

УДК 539.3

© 1994 г. А. В. КОНОНОВ, А. В. МЕТРИКИН

ЭФФЕКТ ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ
В ДВУМЕРНОЙ УПРУГОЙ СИСТЕМЕ

«Переходное излучение возникает при равномерном и прямолинейном движении источника возмущений, не обладающего собственной частотой, в пространственно неоднородной среде, в переменной во времени среде или вблизи таких сред» [1]. К настоящему времени этот эффект достаточно хорошо изучен в электродинамике и акустике [1, 2]. В механике было исследовано переходное излучение, возникающее при движении механического объекта вдоль одномерной неоднородной упругой системы [3]. Для двумерных упругих направляющих этот эффект, насколько известно авторам, не рассматривался. Между тем, изучение этой проблемы актуально в связи с повышением интереса к вопросам взаимодействия движущихся объектов с распределенными упругими системами, например: автомобиль — мост, самолет — взлетная полоса, судно на воздушной подушке — поверхность воды. В публикуемой работе рассматривается исходная задача теории переходного излучения о пересечении источником возмущений области изменения параметров упругой системы. Найдены основные характеристики возникающего излучения как при нормальном, так и при наклонном пересечении объектом области неоднородности упругой системы. Записан интегральный закон изменения энергии и импульса при переходном излучении.

1. Постановка задачи. Рассмотрим полуограниченную мембрану, край которой при $x = 0$ жестко закреплен. Пусть вдоль мембраны равномерно движется сосредоточенный тяжелый объект массы m , инерционностью которого можно пренебречь по сравнению с его весомостью [3]. Согласно [4, 5], краевая задача, описывающая поперечные колебания мембраны в линейном приближении запишется в виде

$$U_{tt} - c^2 (U_{xx} + U_{yy}) + h^2 U = -P \delta(x - v_1 t) \delta(y - v_2 t)$$

$$(-\infty < y < +\infty, \quad x \leq 0, \quad t \leq 0)$$

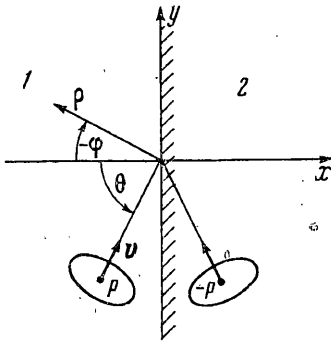
$$|U(x, y, t)| < \infty \text{ при } x - v_1 t \rightarrow -\infty; \quad U(0, y, t) = 0 \quad (1.1)$$

Здесь x и y декартовы координаты, t — время, U — поперечное смещение мембраны, $P = mg/\rho$, $c^2 = N/\rho$, $h^2 = k/\rho$, ρ — поверхностная плотность мембраны, k — жесткость основания, N — натяжение мембраны, $\delta(\dots)$ — δ -функция, $v^2 = v_1^2 + v_2^2 = \text{const}$ — скорость движения объекта ($v < c$), g — ускорение свободного падения.

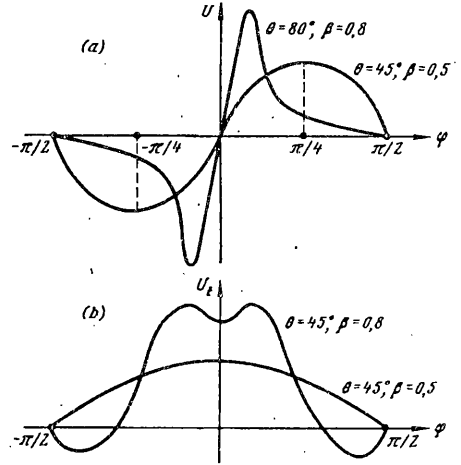
В качестве начальных условий выберем стационарный профиль, образующийся в системе координат ($\eta = y - v_2 t$, $\zeta = x - v_1 t$), связанной с равномерно движущимся объектом в случае, когда мембрана бесконечна, а основание однородно ($K_0(\dots)$ — функция Макдональда):

$$U \rightarrow \frac{-P\gamma}{2\pi c^2} K_0 \left(\frac{h\gamma}{c\gamma_1\gamma_2} (\gamma_1^2\zeta^2 + \gamma_2^2\eta^2 + 2v_1v_2\gamma_1^2\gamma_2^2\zeta\eta/c^2)^{1/2} \right) \text{ при } t \rightarrow -\infty \quad (1.2)$$

