

УДК 539.375

© 1995 г. С. А. НАЗАРОВ, О. Р. ПОЛЯКОВА

ВЕСОВЫЕ ФУНКЦИИ И ИНВАРИАНТНЫЕ
 ИНТЕГРАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Вводятся инвариантные интегралы, содержащие производные высших порядков и позволяющие вычислять коэффициенты при младших сингулярностях в вершинах трещины. Эти интегралы связываются с весовыми функциями (решениями однородной упругой задачи, имеющими сильные особенности). Находятся полные асимптотические разложения решения задачи о подросшей трещине и соответствующих коэффициентов интенсивности напряжений. Обсуждаются возможности применения инвариантных интегралов.

1. Инвариантные интегралы Черепанова — Райса. Пусть плоское тело Ω содержит трещину-отрезок $M = \{x \in R^2: -a_- \leq x_1 \leq a_+, x_2 = 0\}$ длиной $2a = a_+ + a_-$ и является однородным и изотропным (с константами Ламе λ и μ) в некоторой окрестности V этого отрезка. Будем считать, что берега трещины свободны от напряжений, массовые силы отсутствуют, а деформация тела осуществляется нагрузкой $p = (p_1, p_2)$, приложенной к внешней границе $\Gamma = \partial\Omega \setminus M$. Вблизи вершин соответствующее поле смещений $u = (u_1, u_2)$ допускает разложение

$$u(x) = c^\pm + r_\pm^{1/2} (K_1^\pm \Phi^1(\varphi_\pm) + K_2^\pm \Phi^2(\varphi_\pm)) + O(r_\pm), r_\pm \rightarrow 0 \quad (1.1)$$

Здесь c^\pm — постоянные векторы, K_j^\pm — коэффициенты интенсивности напряжений (КИН), (r_\pm, φ_\pm) — полярные координаты с центром в вершине $P^\pm = (\pm a_\pm, 0)$ трещины $|\varphi_\pm| < \pi$:

$$\begin{aligned} (\Phi_r^1(\varphi), \Phi_\varphi^1(\varphi)) &= (4\mu)^{-1} (2\pi)^{-1/2} ([2\kappa - 1] \cos 1/2 \varphi - \cos 3/2 \varphi, \sin 3/2 \varphi - \\ &- [2\kappa + 1] \sin 1/2 \varphi), (\Phi_r^2(\varphi), \Phi_\varphi^2(\varphi)) = (4\mu)^{-1} (2\pi)^{-1/2} (3 \sin 3/2 \varphi - \\ &- [2\kappa - 1] \sin 1/2 \varphi, 3 \cos 3/2 \varphi - [2\kappa + 1] \cos 1/2 \varphi), \kappa = (\lambda + 3\mu) (\lambda + \mu)^{-1} \end{aligned} \quad (1.2)$$

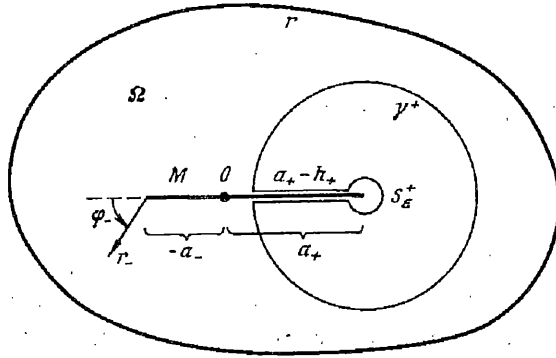
Известны и широко применяются два метода вычислений КИН; первый основан на использовании не зависящих от пути интегралов (см. [1, 2] и др.), а второй связан с применением, так называемых, весовых функций.

Интеграл Черепанова — Райса имеет вид

$$J_1(u; \gamma) = \int_\gamma (W(u, u) dx_2 - \sigma^{(n)}(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} ds) \quad (1.3)$$

где γ — дуга, целиком лежащая в области V , $\sigma^{(n)} = \sigma n$, σ — тензор напряжений, n — единичный вектор нормали к γ , W — удельная плотность упругой энергии. Как известно [1, 2], $J_1(u; \gamma) = 0$ для замкнутого контура, не охватывающего трещину, и потому, с учетом краевых условий на берегах M :

$$J_1(u; \gamma^\pm) = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} J_1(u; S_\epsilon^\pm) = 1/2\alpha \{(K_1^\pm)^2 + (K_2^\pm)^2\} \quad (1.4)$$



Фиг. 1

При этом $\alpha = (4\mu)^{-1} (1 + \kappa)$; γ^\pm и S_G^\pm — дуги, указанные на фиг. 1, а при вычислении интеграла по меньшей из них используются соотношения (1.1). Здесь и далее положительное направление на замкнутом контуре — против часовой стрелки, а нормаль n — внешняя по отношению к области, ограниченной контуром. Кроме того, направление наследуется при разбиении контура на дуги — этим объясняется появление в (1.4) минуса перед знаком \lim .

2. Весовые функции. Асимптотическая формула (1.1) допускает уточнение — полное асимптотическое разложение вектора смещений имеет вид

$$u(x) = \sum_{m=0}^N r_{\pm}^{1/2} (K_{m1}^{\pm} \Phi^{m1}(\varphi_{\pm}) + K_{m2}^{\pm} \Phi^{m2}(\varphi_{\pm})) + O(r_{\pm}^{(1+N)/2}) \quad (2.1)$$

Здесь используются новые обозначения K_{11}^{\pm} и K_{12}^{\pm} для КИН из (1.1). Обсудим остальные слагаемые справа в (2.1). Пусть $X^{mj}(x)$ — вектор $r^{m/2} \Phi^{mj}(\varphi)$, записанный в декартовых координатах. Если m — четное число, то компоненты вектора $X^{mj}(x)$ оказываются полиномами степени $m/2$ (вид этих полиномов не понадобится). Далее рассмотрим младшие сингулярные слагаемые в представлении (2.1), отвечающие нечетным $m > 1$. Соответствующие угловые части имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi_r^{m1}(\varphi) &= (2\pi)^{-1/2} (4\mu m)^{-1} \{ (m-2) \cos 1/2(m+2)\varphi + (2\kappa - m) \cos 1/2(2-m)\varphi \} \\ \Phi_\varphi^{m1}(\varphi) &= (2\pi)^{-1/2} (4\mu m)^{-1} \{ (-m+2) \sin 1/2(m+2)\varphi - (2\kappa + m) \sin 1/2(2-m)\varphi \} \\ \Phi_r^{m2}(\varphi) &= (2\pi)^{-1/2} (4\mu m)^{-1} \{ (m+2) \sin 1/2(m+2)\varphi - (2\kappa - m) \sin 1/2(2-m)\varphi \} \\ \Phi_\varphi^{m2}(\varphi) &= (2\pi)^{-1/2} (4\mu m)^{-1} \{ (m+2) \cos 1/2(m+2)\varphi - (2\kappa + m) \cos 1/2(2-m)\varphi \} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Нормирующие множители в (2.2), выбраны так, что на продолжении трещины выполняются соотношения

$$\sigma_{j2}(u; x_1, 0) = (2\pi)^{-1/2} \sum_{m=1}^N r_{\pm}^{-1+m/2} K_{m,3-j}^{\pm} + O(r_{\pm}^{N/2}), \quad r_{\pm} \rightarrow 0 \quad (2.3)$$

В методе [3, 4] под весовой функцией подразумевается решение однородной (с нулевой нагрузкой) упругой задачи, обладающее бесконечной энергией вследствие сильной сингулярности в одной из вершин трещины

$$\zeta_{\pm}^{mj}(x) = r_{\pm}^{-m/2} \Psi^{mj}(\varphi_{\pm}) + O(1), \quad r_{\pm} \rightarrow 0; \quad \zeta_{\mp}^{mj} = O(1), \quad r_{\mp} \rightarrow 0 \quad (2.4)$$

Обсудим возникающие сингулярные поля в случае нечетного m ; вектор $r^{-m/2} \Psi^{mj}(\varphi)$, записанный в декартовых координатах, обозначим $Y^{mj}(x)$. Каждое

из полей Y^{mj} (как и поля X^{mj} , фигурирующие в (2.1)) удовлетворяет однородной задаче в угле $K = \{x: |\varphi| < \pi\}$:

$$L(\nabla)U = 0 \text{ в } K, \quad \sigma^{(n)}(U) = 0 \text{ на } \partial K \quad (2.5)$$

