МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1995

УДК 539.375

© 1995 г. Г. А. ВАНИН

ГРАДИЕНТНАЯ ТЕОРИЯ СДВИГА МНОГОУРОВНЕВЫХ КОМПОЗИТОВ

Соединение множества элементов, находящихся на различных масштабных уровнях, образует многоуровневую среду. В синтетических композитах нити или жгуты, состоящие из тысяч волокон, образуют один масштабный уровень, отдельные волокна — другой, макрофибриллы или другие надмолекулярные образования в волокнах или матрице — третий и т. д. В блокомпозитах, например, в мышечных тканях насчитывают четыре уровня, в сухожилиях — шесть. Механика синтеза многоуровневых материалов с заданными свойствами включает задачу о прогнозе из свойств по характеристикам компонентов с учетом взаимодействия элементов при высоких градиентах внутренних полей. В прошлом попытки создания моментной теории упругости, учитывающей влияние градиентов поля напряжений, не привели к определенным результатам [1—4].

Ниже предлагается моментная теория сдвига волокнистых сред, основанная на новом принципе усреднения полей.

1. Внутреннее поле напряжений в матрице при продольном сдвиге и нецентральном взаимодействии элемента композита с окружающей средой ищем в виде суммы активной и рассеянной составляющих. Первую представим в виде

$$\tau_{1k} = \exp(x\nabla_2 + y\nabla_3)\,\tau_{1k} \quad (k = 2,3) \tag{1.1}$$

где производные определяются в центре элемента, x, y — локальные координаты, $\nabla_2 = \partial/\partial x$, $\nabla_3 = \partial/\partial y$.

Рассеянная составляющая представляет собой суперпозицию локальных полей, убывающих от центра волокна. Деформированное состояние компонентов композита определяем коэффициентами разложения продольного смещения u в степенной ряд

$$u = \exp(x\nabla_2 + y\nabla_3)\,u \tag{1.2}$$

В локальной системе координат вводим разрешающие функции для отдельного волокна ψ_a и прилегающей к нему матрицы ψ

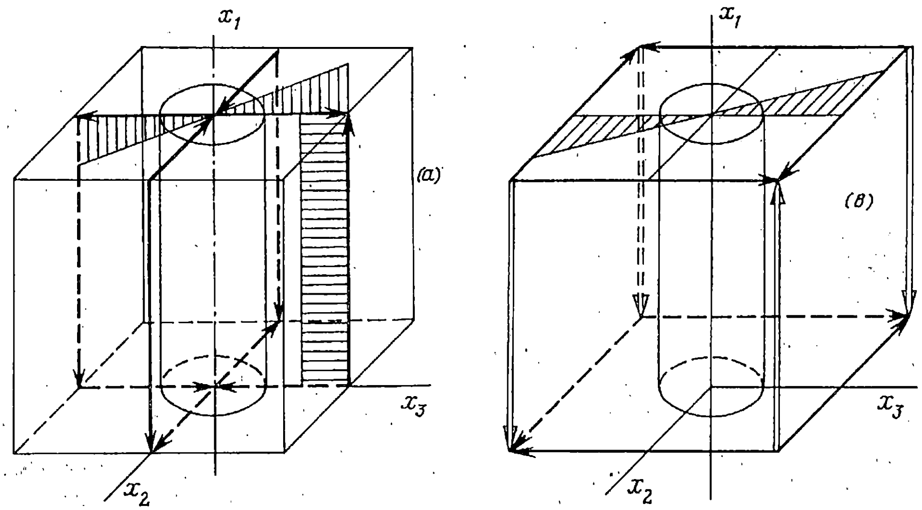
$$\psi = u + \varphi(z,\bar z), \quad \operatorname{Re}\varphi = 0, \quad \tau_{12} - i\tau_{13} = 2G\partial\psi/\partial z$$

$$z = x + iy, \quad u = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)}, \quad \Phi(z) = \sum_m \left(A_m z^m + \frac{D_m}{z^m}\right) \tag{1.3}$$

