

УДК 531.383

© 1995 г. Е. А. АРТЮХОВ, В. З. ГУСИНСКИЙ

РОТОРЫ ГИРОСКОПОВ С ИНТЕГРАЛЬНО СФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Рассматривается обобщенная задача начальной асферизации роторов неконтактных (электростатических, магнитных) гироскопов для компенсации деформации от центробежных сил. Показано, что кроме традиционной асферизации в виде вытянутого эллипсоида, симметричного относительно оси вращения ротора [1], существует ряд других форм ротора и режимов его работы с нутацией, удовлетворяющих интегральной сферичности, при которой за оборот ротора осредняются уводящие моменты, обусловленные его несферичностью. Использование в гироскопах вращения ротора с углом нутации, близким к $\pi/2$ (режим «двойного вращения») позволяет практически исключить влияние моментов силы тяжести и нечетных гармоник формы [2], однако, как показано в [3], уход гироскопа в этом случае может быть больше, чем в традиционном режиме, из-за деформации ротора центробежными силами. Эта проблема решается на основе излагаемой теории интегральной асферизации при выполнении поверхности ротора в виде сплющенного эллипсоида.

1. Определение интегральной формы ротора. Введем декартову (x, y, z) и полярную (θ, φ) системы координат с началом O в центре сферы-ротора радиуса R , с осью вращения Oz . Интегральную (осредненную относительно оси вращения) поверхность ротора, описываемого функцией $r_1(\theta, \varphi)$, на интервале от φ_1 до φ_2 определим в виде

$$r_1(\theta) = \frac{1}{\varphi_2 - \varphi_1} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r_1(\theta, \varphi) d\varphi \quad (1.1)$$

Тогда условие интегральной сферичности за полный оборот ротора будет:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} r_1(\theta, \varphi) d\varphi = C_1 \quad (1.2)$$

где C_1 — постоянная величина.

2. Выражения поверхности эллипсоидального ротора. Сферические роторы гироскопов характеризуются весьма малыми (не более тысячной доли радиуса) искажениями их поверхности. Поэтому зададим форму осесимметричного эллипсоидального ротора в полярной системе координат α, β , связанной с ротором, в виде

$$r_2(\alpha) = r(1 + \Delta_1 \cos 2\alpha), \quad \Delta_1 = d_1/R \quad (2.1)$$

где d_1 — амплитуда второй гармоники формы ротора, вводимая при его изготовлении (начальная асферизация). Положительное значение d_1 соответствует вытянутому эллипсоиду, отрицательное — сплюсненному.

Найдем выражение поверхности этого ротора в координатах θ, φ , если ось симметрии асферизации ротора (2.1) расположена под углом ϑ к оси вращения ротора.

Пользуясь матричным уравнением

$$\begin{vmatrix} \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \\ \cos \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{vmatrix} \quad (2.2)$$

получим

$$r_3(\theta, \varphi) = R \{ 1 + \Delta_1 [\sin^2 \vartheta (1 - \cos 2\theta) (1 - \cos 2\varphi)/2 + \cos^2 \vartheta (1 + \cos 2\theta) + \sin 2\vartheta \sin 2\theta \sin \varphi - 1] \} \quad (2.3)$$

Форма вращающегося с угловой скоростью ω сферического ротора искажается центробежными силами в соответствии с выражением:

$$r_4(\theta) = R (1 - \Delta_2 \cos 2\theta + \Delta_3) \quad (2.4)$$

$$\Delta_2 = d_2/R, \quad \Delta_3 = d_3/R, \quad d_2 = (b - a)/2, \quad d_3 = (a + b)/2$$

где a, b — изменения радиуса ротора соответственно на полюсе и экваторе.

Например, для тонкостенной сферической оболочки [4]:

$$a_1 = -\gamma \omega^2 R_0^3 (1 + \mu)/E, \quad b_1 = \gamma \omega^2 R_0^3/E \quad (2.5)$$

где R_0 — средний радиус оболочки, γ, E, μ — соответственно плотность, модуль упругости и коэффициент Пуассона материала ротора.