где L — оператор системы Ламе. Для нормировки решений X^{mj} использованы соотношения (2.3). Нормирующий множитель для Ψ^{mj} выбирается так, чтобы выполнялись равенства

$$K_{mj}^{\pm} = \int_{\Gamma} p(x) \zeta_{\pm}^{mj}(x) ds \quad (2.6)$$

Согласно [3, 4] соотношения (2.6) получаются подстановкой решений u и ζ_{\pm}^{mj} в формулу Бетти. При этом интегралы по берегам трещины аннулируются благодаря краевым условиям, интеграл по Γ оказывается в правой части (2.6), а интегралы по окружностям S_{ε}^{\pm} в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ дают левую часть (2.6) в том случае, если выполнены условия нормировки

$$q(X^{mj}, Y^{nk}; S_{\varepsilon}) = \delta_{m,n} \delta_{j,k} \quad (2.7)$$

В равенстве (2.7) $\delta_{j,k}$ — символ Кронекера, $S_{\varepsilon} = \{x: r = \varepsilon\}$:

$$q(u, v; \gamma) = \int_{\gamma} \{\sigma^{(n)}(u) \cdot v - \sigma^{(n)}(v) \cdot u\} ds \quad (2.8)$$

Для того чтобы удовлетворить равенствам (2.7) можно воспользоваться двумя фактами. Во-первых, векторы (2.2) связаны соотношением

$$\partial_1 X^{m+2,j}(x) = 1/2 m X^{m,j}(x) \quad (2.9)$$

Здесь и далее $\partial_k = \partial/\partial x_k$. Во-вторых, для произвольных полей $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$, удовлетворяющих задаче (2.5), справедлива (см. [5]) формула

$$q(\partial_1 U^{(1)}, U^{(2)}; S_{\varepsilon}) = -q(U^{(1)}, \partial_1 U^{(2)}; S_{\varepsilon}) \quad (2.10)$$

Выражение (2.10) не зависит от ε . Из (2.9) и (2.10) вытекает

$$\partial_1 Y^{m,j}(x) = -1/2 m Y^{m+2,j}(x) \quad (2.11)$$

Таким образом, достаточно sobлюсти условия (2.7) при $m = n = 1$. Поскольку нормированные угловые части Ψ^{lj} известны (см., например, [6]), то окончательно

$$\Psi_r^{m1}(\varphi) = (8\pi)^{-1/2} (1 + \kappa)^{-1} \{(m+2) \cos 1/2(2-m)\varphi - (2\kappa+m) \cos 1/2(2+m)\varphi\}$$

$$\Psi_{\varphi}^{m1}(\varphi) = (8\pi)^{-1/2} (1 + \kappa)^{-1} \{-(m+2) \sin 1/2(2-m)\varphi + (2\kappa-m) \sin 1/2(2+m)\varphi\}$$

$$\Psi_r^{m2}(\varphi) = (8\pi)^{-1/2} (1 + \kappa)^{-1} \{(m-2) \sin 1/2(2-m)\varphi + (2\kappa+m) \sin 1/2(2+m)\varphi\}$$

$$\Psi_{\varphi}^{m2}(\varphi) = (8\pi)^{-1/2} (1 + \kappa)^{-1} \{(m-2) \cos 1/2(2-m)\varphi + (2\kappa+m) \cos 1/2(2+m)\varphi\}$$

3. Инвариантные интегралы. Заметим, что в обоих методах появление КИН в формулах (1.4) и (2.6) связано с интегрированием по малой дуге S_{ε} . Общие черты двух подходов можно проследить с помощью следующих соображений: интеграл $J_1(u; S_{\varepsilon})$ совпадает с интегралом

$$I_1(u; S_{\varepsilon}) = -1/2 q(u, \partial_1 u; S_{\varepsilon}) \quad (3.1)$$

и имеет место равенство

$$\partial_1 X^{lj}(x) = -\alpha Y^{lj}(x) \quad (3.2)$$

Как следует из (3.2) и (2.4), вектор $\partial_1 u$ отличается от линейной комбинации $\alpha(K_{11}^{+} \zeta_{+}^{11} + K_{12}^{+} \zeta_{+}^{12})$ весовых функций лишь регулярными (обладающими конечной

энергией) составляющими. Последний факт вместе с (3.1) приводит к справедливости соотношения (1.4) для интеграла I_1 .

Вопрос об инвариантности интеграла (3.1) решается просто. Если $Lu = 0$ в области G , ограниченной замкнутым контуром Γ , то по формуле Бетти

$$I_1(u; \Gamma) = -1/2 \int_G (Lu \cdot \partial_1 u - u \cdot L \partial_1 u) dx \quad (3.3)$$

Вектор $\partial_1 u$ также удовлетворяет однородной системе Ламе (операторы $\partial/\partial x_1$ и L коммутируют) и, значит, выражение (3.3) равно нулю. Подобным свойством коммутации обладают еще два оператора $\partial/\partial x_2$, $\partial/\partial \varphi$, и, кроме того, $L(r\partial/\partial ru) = (2 + r\partial/\partial r) Lu$ — так получаются еще три инвариантных интеграла

$$I_2(u; \Gamma) = -1/2 q(u, \partial_2 u; \Gamma) \quad (3.4)$$

$$I_\varphi(u; \Gamma) = 1/2 q(u, x_1 \partial_2 u - x_2 \partial_1 u + (u_2, -u_1); \Gamma) \quad (3.5)$$

$$I_r(u; \Gamma) = 1/2 q(u, x_1 \partial_1 u + x_2 \partial_2 u; \Gamma) \quad (3.6)$$

Обращаем внимание на то, что в (3.5), (3.6) использована декартова запись операторов $\partial/\partial \varphi$ и $r\partial/\partial r$, которые выше применялись к полярным компонентам векторов. Соответствие I_1 и J_1 распространяется также и на интегралы (3.4) — (3.6), которые совпадают с интегралами J_2 , $L \equiv J_\varphi$, и $M \equiv J_r$, введенными в [7, 8].

4. Инвариантные интегралы высших порядков. Так как производные $\partial^k u$ удовлетворяют однородной системе Ламе, то можно ввести инвариантные интегралы вида

$$-1/2 q(\partial^l_1 u, \partial^h_1 u; \gamma) \quad (4.1)$$

Преобразуем выражение (4.1). Пусть γ — замкнутый контур, ограничивающий область g и $Lu = 0$ в его окрестности (подчеркнем, что не обязательно $Lu = 0$ всюду в области g). Обозначим через $\chi \in C^\infty(g)$ срезающую функцию, равную единице на γ и нулю на малом расстоянии от γ . Как и ранее, в силу формулы Бетти имеем

$$q(\partial^l_1 u, \partial^h_1 u; \gamma) = \int_g \{L(\partial^l_1(\chi u)) \cdot \partial^h_1(\chi u) - \partial^l_1(\chi u) \cdot L(\partial^h_1(\chi u))\} dx$$

Рассмотрим случай $l + h = 2p$. Носитель вектор-функции $L(\partial^l_1(\chi u))$ содержится в g и, следовательно, перебрасывая производные $l - p$ раз, находим

$$q(\partial^l_1 u, \partial^h_1 u; \gamma) = (-1)^{l-p} \int_g \{L(\partial^p_1(\chi u)) \cdot \partial^p_1(\chi u) - \partial^p_1(\chi u) \cdot L(\partial^p_1(\chi u))\} dx = 0 \quad (4.2)$$

Если же $l + h = 2p + 1$ — нечетное число, то

$$(-1)^{l-p} q(\partial^l_1 u, \partial^h_1 u; \gamma) = \int_g \{L(\partial^p_1(\chi u)) \cdot \partial^{p+1}_1(\chi u) - \partial^{p+1}_1(\chi u) \cdot L(\partial^p_1(\chi u))\} dx = \quad (4.3)$$

$$= \int_\gamma \{\sigma^{(n)}(\partial^p_1 u) \cdot \partial^{p+1}_1 u - \sigma^{(n)}(\partial^{p+1}_1 u) \cdot \partial^p_1 u\} ds \equiv -2I_1(\partial^p_1 u; \gamma)$$

Интеграл $I_1(\partial^p_1 u; \gamma)$ будем называть инвариантным интегралом порядка p , обозначая его $I_1^{(p)}(u; \gamma)$. Интегрированием по частям доказывается совпадение интегралов $I_1^{(p)}(u; \gamma)$ и $J_1(\partial^p_1 u; \gamma)$:

$$\begin{aligned} I_1^{(p)}(u; \gamma) &= -1/2 \int_g \{L(\partial^p_1(\chi u)) \cdot \partial^{p+1}_1(\chi u) - \partial^{p+1}_1(\chi u) \cdot L(\partial^p_1(\chi u))\} dx = \\ &= - \int_g L(\partial^p_1(\chi u)) \cdot \partial^{p+1}_1(\chi u) dx = 2 \int_g W(\partial^p_1(\chi u), \partial^{p+1}_1(\chi u)) dx - \int_\gamma \sigma^{(n)}(\partial^p_1 u) \partial^{p+1}_1 u ds = \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$= \int_\gamma (W(\partial^p_1 u, \partial^{p+1}_1 u) dx_2 - \sigma^{(n)}(\partial^p_1 u) \cdot \partial^{p+1}_1 u ds) = J_1(\partial^p_1 u; \gamma)$$