$$\varphi(z,\bar z) = \sum_{m,s}(F_{ms} z^m \bar z^s + Q_{ms} \bar z^m z^s)$$

Аналогичные разложения, регулярные в центре волокна, строятся для ψ_a. Коэффициенты разложения функций согласуются с (1.1), удовлетворяют соотношениям совершенного контакта волокно-матрица и приближенным условиям взаимодействия между волокнами [5]. Деформации моментных состояний выразим через кривизны $\varkappa_{ik}$ и их производные

$$\varkappa_{ik} = {}^1\!/_2\varepsilon_k \partial^2 u/(\partial x_i \partial x_k), \quad \varkappa_{ik}^{sn} = \partial^{s+n}\varkappa_{ik}/(\partial x^s \partial y^n) \tag{1.4}$$



Фиг. 1

$$x_2 = x,\quad x_3 = y,\quad \varepsilon_2 = -1,\quad \varepsilon_3 = 1\quad (i, k = 2, 3)$$

Усредненные по элементу композиционной среды смещения выразим через эффективные кривизны и их производные в виде разложения

$$u = u_0 + x_k\hat{\gamma}_{1k} - x^2\hat{\varkappa}_{22} + \ldots,\quad \hat{\gamma}_{1k} = \partial\hat{u}/\partial x_k$$

Здесь и везде в дальнейшем усредненные величины отмечаются угловой скобкой над буквами. Для определения усредненных параметров вводится принцип усреднения высокоградиентных полей в композитах, согласно которому

$$\hat{\tau}_{1k}\hat{\gamma}_{1k} + \sum_{n,\,i,\,k}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)}\hat{m}_{ik}\hat{\varkappa}_{ik} = \frac{1}{F}\oint_L u\,(\tau_{12}\,\mathrm{d}y - \tau_{13}\,\mathrm{d}x)\qquad(1.5)$$

где $\hat{m}_{ik}$ — усредненные моменты, сопряженные кривизнам $\hat{\varkappa}_{ik}$, L и F — граничный контур и площадь выделенного элемента, производные вычисляются по правилу

$$(\partial/\partial x + \partial/\partial y)^{(1)}\,\hat{m}_{ik}\hat{\varkappa}_{ik} = \hat{m}^1_{ik}\hat{\varkappa}^1_{ik} + \hat{m}^{01}_{ik}\hat{\varkappa}^{01}_{ik}\quad (i, k = 2, 3;\ n = 0, 1, \ldots N)$$

где N — предельный показатель степени градиента. Решение задачи о продольном сдвиге линейно-армированного композита построено для гексагональной структуры при приближенной замене контура L^L круговым цилиндром и условии идеального контакта изотропных волокон и матрицы [5] $u^+ = u^-$, $\tau^+_{1n} = \tau^-_{1n}$, $\tau_{1n} = \tau_{1k}n_k$, $n_2 = \cos\theta$, $n_3 = \sin\theta$.

Активные составляющие напряжений, соответствующие первым членам разложения (1.1) и расположения локальной системы координат в отдельной ячейке среды представлены на фиг. 1, *а*, *в*. Усредняя компоненты моментных состояний согласно принципу (1.5), находим определяющие соотношения

$$\hat{m}^{sn}_{ik} = 4G_{12}\mu_p\hat{\varkappa}^{sn}_{ik}\quad (p = s + n + 1;\ s, n = 0, 1, \ldots)\qquad(1.6)$$

$$\mu_p = -\frac{iG^p_{12}}{G_{12}}\,[2Fp!\,(p + 1)!\,]^{-1}\oint_L |z|^{2p}z\,dz\qquad(1.7)$$