Для сплошного ротора [5] имеем

$$a_2 = -\frac{2}{3} \frac{\gamma \omega^2 R^3}{E} (1 + \mu) \left[\frac{2 + \mu}{7 + 5\mu} - \frac{1 - 2\mu}{5(1 + \mu)} \right] \quad (2.6)$$

$$b_2 = -\frac{2}{3} \frac{\gamma \omega^2 R^3}{E} (1 + \mu) \left[\frac{2 + \mu}{2(7 + 5\mu)} + \frac{1 - 2\mu}{5(1 + \mu)} \right]$$

Ввиду малости значений d_1, d_2 и d_3 определим поверхность асферизованного ротора в рабочем состоянии как результат простой суперпозиции малых значений выражений (2.3) и (2.4):

$$r_1(\theta, \varphi) = r_3(\theta, \varphi) + r_4(\theta) - R = R \{ 1 + \Delta_1 [\sin^2 \vartheta (1 - \cos 2\theta) (1 - \cos 2\varphi)/2 + \cos^2 \vartheta (1 + \cos 2\theta) + \sin 2\vartheta \sin 2\theta \sin \varphi - 1] - \Delta_2 \cos 2\theta + \Delta_3 \} \quad (2.7)$$

3. Определение значений угла асферизации ϑ , удовлетворяющих интегральной сферичности ротора. В соответствии с (1.2), пользуясь полученным выражением, получим для ротора асферизованного (в виде эллипсоида) под углом ϑ к оси вращения и одновременно деформированного (в виде сплюсненного эллипсоида симметричного оси вращения) в рабочем состоянии центробежными силами

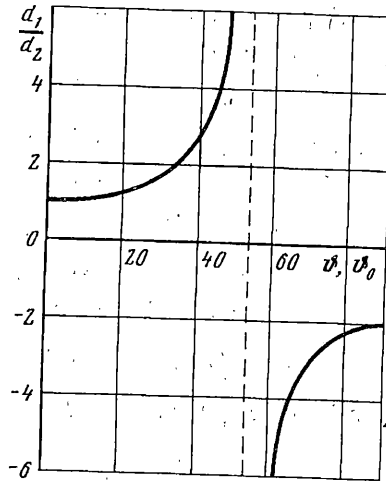
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r_1(\theta, \varphi) d\varphi = R \left\{ 1 + \Delta_3 - \frac{1}{4} (1 - \cos 2\vartheta) + \cos 2\theta \left[\frac{\Delta_1}{4} (1 + 3 \cos 2\vartheta) - \Delta_2 \right] \right\} \quad (3.1)$$

Из выражения (3.1) следует, что условие (1.2) интегральной сферичности ротора будет выполняться, если

$$\Delta_1 (1 + 3 \cos 2\vartheta)/4 - \Delta_2 = 0 \quad (3.2)$$

При этом $c_1 = R[1 + \Delta_3 - (1 - \cos 2\vartheta_1)/4]$, где ϑ_1 — значение угла ϑ , удовлетворяющее уравнению (3.2).

Из уравнения (3.2) следует, что амплитуда d_1 второй гармоники асферизации



ротора при заданной амплитуде d_2 второй гармоники, соответствующей деформации ротора центробежными силами, будет:

$$d_1 = 4d_2 / (1 + 3 \cos 2\vartheta) \quad (3.3)$$

Зависимость d_1/d_2 от угла ϑ показана на фигуре. Кривая 1 соответствует вытянутому эллипсоиду асферизации, а кривая 2 — сплюсненному. Обе кривые приближаются к вертикальной асимптоте: $\vartheta_k = [\arccos(-1/3)]/2 \approx 54,7^\circ$.

Традиционной асферизации ротора [1] соответствует значение $\vartheta = 0$ (ось вращения ротора совпадает с осью симметрии вытянутого эллипсоида асферизации, $d_1 = d_2$, форма ротора в рабочем состоянии идеально сферична). При $\vartheta > 0$ (за исключением некоторой зоны в области ϑ_k) всегда можно практически получить интегральную сферичность выполняя соотношение (3.3). Характерному значению $\vartheta = \pi/2$ соответствует сплюсненный эллипсоид асферизации, ось симметрии которого перпендикулярна к оси вращения ротора, амплитуда второй гармоники асферизации в два раза превышает амплитуду второй гармоники формы ротора, деформированного центробежными силами.