Заметим, что для функции U , удовлетворяющей однородным уравнениям (2.5) в окрестности точки $x = 0$, справедливы равенства

$$q(\partial^l U, \partial^h U; S_\varepsilon) = 0 \text{ при } l + h = 2p \quad (4.5)$$

$$(-1)^{l-p+1} 1/2 q(\partial^l U, \partial^h U; S_\varepsilon) = I_1^{(p)}(U; S_\varepsilon) = J_1(\partial^p U; S_\varepsilon) \text{ при } l + h = 2p + 1$$

В отличие от формул (4.2) — (4.4) интегрирование производится вдоль малой дуги. Соотношение (4.5) получается при помощи тех же выкладок, что и (4.2) — (4.4) с учетом дополнительных интегралов по берегам луча $\{x: x_1 \leq 0, x_2 = 0\}$, в которых возможна переброска производной $\partial/\partial x_1$. Подчеркнем, что при $p = 0$ из (4.5) и (4.3) вытекает упоминавшаяся эквивалентность интегралов (1.3) и (3.1). Вычислим интеграл $I_1^{(p)}(u; S_\varepsilon^\pm)$ для решения исходной задачи. В силу (2.1), (2.9), (3.2), (2.11):

$$I_1^{(p)}(u; S_\varepsilon^\pm) = -1/2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{j,k=1}^2 \sum_{m+n \leq 4p+2} K_{mj}^\pm K_{nk}^\pm q(\partial_1^p X^{mj}, \partial_1^{p+1} X^{nk}; S_\varepsilon^\pm) \quad (4.6)$$

По определению X^{mj} подынтегральное выражение есть $O(r^\kappa)$, $\kappa = 1/2(m+n) - 2p - 2$, поэтому ненулевой вклад в предел (4.6) дают лишь те слагаемые, для которых $n+m = 4p+2$ (при $n+m < 4p+2$ соответствующий интеграл $q(\cdot; S_\varepsilon^\pm)$ аннулируется, поскольку левая часть (4.6) конечна — $I_1^{(p)}$ не зависит от пути интегрирования). Кроме того, согласно (2.7) в нуль обращаются слагаемые, для которых $j \neq k$. С учетом (2.9) член ряда (4.6), отвечающий $n = m = 2p + 1$, имеет вид

$$\alpha 2^{-1-2p} [(2p-1)!!]^2 \sum_{j=1}^2 (K_{2p+1,j}^\pm)^2$$

Если $n \neq 2p + 1$, то объединим в (4.6) соответственно слагаемые, полагая $n = 4p + 2 - m$: $-1/2 K_{mj}^\pm K_{nj}^\pm \{q(\partial_1^p X^{mj}, \partial_1^{p+1} X^{nj}; S_\varepsilon^\pm) + q(\partial_1^p X^{nj}, \partial_1^{p+1} X^{mj}; S_\varepsilon^\pm)\}$. В силу (2.10) выражение из фигурных скобок равно $2q(\partial_1^p X^{mj}, \partial_1^{p+1} X^{nj}; S_\varepsilon^\pm)$.

Из (2.9), (2.11) вытекают формулы

$$\partial_1^p X^{mj}(x) = ([m-2(p+1)]!!)^{-1} ([m-2]!!) 2^{-p} X^{m-2p,j}(x), \quad m-2p \geq 1$$

$$\partial_1^p Y^{lj}(x) = (-1)^p \cdot ([2p-1]!!) 2^{-p} Y^{2p+1,j}(x) \quad (4.7)$$

Окончательно находим

$$I_1^{(p)}(u; S_\varepsilon^\pm) = 2^{-2p} \alpha \sum_{j=1}^2 \{1/2 ([2p-1]!!)^2 (K_{2p+1,j}^\pm)^2 + \sum_{m=1}^{2p-1} (-1)^{p-1/2(m-1)} ([m-2]!!) ([4p-m]!!) K_{mj}^\pm K_{4p+2-m,j}^\pm\} \quad (4.8)$$

Здесь и далее символ Σ' означает, что суммирование производится лишь по нечетным значениям индекса.

При $p = 0$ формула (4.8) принимает уже знакомый вид (1.4). Пусть $p = 1$; тогда

$$I_1^{(1)}(u; S_\varepsilon^\pm) = \frac{1}{8} \alpha \sum_{j=1}^2 \{(K_{3j}^\pm)^2 - 6K_{1j}^\pm K_{5j}^\pm\} \quad (4.9)$$

В случае трещины нормального отрыва, т. е. при $K_{m2} = 0$, соотношение (1.4) доставляет КИН K_{11}^\pm . Как кажется на первый взгляд, применение (4.9) не приводит к какому-либо результату из-за присутствия двух неизвестных величин K_{31}^\pm и K_{51}^\pm . Однако коэффициент K_{31}^\pm определяется, если в (4.9) положить

$K_{11}^{\pm} = 0$. Выполнения такого условия можно добиться искусственно. Для этого достаточно рассмотреть в окрестности вершины трещины поле $u(x) = K_{11}^{\pm} X^1(x)$ и получить, что $I_1^{(1)}(u - K_{11}^{\pm} X^1; S_{\varepsilon}^{\pm}) = 1/8 \alpha (K_{31}^{\pm})^2$.

5. Асимптотика КИН при удлинении трещины. Известно, что интеграл Черепанова — Райса вычисляет скорость высвобождения энергии при квазистатическом росте трещины. В этом разделе строятся полные асимптотические ряды для потенциальной энергии и коэффициентов K_{mj} из разложения (2.1), отвечающих решению задачи о трещине, подросшей на малую величину h . Асимптотические формулы такого типа полезны при прогнозировании развития трещины (например, при исследовании локальной устойчивости роста) или в вычислительных алгоритмах при тарировке КИН (в зависимости от длины трещины).

Пусть Ω_h — тело с трещиной $M_R = \{x \in \mathbb{R}^2: -a \leq x_1 \leq a + h, x_2 = 0\}$, где $0 < h$ — малый параметр. Обозначим через $K_{mj}^{\pm}(h)$ коэффициенты представления (2.1) решения $u(h, x)$ задачи в области Ω_h при той же нагрузке p . Для того чтобы отыскать асимптотику величины $K_{mj}^{\pm}(h)$ при $h \rightarrow 0$, построим (действуя аналогично [9, 10] и интерпретируя Ω_h как сингулярное возмущение исходной области Ω) внутреннее и внешнее разложения решения $u(h, x)$:

$$u(h, x) \sim u^0(x) + hu^1(x) + h^2u^2(x) + \dots \quad (5.1)$$

$$u(h, x) \sim h^{1/2}w^1(\xi) + h^{3/2}w^2(\xi) + \dots \quad (5.2)$$

Коэффициенты внутреннего разложения записаны в «быстрых» переменных $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, где $\xi_1 = h^{-1}(x_1 - a_+)$, $\xi_2 = h^{-1}x_2$. Можно проверить, что отвечающие четным m полиномы из правой части (2.1) не вносят вклада как в асимптотику КИН, так и в асимптотику энергии (см. ниже пояснения к соотношениям (5.8), (5.9)). Поэтому для сокращения формул исключим полиномы из рассмотрения и не будем писать их в разложениях весовых функций ζ_+^{mj} и поля u^0 .