Здесь G_{12} — модуль продольного сдвига волокнистой среды с гексагональной упаковкой волокон, асимптотическая формула для которого [5] $G_{12} = G\,[1 + G/G_a + \zeta\,(1 - G/G_a)]\,[1 + G/G_a - \zeta\,(1 - G/G_a)]^{-1} + \ldots$, где G и G_a — модули сдвига матрицы и волокон, ζ — объемное относительное содержание волокон в композите; G^p_{12} — новые упругие постоянные, характеризующие жесткость композита в моментных состояниях. Назовем их градиентными модулями продольного сдвига композита. Асимтотическое представление градиентных модулей для композита с гексанальной упаковкой будет

$$G^p_{12} \approx G\,[1 + G/G_a + \zeta^{p+1}(1 - G/G_a)]\,[1 + G/G_a - \zeta^{p+1}(1 - G/G_a)]^{-1} + \cdots \quad (1.8)$$

Основные уравнения и краевые условия для среды первого уровня с учетом градиентных состояний устанавливаем с помощью обобщенного функционала

$$J = \int_F dF \left[\hat{\tau}_{1k} \left(\hat{\gamma}_{1k} - \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_k} \right) + \sum_{n,\,i,\,k} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(n)} \hat{m}_{ik} \left(\hat{\varkappa}_{ik} - \frac{\varepsilon_k}{2} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_i \partial x_k} \right) - \right.$$

$$\left. - U(\hat{\gamma}_{1k}, \hat{\varkappa}^{sn}_{ik}) \right] + \oint_L T_{1n} \hat{u}\, ds + \oint_L \hat{\tau}_{1k} n_k (\hat{u} - \hat{u}^*)\, ds +$$

$$+ \oint_L \left(M_n + \frac{1}{2\rho_n} M_s + \frac{1}{2\rho_s} M^1_{ns} \right) \hat{\gamma}_{1n}\, ds + \oint_L \left(M_s + \frac{1}{2\rho_s} M^1_n - \frac{1}{2\rho_n} M^1_{ns} \right) \hat{\gamma}_{1s}\, ds +$$

$$+ \sum_p \oint_L ds\, [(M^p_n + \ldots)\, \hat{\varkappa}^{p-1}_n + (M^p_s + \ldots)\, \hat{\varkappa}^{p-1}_s + (M^p_{ns} + \ldots)\, \hat{\varkappa}^{p-1}_{ns} +$$

$$+ (M^p_{sn} + \ldots)\, \hat{\varkappa}^{p-1}_{sn}] \quad (1.9)$$

Здесь независимыми функциональными аргументами являются $\hat{u}$, $\hat{\gamma}_{ik}$, $\hat{\tau}_{1k}$, $\varkappa^{sn}_{ik}$, $\hat{\varkappa}^{sn}_{ik}$. Явный вид представлений для краевых моментов в (1.9) выписан до третьего приближения, M^p_n, M^p_s и $M^1_{ns} = -M^1_{sn}$ — p-й нормальный, касательный и смешанный моменты, U — обобщенный потенциал; ρ_n, ρ_s — радиус кривизны координатных кривых.

Составляя вариацию функционала (1.9) по независимым функциональным переменным и считая их произвольными, получим

$$\hat{\gamma}_{1k} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_k}, \quad \hat{\varkappa}^{sn}_{ik} = \frac{\partial^{s+n} \hat{\varkappa}_{ik}}{\partial x^s \partial y^n}, \quad \hat{\tau}_{1k} = \frac{\partial U}{\partial \hat{\gamma}_{1k}}, \quad C^n_p \hat{m}^{sn}_{ik} = \partial U / \partial \varkappa^{sn}_{ik}, \quad \partial T_{1k}/\partial x_k = 0, \quad u = u^* \quad (1.10)$$

$$T_{12} = \tau_{12} + \frac{1}{2} \sum_n (-1)^n \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^n \left(\frac{\partial \hat{m}_{22}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{m}_{23}}{\partial y} \right)$$

$$T_{13} = \tau_{13} + \frac{1}{2} \sum_n (-1)^n \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^n \left(\frac{\partial \hat{m}_{32}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{m}_{33}}{\partial y} \right)$$

$$M_n = -\frac{1}{2} \sum_n (-1)^n \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^n [\hat{m}_{22} \cos^2\theta - \hat{m}_{33} \sin^2\theta + \frac{1}{2} (\hat{m}_{32} - \hat{m}_{23}) \sin 2\theta]$$