4. Моментное взаимодействие интегрально сферичного ротора с силовым полем подвеса. С учетом (3.2) выражение (2.7) соответствует поверхности интегрально сферичного ротора:

$$r_2(\theta, \varphi) = R \{ 1 + \Delta_3 - \Delta_1 [\sin^2 \vartheta/2 + \sin^2 \vartheta (1 - \cos 2\theta) \cos 2\varphi/2 - \sin 2\vartheta \sin 2\theta \sin \varphi] \} \quad (4.1)$$

Введем вращение ротора с угловой частотой ω относительно полярной оси в новой системе координат θ_1, φ_1 , для чего преобразуем выражение (4.1) в соответствии с матричным уравнением:

$$\begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta_1 \cos \varphi_1 \\ \sin \theta_1 \sin \varphi_1 \\ \cos \theta_1 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

В результате будем иметь

$$r_2(\theta_1, \varphi_1) = R \{ 1 + \Delta_3 - \Delta_1 \{ \sin^2 \vartheta/2 + \sin^2 \vartheta [\sin(2\omega t) \sin^2 \theta_1 \cos 2\varphi_1 + \cos(2\omega t) \sin^3 \theta_1 \sin 2\varphi_1] - \sin 2\vartheta [\sin(\omega t) \sin 2\theta_1 \cos \varphi_1 + \cos(\omega t) \sin 2\theta_1 \sin \varphi_1] \} \} \quad (4.3)$$

Свяжем с системой поддерживающих ротор силовых элементов (электродов, электромагнитов) неконтактного подвеса декартову (x_2, y_2, z_2) и полярную (θ_2, φ_2) системы координат. Тогда поворот оси вращения ротора на угол ρ относительно, например, оси Oy_3 , будет соответствовать уравнению:

$$\begin{vmatrix} \sin \theta_1 \cos \varphi_1 \\ \sin \theta_1 \sin \varphi_1 \\ \cos \theta_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \rho & 0 & \sin \rho \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \rho & 0 & \cos \rho \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sin \theta_2 \cos \varphi_2 \\ \sin \theta_2 \sin \varphi_2 \\ \cos \theta_2 \end{vmatrix} \quad (4.4)$$

и выражение для поверхности ротора в системе координат θ_2, φ_2 будет

$$\begin{aligned} r_2(\theta_2, \varphi_2) = & R \{ 1 + \Delta_3 - \Delta_1 \{ \sin^2 \vartheta / 2 + \sin^2 \vartheta \sin(2\omega t) [\cos^2 \rho \sin^2 \theta_2 \cos^2 \varphi_2 + \\ & + \sin^2 \rho \cos^2 \theta_2 + \sin 2\rho \sin 2\theta_2 \cos \varphi_2 / 2 - \sin^2 \theta_2 \sin^2 \varphi_2] + \\ & + \sin^2 \vartheta \cos(2\omega t) [\cos \rho \sin^2 \theta_2 \sin 2\varphi_2 + \sin \rho \sin 2\theta_2 \sin \varphi_2] + \\ & + \sin 2\vartheta \sin(\omega t) [\sin 2\rho \sin^2 \theta_2 \cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \rho \sin 2\theta_2 \cos \varphi_2 - \\ & - \cos^2 \rho \sin 2\theta_2 \cos \varphi_2 - \sin 2\rho \cos^2 \theta_2] - \sin 2\vartheta \cos(\omega t) [\sin \rho \sin^2 \theta_2 \sin 2\varphi_2 + \\ & + \cos \rho \cos 2\theta_2 \sin \varphi_2] \} \} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Для зоны действия силового поля в виде сферической поверхности шарового сектора с координатами $\theta_{21} = 0, \theta_{22} = \theta_0 \leq \pi/4, \varphi_{21} = 0, \varphi_{22} = 2\pi$ усредненные быстрым вращением с угловой скоростью ω составляющие консервативного момента, действующего на ротор, в первом приближении (без учета неравномерности зазора между ротором и силовым элементом) будут

