. Т. 176. № 3. С. 495—497.
7. *Лобанов Е. В.* К теории надежности распределенных физических систем//Проблемы машиностроения и надежности машин 1993. № 2. С. 53—60.
8. *Лобанов Е. В.* Прогнозирование надежности распределенных систем в случае многомерного пространства качества//Проблемы машиностроения и надежности машин. 1993. № 4. С. 61—68.
9. *Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д.* Математические методы в теории надежности. М.: Наука, 1965. 524 с.
10. *Тихонов В. И.* Выбросы случайных процессов. М.: Наука, 1970. 392 с.
11. *Левин Б. Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Сов. радио, 1966. 728 с.
12. *Победря Б. Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ. 1974. 206 с.
13. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1964. 664 с.
14. *Гольденвейзер В. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
15. *Федорюк М. В.* Асимптотика: Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.
16. *Курант Р.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Наука, 1970. 672 с.
17. *Пугачев В. С.* Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М.: Физматгиз, 1962. 884 с.
18. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1970. 400 с.

Москва

Поступила в редакцию
16.X.1992