$$M_s = -\frac{1}{2} \sum_n (-1)^n \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^n [\hat{m}_{32} \cos^2\theta + \hat{m}_{23} \sin^2\theta - \frac{1}{2} (\hat{m}_{22} + \hat{m}_{33}) \sin 2\theta]$$

$$M^1_n = m^1_{22} \cos^3\theta + (m^{01}_{22} - m^1_{23} + m^1_{32}) \cos^2\theta \sin\theta -$$

$$- (m^1_{33} + m^{01}_{23} - m^{01}_{32}) \cos\theta \sin^2\theta - m^{01}_{33} \sin^3\theta$$

$$M^1_s = m^1_{33} \cos^3\theta + (m^{01}_{33} - m^1_{23} + m^1_{32}) \cos^2\theta \sin\theta -$$

$$- (m^1_{22} + m^{01}_{23} - m^{01}_{32}) \cos\theta \sin^2\theta - m^{01}_{22} \sin^3\theta$$

$$M^1_{ns} = (m^1_{22} + m^1_{33}) \cos^2\theta \sin\theta + (m^{01}_{22} + m^{01}_{33}) \cos\theta \sin^2\theta +$$

$$+ \tfrac{1}{2} (m^1_{23} - m^1_{32}) \cos 2\theta \cos\theta + \tfrac{1}{2} (m^{01}_{23} - m^{01}_{32}) \cos 2\theta \sin\theta$$

Используя уравнения равновесия и определяющие соотношения (1.6), получим уравнение для разрешающей функции

$$\nabla^2 (1 - \mu_1 \nabla^2 + \mu^2 \nabla^4 - \mu_3 \nabla^6 + \ldots)\, u = 0 \quad (1.11)$$

Усилия и моменты (1.10) выразим через разрешающую функцию

$$T_{1k} = G_{12} \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_n (-1)^n \mu_n \nabla^{2n} u, \quad T_{1n} = T_{1k} n_k = G_{12} \frac{\partial}{\partial n} \sum_n (-1)^n \mu_n \nabla^{2n} u$$

$$\left.\begin{aligned} M_n &= \partial^2/\partial n^2 \\ M_s &= \partial^2/(\partial s \partial n) - \rho_n^{-1} \partial/\partial s \end{aligned}\right\} G_{12} \sum_n (-1)^n \mu_{1+n} \nabla^{2n} u$$

$$\left.\begin{aligned} M_n^1 &= -\,\partial^3/\partial n^3 \\ M_s^1 &= \partial^3/(\partial s^2 \partial n) \\ M_{ns}^1 &= \partial^3/(\partial s \partial n^2) \end{aligned}\right\} 2G_{12}\mu_2 u + \ldots$$

Естественные краевые условия сформулированы на случай совершенного контакта двух сред и свободного края. В принятом приближении для первого случая установлены соотношения

$$u^+ = u^-, \quad T_{1n}^+ = T_{1n}^-, \quad (M_n - \partial M_{ns}^1/\partial s)^+ = (M_n - \partial M_{ns}^1/\partial s)^-$$

$$(M_s - \rho_n^{-1} M_{ns}^1)^+ = (M_s - \rho_n^{-1} M_{ns}^1)^-, \quad (M_n^1)^+ = (M_n^1)^-, \quad (M_s^1)^+ = (M_s^1)^- \tag{1.12}$$

для второго случая

$$T_{1n} - \partial/\partial s\, (M_s - \rho_n^{-1} M_{ns}^1 - \tfrac{1}{2} \partial M_s^1/\partial s) = 0 \tag{1.13}$$

$$M_n + (2\rho_n)^{-1} M_s^1 - \partial M_{ns}^1/\partial s = 0, \quad M_n^1 = 0$$

Знаком плюс (минус) отмечены предельные значения функции слева (справа) от граничной поверхности, $\partial/\partial n$ и $\partial/\partial s$ — производные по нормали и дуге граничного контура.