$$M_{x_2} = \frac{F}{2\pi} \int_{\omega t=0}^{2\pi} \int_0^{\theta_0} \int_0^{2\pi} (l_0 \sin \theta_2 \sin \varphi_2 + l_\varphi \cos \theta_2 \cos \varphi_2) d\theta_2 d\varphi_2 d\omega t$$

$$M_{y_2} = \frac{F}{2\pi} \int_{\omega t=0}^{2\pi} \int_0^{\theta_0} \int_0^{2\pi} (-l_0 \sin \theta_2 \cos \varphi_2 + l_\varphi \cos \theta_2 \sin \varphi_2) d\theta_2 d\varphi_2 d\omega t$$

$$M_{z_2} = \frac{F}{2\pi} \int_{\omega t=0}^{2\pi} \int_0^{\theta_0} \int_0^{2\pi} (-l_\varphi \sin \theta_2) d\theta_2 d\varphi_2 d\omega t$$

$$l_0 = \partial r_2(\theta_2, \varphi_2) / \partial \theta_2, \quad l_\varphi = \partial r_2(\theta_2, \varphi_2) / \partial \varphi_2$$

для электрического поля $F = U^2 C_0 / 2\delta_0$, U — напряжение между электродом и ротором, C_0 — емкость «электрод-ротор», δ_0 — номинальный зазор между электродом и ротором, для магнитного поля $F = I^2 L_0 / 2\delta_0$, I — ток электромагнита, L_0 — индуктивность электромагнита.

Вычисление выражений (4.6) с учетом (4.5) приводит к результату: $M_{x_2} = M_{y_2} = M_{z_2} = 0$, т. е. в первом приближении среднее за период оборота ротора значение момента, приложенного к асферизованному ротору, от силового поля для всех практически осуществимых значений угла ϑ равно нулю.

5. Интегральная сферичность осесимметрично асферизованного ротора в режиме нутации. Если ось симметрии поверхности асферизованного в виде эллипсоида ротора совпадает с осью максимального момента инерции (сплюснутый эллипсоид инерции) или с осью минимального момента инерции (вытянутый эллипсоид инерции), то такой ротор будем называть осесимметрично асферизованным. Рассмотрение интегральной сферичности этого ротора при вращении с углом нутации, отличным от нуля, приводит к рассмотренной выше математической модели (для несимметрично асферизованного ротора в традиционном режиме работы без нутации), если заменить значение угла асферизации ϑ на угол нутации ϑ_0 . Известно [2], что вращение ротора с углом нутации, близким

к $\vartheta_0 = \pi/2$ (режим «двойного вращения») позволяет практически исключить влияние моментов силы тяжести и нечетных гармоник формы ротора. Однако, как показано в [3], уход гироскопа в этом случае может быть больше по сравнению с традиционным режимом ($\vartheta_0 = 0$) из-за деформации сферической поверхности ротора центробежными силами. Проблема компенсации такого ухода гироскопа решается применением интегрально сферичного ротора. Из формулы (3.3) следует, что при $\vartheta = \vartheta_0 = \pi/2$ ротор должен быть асферизован в виде поверхности сплющенного эллипсоида с амплитудой второй гармоники (половиной разности полуосей эллипсоида), равной удвоенному значению амплитуды второй гармоники при деформации ротора центробежными силами, т. е. $d_1 = -2d_2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малеев П. И. Новые типы гироскопов. Л.; Судостроение, 1971. 160 с.
2. Денисов Г. Г., Урман Ю. М. Прецессионные движения твердого тела под действием моментов, имеющих силовую функцию//Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 6. С. 5—14.
3. Мартыненко Ю. Г., Омаров А. Ж., Подалков В. В. Движение упругой сферической оболочки в неконтактном подвесе//Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 4. С. 25—30.
4. Чершина В. С. Статика тонкостенных оболочек вращения. М.: Наука, 1968. 455 с.
5. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
18.XII.1992