Построения членов рядов (5.1), (5.2) проводится по инструкции. Ясно, что u^0 — решение задачи в невозмущенной области Ω , допускающее разложение (2.1). Остальные члены внешнего разложения суть линейные комбинации весовых функций ζ_+^{mj} .

$$u^q(x) = \sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^q A_{mj}^q \zeta_+^{mj}(x) \quad (5.3)$$

Внутреннее разложение описывается решениями задачи теории упругости на плоскости с вырезанным лучом $\Xi = \{\xi: \xi_1 \leq 1, \xi_2 = 0\}$. Введем полярные координаты (ρ_1, φ_1) с центром в точке $\xi = (1, 0)$, так чтобы $\rho_1^2 = (\xi_1 - 1)^2 + \xi_2^2$, $|\varphi_1| < \pi$. Слагаемые из (5.2) будем искать в виде

$$w^q(\xi) = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=1}^q B_{nj}^q \rho_1^{n/2} \Phi^{nj}(\varphi_1) \quad (5.4)$$

Неизвестные множители A_{mj}^q и B_{nj}^q в линейных комбинациях (5.3), (5.4) определяются при сращивании внутреннего и внешнего разложений (см. [11] и др.). Для сращивания необходимо уточнить формулу (2.4):

$$\zeta_+^{mj}(x) = r_+^{m/2} \Psi^{mj}(\varphi_+) + \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^N c_{n,i}^{m,j} r_+^{n/2} \Phi^{ni}(\varphi_+) + O(r_+^{(N+2)/2}) \quad (5.5)$$

Константы $c_{n,i}^{m,j}$ из (5.5) зависят от области Ω и удовлетворяют соотношениям

$$c_{n,i}^{m,j} = c_{m,i}^{n,i} \quad (5.6)$$

Равенства (5.6) вытекают из формулы Бетти, примененной к функциям ζ_+^{mj} и ζ_+^{ni} в области $\Omega \setminus \{r: r_+ < \varepsilon\}$. Действительно, как следует из условий (2.7), предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ интеграла $q(\zeta_+^{mj}, \zeta_+^{ni}, S_{\varepsilon}^+)$ равен $c_{n,i}^{m,j} - c_{m,i}^{n,i}$, остальные же интегралы

обращаются в нуль из-за того, что весовые функции являются решениями однородной задачи в Ω .

Перепишем сумму (5.3) в координатах (ρ_+, φ_+) , $\rho_+ = h^{-1}r_+$, и воспользуемся (5.5):

$$\begin{aligned} u^q(x) &= \sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^q A_{mj}^q \{R^{-m/2} \rho_+^{-m/2} \Psi^{mj}(\varphi_+) + \\ &+ \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^N h^{n/2} c_{ni}^m \rho_+^{n/2} \Phi^{ni}(\varphi_+)\} + O(\rho_+^{(N+2)/2}) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Осуществим переход к координатам (ρ_+, φ_+) в представлении (5.4). Поскольку $\rho_1 = \rho_+ - 1$ на берегах разреза Ξ , то, раскладывая вектор-функцию $\rho_1^{n/2} \Phi^{nj}(\varphi_1)$ в ряд Тейлора и учитывая правила дифференцирования (4.7), приходим к соотношению

$$\rho_1^{n/2} \Phi^{nj}(\varphi_1) = \sum_{l=1}^n a_l^n \rho_+^{l/2} \Phi^{lj}(\varphi_+) + \sum_{p=1}^M b_p^n \rho_+^{-p/2} \Psi^{pj}(\varphi_+) + O(\rho_+^{-(M+2)/2}) \quad (5.8)$$

При этом коэффициенты справа в (5.8) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} a_l^n &= (-1)^{(n-l)/2} ([1/2(n-l)]! [l-2]!!)^{-1} 2^{(l-n)/2} ([n-2]!!) \\ b_p^n &= (-1)^{(n-1)/2} ([1/2(n+p)]!)^{-1} \alpha 2^{(2-n-p)/2} ([n-2]!!) ([p-2]!!) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Обращаем внимание на следующее: в правой части аналогичной формулы для $\rho_1^k \Phi^{2k,j}(\varphi_1) = X^{2k,j}(1 + \xi_1, \xi_2)$ фигурирует только конечная сумма полиномов $X^{2l,j}$ с $l \leq k$. Именно этот факт и отсутствие $X^{2l,j}$ в разложении (5.8) позволили исключить полиномы из рассмотрения.

Подставляя (5.8) в (5.4), имеем

$$w^q(\xi) = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=1}^q B_{nj}^q \left\{ \sum_{l=1}^n a_l^n \rho_+^{l/2} \Phi^{lj}(\varphi_+) + \sum_{p=1}^M b_p^n \rho_+^{-p/2} \Psi^{pj}(\varphi_+) \right\} + O(\rho_+^{-(M+2)/2}) \quad (5.10)$$

Теперь все готово для сращивания решений внешнего и внутреннего типов: осталось подставить разложения (5.7), (5.10) в асимптотические формулы (5.1), (5.2) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях H и ρ_+ . В результате получаются связи

$$B_{mj}^m = K_{mj} \quad (5.11)$$

$$B_{m-2s,j}^m = \sum_{l=1}^{2s-1} A_{lj}^{2s-1} \sum_{p=1}^2 c_{m-2s,p}^{l,j} - \sum_{n=m-2(s-1)}^m a_n^{m-2s} B_{nj}^m \quad (5.12)$$

$$A_{ij}^{i+m-1} = \sum_{n=1}^m B_{nj}^m b_i^n \quad (j=1, 2; i, m=1, 3, \dots, s=1, 2, \dots, 2s < m) \quad (5.13)$$

В этом и следующем разделе под K_{mj} подразумевается коэффициент K_{mj}^+ , относящийся к правой вершине трещины.

Опишем при помощи индукции последовательность определения множителей из сумм (5.3), (5.4). При $m=1$ в (5.11)–(5.13) содержательными являются только крайние формулы, которые доставляют значения B_{ij}^1 и A_{ij}^1 . Предположим, что уже определены коэффициенты B_{nj}^m и A_{ij}^{i+2s} при $n \leq m \leq 2p-1$, $s \leq p-1$. Пусть $m=2p+1$. Тогда формула (5.11) дает $B_{2p+1,j}^{2p+1}$. Последовательно перебирая $s=1, \dots, p$ в отношении (5.12), находим $B_{2p+1-2s,j}^{2p+1}$ (каждый раз правая часть оказывается известной). Наконец, при помощи (5.13) вычисляем A_{ij}^{i+2p} .

6. Конкретизация асимптотических формул. Перечислим несколько следствий, вытекающих из построенных асимптотических разложений. Применяя в малой окрестности вершины трещины представление (5.4), выводим асимптотическую формулу

$$K_{mj}(h) = \sum_{q=m}^Q h^{(q-m)/2} B_{mj}^q + O(h^{(2+Q-m)/2}) \quad (6.1)$$

Определим согласно (5.11)—(5.13) значения коэффициентов

$$B_{1j}^1 = K_{1j}, \quad A_{1j}^1 = \alpha K_{1j}, \quad A_{3j}^3 = \frac{1}{4}\alpha K_{1j}$$

$$B_{3j}^3 = K_{3j}, \quad B_{1j}^3 = A_{1j}^1 \sum_{p=1}^2 C_{1,p}^1 + \frac{1}{2}B_{3j}^3, \quad A_{1j}^3 = \alpha B_{1j}^3 - \frac{1}{4}\alpha B_{3j}^3$$

$$B_{5j}^5 = K_{5j}, \quad B_{3j}^5 = A_{1j}^1 \sum_{p=1}^2 C_{3,p}^3 + \frac{3}{2}B_{5j}^5$$

$$B_{1j}^5 = \sum_{p=1}^2 \{A_{1j}^3 C_{1,p}^1 + A_{3j}^3 C_{1,p}^3\} + \frac{1}{2}B_{3j}^5 - \frac{3}{8}B_{5j}^5 \quad (6.2)$$

В результате получаем «трехчленное» разложение КИН

$$K_{1j}(h) = B_{1j}^1 + hB_{1j}^3 + h^2B_{1j}^5 + O(h^3) = \sum_{p=1}^2 \{K_{1j} + h(\alpha K_{1j} C_{1,p}^1 + \frac{1}{2}K_{3j}) + h^2(\alpha^2 K_{1j} (C_{1,p}^1)^2 + \frac{1}{4}\alpha K_{1j} C_{1,p}^3 + \frac{1}{2}\alpha K_{1j} C_{3,p}^3 + \frac{1}{4}\alpha K_{3j} C_{1,p}^3 + \frac{3}{8}K_{5j})\} + O(h^3) \quad (6.3)$$

Еще одно следствие касается асимптотики потенциальной энергии деформации $U(h)$. По формуле Клапейрона и в силу (5.1), (5.3), (2.6) имеем

$$U(h) = -\frac{1}{2} \int_{\gamma} \mathbf{p}(x) \cdot \mathbf{u}(h, x) ds = -\frac{1}{2} \int_{\gamma} \mathbf{p}(x) \cdot \mathbf{u}^0(x) ds - \frac{1}{2} \int_{\gamma} \mathbf{p}(x) \cdot \sum_{q=1}^Q h^{(q+1)/2} \sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^q A_{mj}^q \xi_{+}^{mj}(x) ds = U(0) - \frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q h^{(q+1)/2} \sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^q A_{mj}^q K_{mj} + O(h^{(Q+3)/2}) \quad (6.4)$$