Приведенные краевые условия дополняются условиями затухания функции u при удалении от источника возмущения напряженного состояния

$$\lim u = 0, \quad x^2 + y^2 \to \infty \tag{1.14}$$

Из строения краевых условий следует, что учет каждого последующего члена уравнения (1.11) увеличивает на два число граничных уравнений совершенного контакта и уточняет граничные условия предыдущего приближения. Для свободного края число краевых соотношений возрастает на один. Приведенное соответствие между порядком основного уравнения (1.11), и число краевых условий позволяет, по крайней мере, для канонических областей строить решения определенного класса краевых задач.

Соотношения (1.10)—(1.14) определяют соотношение одноуровневой неоднородной среды с учетом возникающих градиентов поля в структуре. Решение уравнения (1.11) имеет вид

$$u = \Phi + \sum_j \psi_j, \quad \nabla^2\Phi = 0, \quad \nabla^2\psi_j - \varkappa_j \psi_j = 0 \tag{1.15}$$

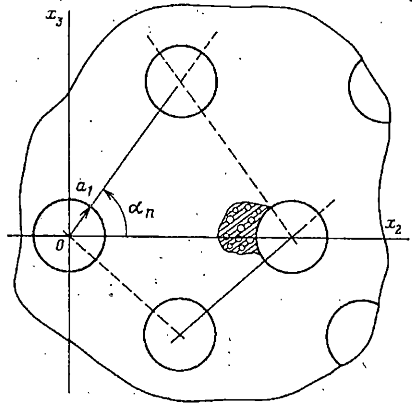
где $\varkappa_j$ — корни уравнения

$$1 - \mu_1\varkappa + \mu_2\varkappa^2 - \mu_3\varkappa^3 + \ldots = 0 \tag{1.16}$$

Функция Φ удовлетворяет уравнению классической теории продольного сдвига для тел с гексагональной структурой [5]. Моментное состояние, определенное функциями ψ_j, связано с классическим решением через краевые условия. Усилия и моменты будут

$$T_{1n} = G_{12} \partial\Phi/\partial n$$

$$\left.\begin{aligned} M_n &= \partial^2/\partial n^2 \\ M_s &= \partial^2/(\partial s \partial n) - \rho_n^{-1} \partial/\partial s \end{aligned}\right\} G_{12} \left(\mu_1 \Phi + \sum_j \varkappa_j^{-1} \psi_j\right) \tag{1.17}$$



Фиг. 2

$$\left.\begin{aligned} M_n^1 &= -\,\partial^3/\partial n^3 \\ M_s^1 &= \partial^3/(\partial s^2 \partial n) \\ M_{ns}^1 &= \partial^3/(\partial n^2 \partial s) \end{aligned}\right\} 2G_{12}\mu_2 (\Phi + \sum_j \psi_j)$$

2. Следующий, более низкий масштабный уровень среды, исследуется с помощью уравнений предыдущего масштабного уровня. Соотношение (1.1) заменяется аналогичными

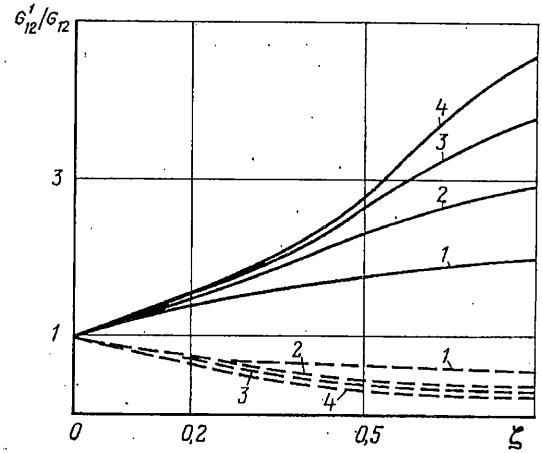
$$T_{1k} = \exp(x\nabla_2 + y\nabla_3)\, T_{1k} \tag{2.1}$$

если состояние среды на двух уровнях однотипно, x, y — локальные координаты второго масштабного уровня. Подобным способом преобразуются уравнения (1.2) и (1.4), соотношения усреднения для второго уровня имеют вид

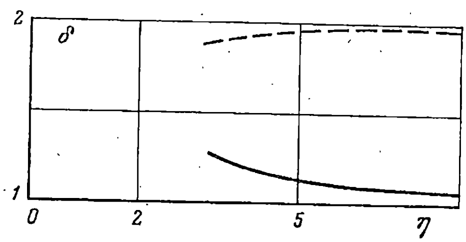
$$\hat{T}_{1k}\hat{\gamma}_{1k} + \sum_{n,i,k}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)} \hat{m}_{ik}\hat{\varkappa}_{ik} = \frac{1}{F_1}\oint_{L_1} u\hat{T}_{1n}ds +$$
$$+ \frac{1}{F_1}\oint_{L_1}\left[M_n + (2\rho_n)^{-1}M_s^1 - \frac{\partial M_{ns}^1}{\partial s}\right]\hat{\gamma}_{1n}ds + \frac{1}{F_1}\oint_{L_1}[M_s - \rho_n^{-1}M_{ns}^1 + \tag{2.2}$$
$$+ (2\rho_s)^{-1}M_n^1 + \ldots]\,\hat{\gamma}_{1s}ds + \frac{1}{F_1}\sum_p \oint_{L_1}[(M_n^p + \ldots)\,\hat{\varkappa}_n^{p-1} +$$
$$+ (M_s^p + \ldots)\,\hat{\varkappa}_s^{p-1} + (M_{ns}^p + \ldots)\,\hat{\varkappa}_{ns}^{p-1} + (M_{sn}^p + \ldots)\,\hat{\varkappa}_{sn}^{p-1}]\,ds$$

Здесь компоненты состояния, площадь F_1 и контур области L_1 соответствует второму масштабному уровню. Вывод уравнений равновесия и естественных краевых условий осуществляем с помощью обобщенного функционала для состояния на втором масштабном уровне, вид которого с точностью до обозначений согласуется с (1.9). Если структура среды и на 2-м уровне обладает гексагональной или тетрагональной симметрией, то уравнение для функции смещений на этом уровне согласуется с (1.11) при соответствующей замене параметров μ_n.

Для определенности рассмотрим состояние продольного сдвига и найдем эффективные характеристики двухуровневой пористой среды (фиг. 2), диаметры отверстий в которой находятся на различных масштабных уровнях и образуют гексагональную или тетрагональную упаковку на каждом уровне. Решение задачи строим с учетом двух первых моментов в (2.1) в асимптотическом приближении. Примеры и методы построения функции Φ для композиционных сред с учетом различной степени взаимодействия включений рассмотрены ранее [5]. Решения



Фиг. 3



Фиг. 4

уравнения Гельмгольца в цилиндрической системе координат r, θ $(x + iy = re^{i\theta})$ известны [6]. Для внутренней и внешней областей имеем соответственно

$$\psi_{ak} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{kn} e^{in\theta} J_n (r\sqrt{\varkappa_k}), \quad \psi_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{kn} e^{in\theta} K_n (r\sqrt{\varkappa_k}) \tag{2.3}$$

где $J_n (r\sqrt{\varkappa_k})$, $K_n (r\sqrt{\varkappa_k})$ — цилиндрические функции Макдональда, причем последние удовлетворяют условию (1.14). Первые два корня (1.4) при объемном содержании пор первого масштабного уровня $\zeta = 0{,}65$ будут вещественными

$$\varkappa_{1,2} = \mu_1 (2\mu_2)^{-1} [1 \pm (1 - 4\mu_2/\mu_1^2)^{1/2}]$$

Краевые условия в случае свободных от нагрузок контуров отверстий $r = a_1$ второго масштабного уровня (1.13) в цилиндрической системе координат будут