Ограничимся тремя членами последнего ряда и укажем в соответствии с (5.11)—(5.13) коэффициенты

$$A_{5j}^5 = \frac{1}{8}\alpha K_{1j}, \quad A_{3j}^5 = \frac{1}{4}\alpha (B_{1j}^3 - \frac{1}{4}B_{3j}^3), \quad A_{1j}^5 = \alpha (B_{1j}^5 - \frac{1}{4}B_{3j}^5 + \frac{1}{8}B_{5j}^5)$$

Получаем «трехчленное» разложение приращения энергии при продвижении трещины

$$U(h) - U(0) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \{hK_{1j}A_{1j}^1 + h^2(K_{1j}A_{1j}^3 + K_{3j}A_{3j}^3) + h^3(K_{1j}A_{1j}^5 + K_{3j}A_{3j}^5 + K_{5j}A_{5j}^5) + O(h^4)\} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \{hK_{1j}^2 + h^2(\alpha K_{1j}^2 C_{1,p}^1 + \frac{1}{2}K_{1j}K_{3j}) + h^3[K_{1j}^2(\frac{1}{4}\alpha C_{3,p}^3 + \alpha^2(C_{1,p}^1)^2 + \frac{1}{4}\alpha C_{3,p}^3) + \frac{1}{2}K_{1j}K_{3j}\alpha C_{1,p}^3 + \frac{1}{2}K_{3j} + \frac{1}{4}K_{1j}K_{5j}]\} + O(h^4) \quad (6.5)$$

Отметим, что коэффициенты при h^2 и h^3 из (6.5) можно найти при помощи формулы Гриффитса — Ирвина, подставив в нее асимптотику (6.3) КИН.

Множители при h и h^2 в разложениях (6.3), (6.5) содержат величины $C_{n,p}^m$ из представлений

(5.5) весовых функций ξ_i^{mj} . Эти величины зависят лишь от геометрии внешней границы Γ области Ω . Как следует из интегрального представления (2.6), коэффициенты K_{mj}^+ также являются глобальными характеристиками данной задачи (границы Γ и нагрузки p). Однако, имея в распоряжении решение u^0 , а значит, и все K_{mj}^+ , определить величины $C_{n_i}^{m,j}$ нельзя (одинаковые коэффициенты K_{mj}^+ могут отвечать задачам с разными p и γ). Поскольку формулы (1.4) и (4.9) содержат только K_{mj}^+ , то вычисление первой производной КИН и второй производной энергии по длине трещины с помощью инвариантных интегралов невозможно. Тем не менее, в случае $K_{ij}^+ = 0$:

$$I^{(1)}(u; \gamma^\pm) = \frac{1}{2}\alpha \{(\partial K_{11}^+/\partial h)(0)^2 + (\partial K_{22}^+/\partial h)(0)^2\} = -(\partial^3 U/\partial h^3)(0) \quad (6.6)$$

Заметим, что и здесь приращение энергии неположительно. Всю используемую в (6.3), (6.5) информацию об исходной задаче можно получить, зная весовые функции ξ_+^{1j} и ξ_+^{3j} вдали от вершины трещины. В самом деле, формула (2.6) доставляет значения K_{ij}^+ и K_{3j}^+ , и согласно (2.4), (1.4): $J_1(\xi_+^{1j} - r_+^{-1/2}\psi^{1j}(\varphi_+); \gamma^+) = \frac{1}{2}\alpha \{(C_1^+)^2 + (C_2^+)^2\}$. Незначительная модификация рассуждений позволяет исследовать ситуации, когда трещина подрастает с двух сторон или ее рост сопровождается изменением нагрузки p .

7. Некоторые приемы использования инвариантных интегралов. Возможность применения инвариантных интегралов не исчерпывается формулой (1.4) и ее аналогами. Продемонстрируем это на примерах.

1. Прямолинейная трещина. Рассмотрим контур $\Gamma \subset V$, охватывающий трещину M целиком, и вычислим интегралы J_1, J_r и J_2, J_φ . Пусть еще один контур γ_ϵ образован объединением участков $M_\epsilon^\pm = \{x: \epsilon - a_- \leq x_1 \leq a_+ + \epsilon, x_2 = 0\}$ берегов трещины и окружностей S_ϵ^\pm . Согласно (1.7) вблизи вершины p^\pm :

$$x \cdot \nabla_x X^{1j}(y^\pm) = \pm a_\pm \alpha Y^{1j}(y^\pm) + O(|y^\pm|^{1/2}) \quad (j = 1, 2) \quad (7.1)$$

$$y^\pm = (y_1^\pm, y_2^\pm), \quad y_1^\pm = r_\pm \cos \varphi_\pm, \quad y_2^\pm = r_\pm \sin \varphi_\pm$$

На M^\pm верны равенства

$$\sigma_{j2}(\delta_1 u) = \partial_1 \sigma_{j2}(u) = 0, \quad \sigma_{j2}(x \cdot \nabla_x u) = (x \cdot \nabla_x + 1) \sigma_{j2}(u) = 0.$$

Поэтому $J_1(u; M_\epsilon^\pm) = 0$ и $J_r(u; M_\epsilon^\pm) = 0$. Значит, в силу (1.5) (или (1.3)):

$$J_1(u; \Gamma) = J_1(u; \gamma_\epsilon) = \frac{1}{2}\alpha \sum_{\pm} \{(K_1^\pm)^2 + (K_2^\pm)^2\}$$

$$J_r(u; \Gamma) = J_r(u; \gamma_\epsilon) = \frac{1}{2}\alpha \sum_{\pm} a_\pm \{(K_1^\pm)^2 + (K_2^\pm)^2\} \quad (7.2)$$

Отсюда, в частности, вытекает, что

$$(K_1^\pm)^2 + (K_2^\pm)^2 = 2(\alpha a)^{-1} \{J_r(u; \Gamma) \pm a_\mp J_1(u; \Gamma)\} \quad (7.3)$$

Подчеркнем, что в отличие от (1.4) контур, фигурирующий в формуле (7.3), не имеет общих точек с трещиной и, вообще говоря, может быть расположен сколь угодно далеко от нее.

Вычислим два другие интеграла. Сначала заметим, что

$$\sigma_{12}(\partial_2 u) = -\partial_1 \sigma_{11}(u), \quad \sigma_{22}(\partial_2 u) = -\partial_1 \sigma_{12}(u)$$

$$\partial_2 X^{11}(x) = \alpha Y^{12}(x), \quad \partial_2 X^{12}(x) = -\alpha Y^{11}(x) + T(x) \quad (7.4)$$

$$(T_r(r, \varphi), T_\varphi(r, \varphi)) = \mu^{-1} (2\pi r)^{-1/2} (\cos 1/2\varphi, -\sin 1/2\varphi)$$

Отсюда вытекают равенства

$$J_2(\mathbf{u}; \Gamma) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{\pm} \{J_2(\mathbf{u}; M_{\varepsilon}^{\pm}) + J_2(\mathbf{u}; S_{\varepsilon}^{\pm})\} = 1/2\alpha \left(\sum_{\pm} \pm K_1^{\pm} K_2^{\pm} - \int_{-a_-}^{a_+} [\sigma_{11}(\mathbf{u}; x_1, +0)^2 - \sigma_{11}(\mathbf{u}; x_1, -0)^2] dx_1 \right)$$

$$J_{\varphi}(\mathbf{u}; \Gamma) = 1/2\alpha \left(\sum_{\pm} a_{\pm} K_1^{\pm} K_2^{\pm} - \int_{-a_-}^{a_+} [x_1 \sigma_{11}(\mathbf{u}; x_1, +0)^2 - x_1 \sigma_{11}(\mathbf{u}; x_1, -0)^2] dx_1 \right) \quad (7.5)$$

Формула (1.4) определяет сумму квадратов КИН, но не каждый из них по-отдельности. Если оказалось, что скачок напряжения на трещине равен нулю, то, имея в распоряжении значения четырех указанных интегралов по контуру Γ , можно вычислить абсолютные величины всех четырех КИН для трещины M . В самом деле, используя (7.5) находим произведения $K_1^{\pm} K_2^{\pm}$, а затем благодаря (7.3) и $|K_j^{\pm}|$.