$$\partial\Phi/\partial r - \mu_1 (r^{-2}\partial/\partial r - r^{-3})\, \partial^2\Phi/\partial\theta^2 +$$
$$+\mu_2 [r^{-4}\partial^3/(\partial r\partial\theta^2) + 2r^{-3}\partial^2/\partial r^2 - 4r^{-4}\partial/\partial r + 4r^{-5}]\, \partial^2\Phi/\partial\theta^2 -$$
$$-\sum_j \left[\frac{1}{\varkappa_j r^2}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\varkappa_j r^3} - \mu_2 \left(\frac{1}{r^4}\frac{\partial^3}{\partial r\partial\theta^2} + \frac{2}{r^3}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4}{r^4}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r^5}\right)\right] \frac{\partial^2\psi_j}{\partial\theta^2} = 0$$
$$\mu_1 \partial^2\Phi/\partial r^2 + \mu_2 (5r^{-3}\partial/\partial r - 2r^{-2}\partial^2/\partial r^2 - 4r^{-4})\, \partial^2\Phi/\partial\theta^2 +$$
$$+\sum_j \left[\frac{1}{\varkappa_j}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \mu_2 \left(\frac{5}{r^3}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{4}{r^4}\right)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right] \psi_j = 0 \tag{2.4}$$
$$\partial^3\Phi/\partial r^3 + \sum \partial^3\psi_j/\partial r^3 = 0$$

Число произвольных постоянных в решении уравнения (1.11) и порядок производных в краевых условиях (2.4) в принятом приближении согласуются между собой. Концентрация усредненных тангенциальных напряжений на контурах второго масштабного уровня $r = a_1$ будет

$$T_{10} = -\tau_{12}\sin\theta\,\{1 + [\beta_1(\alpha_2-\gamma_2) - \beta_2(\alpha_1-\gamma_1)]\,[\beta_1(\alpha_2-\gamma_2) - \beta_2(\alpha_1-\gamma_1) + \theta_0 + \omega_1 K_1(x_2) - \omega_2 K_1(x_1)]^{-1} + \ldots\} \quad (2.5)$$

$$\beta_k = (x_k^2+3)\,[x_k K_1'(x_k) - K_1(x_k)], \quad \gamma_k = (x_k^{-1} + 7\lambda_2 x_k)\,K_1'(x_k)$$

$$\theta_0 = G\,[x_1^{-2} - x_2^{-2} + 2\lambda_2(x_1^2 - x_2^2)]\,K_1(x_1)\,K_1(x_2)$$

Здесь опущены члены, влияние которых возрастает при усилении взаимодействия между отверстиями

$$\omega_k = (2\lambda_1 + 12\lambda_2)\,\beta_k - G\gamma_k$$

$$\alpha_k = (1 + 7\lambda_2 + x_k^{-2} + 2\lambda_2 x_k^2)\,K_1(x_k)$$

$$x_k = a_1\sqrt{\varkappa_k}, \quad \lambda_k = \mu_k/a_1^{2k} \quad (k = 1, 2)$$

Модуль продольного сдвига двухуровневой пористой среды в принятом приближении будет равен

$$\widehat{G}_{12} = G_{12}\,[(1-\zeta_1)\,A + \theta_0 + \omega_1 K_1(x_2) - \omega_2 K_1(x_1)]\,\{(1+\zeta_1)\,A + \theta_0 + \omega_1 K_1(x_2) - \omega_2 K_1(x_1) + \zeta_1^{1/2}\,[(\omega_2 + 6\alpha_2)\,K_1(y_1) - (\omega_1 + 6\alpha_1)\,K_1(y_2)]\}^{-1}$$

$$A = \beta_1(\alpha_2 - \gamma_2) - \beta_2(\alpha_1 - \gamma_1), \quad y_k = R_1\sqrt{\varkappa_k}$$

где R_1 — радиус окружности, ограничивающей площадь усреднения состояния на втором уровне.

Анализ состояний двухуровневой среды указывает на определяющее значение параметра $\eta = (v_2/v_1)^{1/2} = a_1/R$, v_2 и v_1 — объем неоднородностей соответственно на втором и первом масштабных уровнях, R — радиус окружности, ограничивающей площадь усреднения состояний на первом масштабном уровне. Локальные напряжения около отверстий первого масштабного уровня определяются разложениями (1.3). При объемном содержании $\zeta > 0{,}6$ формула (1.6) заменяется уточненной [5]:

$$G_{12} = G\,(1+\nu_0)\,(1-\nu_0)^{-1}\,[1 + n^2(n-1)\,\nu_0^2\pi^{-n}\sin^n\alpha_n\,(1 - \zeta^{2n-4}\nu_0^2)\,(1-\nu_0^2)^{-1}]$$

$$\nu_0 = \zeta\,(1 - G/G_a)\,(1 + G/G_a)^{-1}$$

где $\alpha_4 = \pi/2$, $n = 4$ — для тетрагональной, $\alpha_6 = \pi/3$, $n \approx 6$ — для гексагональной упаковок, $G_a = 0$ для полостей. Точность формулы (1.8) повышается с ростом p благодаря снижению взаимодействия включений. Эффективные сдвиговые характеристики композита при градиентных нагрузках оцениваются отношением G_{12}^p/G_{12} (фиг. 3). Здесь сплошные кривые *1—4* соответствуют значениям $p =$ *1—4* и построены для пористой среды, штриховые — соответственно для композита с бесконечно-жесткими на сдвиг волокнами. Из поведения штриховых кривых видна малая эффективность данной схемы армирования при продольном градиентном сдвиге. При замене контура L окружностью в формуле (1.7), получаем приближенное значение параметра μ_p в явном виде

$$\mu_p \approx R^{2p}\,(G_{12}^p/G_{12})\,[p!\,(p+1)!\,]^{-1}$$

Для фиксированных R параметр μ_p быстро убывает с ростом показателя градиентов сдвига p и соответственно можно снизить число учитываемых членов в уравнении (1.11).

Корни характеристического уравнения (1.16) с ростом p уточняются, но могут пробегать вещественные и комплексные значения. В рассматриваемом примере только минимальный корень, имеющий наиболее важное значение в решении задачи, всегда вещественен. Остальные корни могут быть комплексносопряженными при $p = 3$ и становится вещественными при $p = 4$ и так далее. Результаты расчетов изменения концентрации касательных напряжений на контуре отверстия на втором масштабном уровне при сохранении первых членов в решении уравнения (1.11) представлены на фиг. 4 штриховой кривой. Моментные напряжения снижают максимальные напряжения на несколько процентов, и этот эффект зависит от масштабного параметра η. Этот результат в целом согласуется с выводами, полученными с помощью других моментных теорий [4], в которых эффективные упругие постоянные назначались произвольно и отсутствует учет фундаментального параметра η. Расчеты в принятом приближении зависимости поправок $\delta = \hat{G}_{12}/\overline{G}_{12}$ к эффективному модулю сдвига, рассматриваемой двухмасштабной пористой среды от параметра η представлены сплошной кривой на фиг. 4. Здесь $\overline{G}_{12}$ — модуль сдвига среды без учета влияния моментных напряжений. Видно усиление влияния градиентов поля с уменьшением η, нижняя граница которого устанавливается областью применимости метода усреднения полей. Поэтому повышение эффективного модуля с учетом моментных состояний не превышает 10%. Несмотря на неудачи экспериментального определения постоянных моментных состояний отмеченный эффект, в принципе, может быть подтвержден и экспериментально.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-00523-а)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cosserat E. F.* Theorie des corps deformables. Paris: A. Hermann et Fils, 1909. 500 c.
2. *Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В.* Основные уравнения теории упругости с вращательным взаимодействием частиц//ФТТ. 1960. Т. 2. Вып. 7. С. 1399—1409.
3. *Пальмов В. А.* Основные уравнения теории несимметричной упругости//ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 401—407.
4. *Эринген А. К.* Теория микрополярной упругости. В кн. Разрушение. Т. 2. М.: Мир, 1975. С. 646—751.
5. *Ванин Г. А.* Микромеханика композиционных материалов. Киев: Наук. думка, 1985. 302 с.
6. *Миллер У.* Симметрия и разделение переменных. М.: Мир, 1981. 342 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.III.1994