В том случае, когда упомянутый скачок нетривиален, можно воспользоваться следующими соображениями: в силу (2.1) и (2.2) подынтегральное выражение в первой формуле (7.5) имеет сверхстепенное вырождение в точках $\pm a_{\pm}$ и поэтому при всех N :

$$J_2(\mathbf{u}; \gamma^+) = 1/2\alpha K_1^+ K_2^+ + O(h_+^N) \quad (7.6)$$

В (7.6) считается, что концами дуги γ^+ (фиг. 1) служат точки $(a_+ - h_+, \pm 0)$. Аналогичное (7.6) соотношение верно и для γ^- . Сопоставляя (7.6) и (1.4), определяем $|K_1^{\pm}|$ и $|K_2^{\pm}|$ со столь малой погрешностью, сколь близко к вершине дозволено подходить контуру γ^+ . Отметим, наконец, что допускается включение $P^+ \subset \gamma^+$ (в пределе при $h_+ \rightarrow 0$), но для сохранения (7.6) необходимо, чтобы вершина P^+ была точкой возврата для γ^+ (обе односторонние касательные лежат на оси абсцисс).

2. Слабоискривленная трещина. Пусть развитие полубесконечной трещины происходило в соответствии с критерием $K_2 = 0$ [12] и сопровождалось малым ее искривлением (из-за влияния неоднородностей среды, появления слабых сдвиговых нагрузок и т. п.). Зададим форму трещины $M(\varepsilon)$ соотношениями $x_2 = \varepsilon h(x_1)$, $x_1 < 0$, где $0 < \varepsilon$ — малый параметр, а h — гладкая функция, исчезающая при $x_1 \rightarrow -\infty$. Обозначим через γ контур, который ограничивает область, заполненную однородным упругим материалом и содержащую начало координат O (и вершину $P(\varepsilon) = (0, \varepsilon h(0))$ трещины $M(\varepsilon)$ при малом ε). Покажем, что положение вершины $P(\varepsilon)$ и угол $\beta_{\varepsilon} = \arctg(\varepsilon h'(0))$ наклона касательной восстанавливаются по формулам

$$\varepsilon h(0) = J_1(\mathbf{u}^{\varepsilon}; \gamma)^{-1} - J_{\varphi}(\mathbf{u}^{\varepsilon}; \gamma) + O(\varepsilon^2) \quad (7.7)$$

$$\beta_{\varepsilon} = \varepsilon h'(0) + O(\varepsilon^2) = J_1(\mathbf{u}^{\varepsilon}; \gamma)^{-1} J_2(\mathbf{u}^{\varepsilon}; \gamma) + O(\varepsilon^2) \quad (7.8)$$

Асимптотика решения \mathbf{u}^{ε} задачи в удобной для названных целей форме построена в [13, 14] и вдали от точки O (например, на контуре γ) имеет вид

$$\mathbf{u}^{\varepsilon}(x) \sim \mathbf{u}^0(x) + \varepsilon \mathbf{u}^1(x) + \dots \quad (7.9)$$

Главный ее член \mathbf{u}^0 является решением задачи о прямолинейной трещине $M(0)$; пусть эта трещина находится в состоянии «чистого» нормального разрыва, т. е.

$$\mathbf{u}^0(x) = C_0 r^{1/2} \Phi^{11}(\varphi) \quad (7.10)$$

Как проверено в [13, 14], вектор u^1 из (7.9) должен удовлетворять однородной системе Ламе в области, ограниченной γ и $M(0)$, и допускать разложение

$$u^1(x) = -\alpha h(0) C_0 r^{-1/2} \Phi^{1/2}(\varphi) + C_1 r^{1/2} \Phi^{1/2}(\varphi) + (C_2 - 1/2 h'(0)) r^{1/2} \Phi^{1/2}(\varphi) + O(r), \quad r \rightarrow 0 \quad (7.11)$$

При этом множители C_i из (7.10), (7.11) суть главные члены асимптотики КИН $K_j(\varepsilon)$ в вершине $P(\varepsilon)$ трещины $M(\varepsilon)$:

$$K_1(\varepsilon) = C_0 + \varepsilon C_1 + O(\varepsilon^2), \quad K_2(\varepsilon) = \varepsilon C_2 + O(\varepsilon^2)$$

Подчеркнем, что $C_2 = 0$ в силу упомянутого критерия, а появление $h(0)$ и $h'(0)$ в (7.11) обусловлено несовпадением систем полярных координат, привязанных к трещинам $M(0)$ и $M(\varepsilon)$ — переход от первой ко второй осуществляется параллельным переносом на вектор $(0, \varepsilon h(0))$ и поворотом на угол β_ε . Теперь нетрудно вычислить интегралы I_1, I_2 и I_φ и вывести формулы (7.7), (7.8). Именно, основываясь на (7.9) — (7.11) и (1.4), (3.2), (2.7), получаем

$$I_1(u^\varepsilon; \gamma) = I_1(u^0; \gamma) + O(\varepsilon) = 1/2 \alpha C_0^2 + O(\varepsilon)$$

$$I_2(u^\varepsilon; \gamma) = I_2(u^0; \gamma) - 1/2 \varepsilon \{q(u^0, \partial_2 u^1; \gamma) + q(u^1, \partial_2 u^0; \gamma)\} + O(\varepsilon^2) = \varepsilon q(\partial_2 u^0, u^1; \gamma) = -\varepsilon \alpha C_0 (C_2 - 1/2 C_0 h'(0)) + O(\varepsilon^2)$$

$$I_\varphi(u^\varepsilon; \gamma) = 1/2 \varepsilon \{q(u^0, \partial_\varphi u^1; \gamma) + q(u^1, \partial_\varphi u^0; \gamma)\} + O(\varepsilon^2) = 1/2 \varepsilon \alpha h(0) C_0^2 + O(\varepsilon^2)$$

Отметим еще, что $I_r(u^\varepsilon; \gamma) = O(\varepsilon^2)$.

3. *Ветвящаяся трещина.* Предположим, что в точке O подрастание трещины $M = \{x : x_2 = 0, -a_- \leq x_1 \leq 0\}$ произошло за счет ветвления, т. е. образования малых отростков $\gamma_j^\varepsilon = \{x : \varphi = \varphi_j, 0 < r \leq \varepsilon l_j\}$, где $j = 1, \dots, N$. Тогда приращение энергии деформации вычисляется по формуле (см., например, [15, 16]):

$$\Delta U = U^\varepsilon - U^0 = -\varepsilon \alpha \sum_{i,k=1}^2 K_i A_{ik} K_k + O(\varepsilon^2) \quad (7.12)$$

Здесь K_1 и K_2 — КИН в вершине O трещины M , а $A = \|A_{hp}\|$ — некоторая симметрическая 2×2 -матрица, зависящая от расположения и длин отростков γ_j^ε . Элементами матрицы A служат коэффициенты в разложениях на бесконечности специальных решений v^h задачи в плоскости с трещиной Σ , образованной полубесконечным разрезом $\Xi_0 = \{\xi \in \mathbb{R}^2 : \xi_2 = 0, \xi_1 < 0\}$ и отростками $\gamma_1^N, \dots, \gamma_N^N$ с длинами l_1, \dots, l_N (такая задача описывает явление пограничного слоя; сравни [17, 11]). Вектор-функция $v^h, h = 1, 2$, удовлетворяет однородной системе Ламе в $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$, однородным краевым условиям в напряжениях на берегах Σ и допускает представление

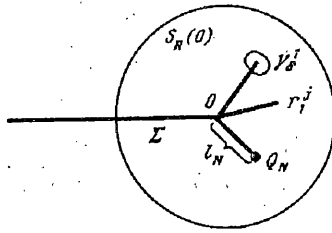
$$v^h(\xi) = \rho^{1/2} \Phi^{1/h}(\varphi) + \sum_{p=1}^2 A_{hp} \rho^{-1/2} \Psi^{1/p}(\varphi) + O(\rho^{-1}), \quad \rho = |\xi| \rightarrow +\infty \quad (7.13)$$

Обозначим КИН, отвечающий решению v^h в вершине Q' отростка γ_j^ε , через $K_j^{(j,h)}$. Для КИН $K_j^{(j,h)}(\varepsilon)$ в вершине отростка γ_j^ε справедлива асимптотическая формула

$$K_j^{(j,h)}(\varepsilon) = K_1 K_j^{(j,1)} + K_2 K_j^{(j,2)} + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (7.14)$$

Вывод и обоснование подобных формул содержится в [17].

Найдем связь между A_{hp} и $K_j^{(j,h)}$. Для этого образуем контур γ из окружности $S_R(0)$, малых дуг γ_j^ε , охватывающих точки Q' , и частей берегов трещины Σ (фиг.



Фиг. 2

2). Рассмотрим $q(v^h, \xi \cdot \nabla_{\xi} v^j; \gamma)$; подынтегральное выражение аннулируется на берегах трещины Σ . Кроме того, в силу (7.6):

$$q(v^h, \xi \cdot \nabla_{\xi} v^j; \gamma) = \alpha l_j \{K_1^{(j,h)} K_1^{(j,0)} + K_2^{(j,h)} K_2^{(j,0)}\} \quad (7.15)$$

Наконец, согласно (7.13) верны соотношения

$$2\xi \cdot \nabla_{\xi} v^j(\xi) = \rho^{1/2} \Phi^{1j}(\varphi) - \sum_{\rho=1}^2 A_{i\rho} \rho^{-1/2} \Psi^{1\rho}(\varphi) + O(\rho^{-1})$$

$$q(v^h, \xi \cdot \nabla_{\xi} v^j; \gamma) = -A_{hj} \quad (7.16)$$

Сравнивая (7.14) и (7.15), (7.16) (с учетом инвариантности интеграла), находим, что формула (7.12) переписывается так

$$\Delta U = -\varepsilon \alpha \sum_{j=1}^N l_j (K_1^j(\varepsilon)^2 + K_2^j(\varepsilon)^2) + O(\varepsilon^2) \quad (7.17)$$

Если трещина растет, оставаясь на оси абсцисс (иными словами, $N=1$, $\varphi_1=0$), то соотношение (7.17) принимает вид

$$\Delta U = -\varepsilon \alpha l_1 (K_1(\varepsilon)^2 + K_2(\varepsilon)^2) + O(\varepsilon^2)$$

Оно отличается от известной формулы Гриффитса тем, что в правой части фигурируют КИН, отвечающие подросшей трещине. Таким образом, в силу (7.17) последний вариант формулы Гриффитса сохраняется и для ветвящейся трещины.

4. Тело с малым дефектом. Пусть тело Ω ограничено простым замкнутым контуром $\partial\Omega$ и содержит дефект, занимающий множество $\omega(\varepsilon) = \{x : \varepsilon^{-1}x \in \omega\}$, причем характерный размер области $\omega \subset \mathbb{R}^2$ сравним с размером Ω . Дефекту ω сопоставляется его энергетическая характеристика — матрица упругой поляризации $P(\omega)$ [18, 19]. Элементы такой симметрической 3×3 — матрицы суть коэффициенты в разложениях на бесконечности специальных решений w^k задачи о деформации плоскости с единичным дефектом ω :

$$w^k(\xi) = V^k(\xi) + \sum_{i=1}^3 P_{ik}(\omega) \sum_{h=1}^2 V_h^i(\nabla_{\xi}) T^{(h)}(\xi) + O(|\xi|^{-2}), \quad |\xi| \rightarrow \infty \quad (7.18)$$

$$(k=1, 2, 3), \quad \xi = \varepsilon^{-1}x, \quad \nabla_{\xi} = (\partial/\partial\xi_1, \partial/\partial\xi_2)$$

$$V^1(\xi) = (\xi_1, 0), \quad V^2(\xi) = (0, \xi_2), \quad V^3(\xi) = 2^{-1/2}(\xi_2, \xi_1)$$

$$-L(\nabla_{\xi}) T^{(h)}(\xi) = \delta(\xi) e^{(h)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^2, \quad h=1, 2$$

Здесь $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ — столбцы тензора Сомильяны. Согласно [18, 17] вблизи дефекта $\omega(\varepsilon)$ поле смещений u^{ε} представимо в виде

$$u^{\varepsilon}(x) = \Lambda(x) + \varepsilon \sum_{k=1}^3 l_k(u^0; 0) w^k(\varepsilon^{-1}x) + O(\varepsilon^2) \quad (7.19)$$

$$l_i(u; x) = \partial_i u_i(x), \quad l_3(u; x) = 2^{-1/2} (\partial_1 u_2(x) + \partial_2 u_1(x))$$

$$i = 1, 2; \quad \partial_i = \partial / \partial x_i, \quad \Lambda(x) = (c_1 - c_0 x_2, c_2 + c_0 x_1), \quad c_p = \text{const}$$

Вычислим интеграл $I_r(u^\varepsilon; \partial\Omega)$. Выберем число R так, чтобы множество $\omega(\varepsilon)$ располагалось внутри окружности $S_{\varepsilon R} = \{x : |x| = \varepsilon R\}$. Заменяя поле $u^\varepsilon(x)$ его асимптотическим представлением (7.19) и переходя затем к быстрым переменным ξ , получаем

$$\begin{aligned} I_r(u^\varepsilon; \partial\Omega) &= I_r(u^\varepsilon; S_{\varepsilon R}) = \\ &= 1/2 \varepsilon^2 \sum_{i,k=1}^3 l_i(u^0; 0) l_k(u^0; 0) q(w^i, \xi \cdot \nabla_\xi w^k; S_R) + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (7.20)$$

Интеграл $q(w^i, \xi \cdot \nabla_\xi w^k; S_R)$ не зависит от R и поэтому теперь можно перейти к пределу при $R \rightarrow \infty$. Из (7.18) следует

$$\xi \cdot \nabla_\xi w^k(\xi) = V^k(\xi) - \sum_{i=1}^3 P_{ik}(\omega) \sum_{h=1}^2 V_h^i(\nabla_\xi) T^{(h)}(\xi) + O(|\xi|^{-2})$$

В силу формулы Бетти при $i, k = 1, 2, 3$ имеем

$$\begin{aligned} q(V^k, \sum_{h=1}^2 V_h^i(\nabla_\xi) T^{(h)}; S_R) &= \\ &= \sum_{h=1}^2 \int_{|\xi| < R} \{V^k(\xi) \cdot L V_h^i(\nabla_\xi) T^{(h)}(\xi) - V_h^i(\nabla_\xi) T^{(h)}(\xi) \cdot L V^k(\xi)\} d\xi = \\ &= - \int_{|\xi| < R} V^k(\xi) \cdot V^i(\nabla_\xi) \delta(\xi) d\xi = V^i(\nabla_\xi) V^k(\xi)|_{\xi=0} = \delta_{i,k} \end{aligned}$$

Аналогичные преобразования дают неравенства $q(V^k, V^i; S_R) = 0$. Благодаря быстрому убыванию на бесконечности вклад в интеграл остальных членов разложения w^i и w^k нулевой. Итак

$$q(w^i, \xi \cdot \nabla_\xi w^k; S_R) = -2P_{ik}(\omega)$$

Положив $l_j = l_j(u^0; 0)$, отсюда и из (7.20) выводим

$$\begin{aligned} I_r(u^\varepsilon; \partial\Omega) &= -\varepsilon^2 \sum_{i,k=1}^3 l_i l_k P_{ik}(\omega) + O(\varepsilon^3) = \\ &= -\varepsilon^2 (l_1, l_2, l_3) \cdot P(\omega) (l_1, l_2, l_3)' + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (7.21)$$

Вычислим теперь интеграл $I_\varphi(u^\varepsilon; \partial\Omega)$. С этой целью заметим, что

$$-\partial_\varphi V^1 = \partial_\varphi V^2 = 2^{1/2} V^3, \quad \partial_\varphi V^3 = 2^{1/2} (V^1 - V^2) \quad (7.22)$$

Здесь V^i — полиномы из (7.18), а декартова запись производной ∂_φ указана в (3.5). Соотношения, подобные (7.22), верны и для вектор-функций $\sum V_h^i(\nabla_\xi) T^{(h)}$, фигурирующих в (7.19). Поэтому, например, в случае специального решения w^3 справедливо такое разложение

$$\begin{aligned} 2^{-1/2} \partial_\varphi w^3(\xi) &= V^1(\xi) - V^2(\xi) + \sum_{h=1}^2 \{(P_{23} - P_{13}) V_h^3(\nabla_\xi) + \\ &+ P_{33} (V_h^1(\nabla_\xi) - V_h^2(\nabla_\xi))\} T^{(h)}(\xi) + O(|\xi|^{-2}) \end{aligned}$$

Подставим в $I_\varphi(u^\varepsilon; \partial\Omega) = I_\varphi(u^\varepsilon; S_{\varepsilon R})$ асимптотику (7.19) поля u^ε . Как и ранее,

перейдем к быстрым переменным ξ и заменим $w^k, \partial_\varphi w^k$ их разложениями на бесконечности. В результате приходим к соотношению

$$\begin{aligned} I_\varphi(u^\varepsilon; \partial\Omega) &= \varepsilon^2 2^{1/2} \{P_{31} l_1 l_1 + (P_{32} - P_{31}) l_1 l_2 - P_{32} l_2 l_2 + \\ &+ (P_{31} + P_{21} - P_{11}) l_1 l_3 + (P_{22} - P_{12} - P_{33}) l_2 l_3 + (P_{23} - P_{13}) l_3 l_3\} + O(\varepsilon^3) = \\ &= \varepsilon^2 2^{1/2} (-l_3, l_3, l_1 - l_2) \cdot P(\omega)(l_1, l_2, l_3)^t + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (7.23)$$

Отметим, что выражение из правой части (7.21) с точностью до множителя совпадает с асимптотикой приращения потенциальной энергии деформации при образовании в теле малого дефекта $\omega(\varepsilon)$ (см. [15, 18, 17]) — главную часть названного приращения и вычисляет интеграл I_φ . Еще одно применение формул (7.21) и (7.23) обсуждается в следующем разделе.

5. *О возможности определить положение и длину трещины.* Пусть γ — контур, ограничивающий область g , которая заполнена однородным упругим материалом (массовых сил нет) и содержит малую (по сравнению с $\text{diam } g$) трещину. Предположим, что найдены интегралы (3.1), (3.4)–(3.6) на контуре γ — требуется по их значениям получить информацию о положении трещины. Будем считать область g малой (относительно общих размеров тела) и заменим поставленную задачу модельной; в плоскости имеется трещина M с неизвестной длиной $2a$. Оси декартовой системы координат $x = (x_1, x_2)$ совместим с главными осями напряжений, приложенных на бесконечности, так что в этой системе $\sigma_{11}^\infty = p_1, \sigma_{22}^\infty = p_2, \sigma_{12}^\infty = 0$ и $|p_2| \geq |p_1|$. Трещина образует (неизвестный) угол $\beta \in (-1/2\pi, 1/2\pi]$ с осью абсцисс; пока будем считать ее симметричной относительно начала координат.

Поворот системы на угол β переводит M в трещину $\{y: |y_1| \leq a, y_2 = 0\}$, матрица поляризации для которой известна [20]

$$P = -a^2 \pi \alpha \begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda(\lambda + 2\mu) & 0 \\ \lambda(\lambda + 2\mu) & (\lambda + 2\mu)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu^2 \end{vmatrix} \quad (7.24)$$

Компоненты вектора деформаций $l = (l_1, l_2, l_3)$, введенного в (7.19), в новых координатах $y = (y_1, y_2)$ принимают вид

$$\begin{aligned} l_1 &= (2\mu)^{-1} (p_1 \cos^2 \beta + p_2 \sin^2 \beta - [2(\lambda + \mu)]^{-1} \lambda (p_1 + p_2)) \\ l_2 &= (2\mu)^{-1} (p_1 \sin^2 \beta + p_2 \cos^2 \beta - [2(\lambda + \mu)]^{-1} \lambda (p_1 + p_2)) \\ l_3 &= 2^{1/2} (2\mu)^{-1} (p_2 - p_1) \sin \beta \cos \beta \end{aligned} \quad (7.25)$$

В силу (7.21), (7.23) и (7.24), (7.25):

$$I_r(u; \gamma) = a^2 \pi \alpha (p_1^2 \sin^2 \beta + p_2^2 \cos^2 \beta),$$

$$I_\varphi(u; \gamma) = -a^2 \pi \alpha \sin \beta \cos \beta (p_2^2 - p_1^2)$$

Равенства (7.26) составляют систему уравнений для нахождения a и β . В частном случае $|p_1| = |p_2| = p$ угол β произволен (не определяется) и $a^2 = (p^2 \pi \alpha)^{-1} I_r(u; \gamma)$. Иными словами, для равномерно растягиваемой плоскости приращения энергии при проявлении трещины не зависит от положения трещины и, кроме того, $I_\varphi(u; \gamma) = 0$ ввиду осесимметричности нагружения. Если $p_1 = 0$ и $|p_2| \equiv p$ (одноосное растяжение), то

$$\operatorname{tg} \beta = -I_{\varphi}(u; \gamma) \cdot I_r(u; \gamma)^{-1},$$

$$a^2 = (p^2 \alpha \pi)^{-1} I_r(u; \gamma)^{-1} (I_r(u; \gamma)^2 + I_{\varphi}(u; \gamma)^2)$$

При этом угол β вычисляется однозначно. Наконец, для $p = |p_2|$ и $\tau = p^{-1} |p_1| \in (0, 1]$ допустимы два значения β :

$$\operatorname{tg} \beta = 1/2\tau^{-2} [-(1 - \tau^2) I_r I_{\varphi}^{-1} \pm ((1 - \tau^2)^2 I_r^2 I_{\varphi}^{-2} - 4\tau^2)^{1/2}],$$

$$a^2 = (p^2 \alpha \pi)^{-1} I_r (1 + \operatorname{tg}^2 \beta) (1 + \tau^2 \operatorname{tg}^2 \beta)^{-1}$$

Обращаем внимание на два обстоятельства. Во-первых, при помощи инвариантных интегралов определить координаты центра трещины не удастся (так как интегралы $I_j(u; \gamma)$ ($j = 1, 2$), аннулируются и матрица поляризации (7.24) инвариантна относительно параллельного переноса трещины). Во-вторых, наиболее выгодному (энергетически; см., например, [20]) направлению $\beta = 0$ возникновения трещины соответствует нулевое значение интеграла $I_{\varphi}(u; \gamma)$. Более общая формулировка последнего факта такова; скорость $v(\beta)$ изменения энергии при повороте дефекта пропорциональна интегралу I_{φ} : $v(\beta) = \frac{d}{d\beta} I_r(u; \gamma) = 2I_{\varphi}(u; \gamma)$. Проверка формулы получается дифференцированием (7.25) по β при использовании соотношений (7.26).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черепанов Г. П. О распространении трещин в сплошной среде//ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 3. С. 476—488.
2. Rice J. R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks//Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1968. V. 35. No. 2. P. 379—386.
3. Bueckner H. F. A novel principle for computation of stress intensity factor//ZAMM. 1970. V. 50. No. 9. P. 529—546.
4. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач вблизи конических точек//Докл. АН СССР. 1974. Т. 219. № 2. С. 286—289.
5. Назаров С. А. Весовые функции и инвариантные интегралы//Вычислительная механика деформируемого твердого тела. 1990. Т. 1. С. 17—31.
6. Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости. М.: Наука. 1981. 688 с.
7. Budiansky B., Rice J. R. Conservation laws and energy-release rates//Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1973. V. 40. No. 1. P. 201—203.
8. Knowles J. K., Sternberg E. On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics//Arch. Rat. Mech. Analysis. 1972. V. 44. No. 3. P. 187—211.
9. Назаров С. А. Локальная устойчивость и неустойчивость трещин нормального отрыва//Изв. АН. МТТ. 1988. № 3. С. 124—129.
10. Назаров С. А., Полякова О. Р. Об эквивалентности критериев разрушения для трещины отрыва в упругом пространстве//Изв. АН. МТТ. 1992. № 2. С. 101—113.
11. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
12. Erdogan F., Sih G. C. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear//J. Basic Eng. 1963. V. 85. No. 4. P. 519—525.
13. Movchan A. B., Nazarov S. A., Polyakova O. R. The quasistatic growth of a semi-infinite crack in a plane containing small defects//C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. 2. 1991. T. 313. No. 11. P. 1223—1228.
14. Мовчан А. Б., Назаров С. А., Полякова О. Р. Приращение коэффициентов интенсивности напряжений при удлинении криволинейной трещины//Изв. АН. МТТ. 1992. № 1. С. 84—93.
15. Мазья В. Г., Назаров С. А. Асимптотика интегралов энергии при малых возмущениях границы вблизи угловых и конических точек//Тр. Моск. матем. об-ва. 1987. Т. 50. С. 79—129.
16. Мазья В. Г., Морозов Н. Ф., Назаров С. А. Об изменении потенциальной энергии деформации при

вариации области вблизи углового концентратора напряжений: Препринт № 4. Л.: Ленингр. филиал ин-та машиноведения им. А. А. Благоднарова. 1989. 32 с.

17. *Mazja W. G., Nasarov S. A., Plamenevski B. A. Asymptotische Theorie elliptischer Randwertgaben in singular gestörten Gebieten. Bd. 1. Berlin: Akademie — Verlag, 1990. 432 S.*
18. *Зорин И. С., Мовчан А. Б., Назаров С. А. О применении тензоров упругой емкости, поляризации и присоединенной деформации//Исследования по упругости и пластичности. Л.: Изд-во ЛГУ, 1990. Вып.: 16. С. 75—91.*
19. *Бабич В. М., Зорин И. С., Иванов М. И., Мовчан А. Б., Назаров С. А. Интегральные характеристики в задачах теории упругости: Препринт Р-6-89. Л.: Ленингр. матем. ин-т АН СССР, 1989. 62 с.*
20. *Зорин И. С., Мовчан А. Б., Назаров С. А. Об использовании тензора упругой поляризации в задачах механики трещин//Изв. АН. МТТ. 1988. № 6. С. 128—134.*

С.-Петербург

Поступила в редакцию
18.VIII.1992