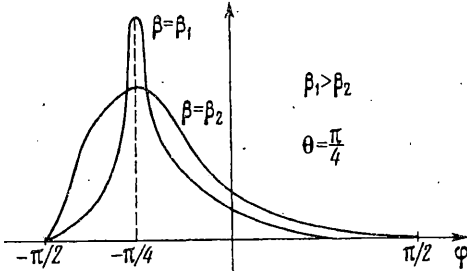
$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}, \quad \beta = v/c, \quad \gamma_1 = (1 - v_1^2/c^2)^{-1/2}, \quad \gamma_2 = (1 - v_2^2/c^2)^{-1/2}$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Исследуем задачу (1.1), (1.2) двумя способами: методом изображений [6], позволяющим наиболее наглядно представить процесс возникновения излучения и спектральным методом, позволяющим проанализировать переходное излучение адекватно используемой ныне измерительной аппаратуре.

2. Анализ задачи методом изображений. Согласно этому методу, решение (1.1) будет совпадать при $x \leq 0, t \leq 0$ с решением вспомогательной задачи о движении двух источников силы: реального P и фиктивного $-P$, движущегося симметрично относительно $x = 0$, по безграничной подпружиненной мембране (1). Используя (1.2) и переходя в полярную систему координат (ρ, φ) где ρ — радиус-вектор, φ — угол наблюдения, 2 — закрепление (фиг. 1) получим, что смещение мембраны при $x \leq 0, t \leq 0$ описывается следующим выражением:

$$U^- = \frac{P\gamma}{2\pi c^2} \left(K_0 \left(\frac{h}{c} (\rho^2 \sin^2 (\vartheta + \varphi) + \gamma^2 (\rho \cos (\vartheta + \varphi) - vt)^2) \right)^{1/2} - K_0 \left(\frac{h}{c} (\rho^2 \sin^2 (\varphi - \vartheta) + \gamma^2 (\rho \cos (\varphi - \vartheta) + vt)^2) \right)^{1/2} \right) \quad (2.1)$$

$$\cos \vartheta = v_1/v, \sin \vartheta = v_2/v, -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2, -\pi/2 < \vartheta < \pi/2$$

При $t > 0$ мембрана будет совершать свободные колебания с начальными условиями, определяемыми выражением (2.1) при $t \rightarrow 0$:

$$U(\rho, \varphi, \vartheta, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} U^-(\rho, \varphi, \vartheta, t) = \frac{P\gamma}{2\pi c^2} \left(K_0 \left(\frac{h}{c} (\rho^2 \sin^2 (\vartheta + \varphi) + \gamma^2 (\rho \cos (\vartheta + \varphi))^2) \right)^{1/2} - K_0 \left(\frac{h}{c} (\rho^2 \sin^2 (\varphi - \vartheta) + \gamma^2 \rho^2 \cos^2 (\varphi - \vartheta)) \right)^{1/2} \right) \quad (2.2)$$

$$U_t(\rho, \varphi, \vartheta, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} U_t^-(\rho, \varphi, \vartheta, t) = \quad (2.3)$$

$$= B \left(\frac{K_1(h/c(\rho^2 \sin^2(\vartheta + \varphi) + \gamma^2 \rho^2 \cos^2(\varphi + \vartheta)))^{1/2}}{(\rho^2 \sin^2(\vartheta + \varphi) + \gamma^2 \rho^2 \cos^2(\varphi + \vartheta))^{1/2}} \cos(\varphi + \vartheta) + \right. \\ \left. + \frac{K_1(h/c(\rho^2 \sin^2(\varphi - \vartheta) + \gamma^2 \rho^2 \cos^2(\varphi - \vartheta)))^{1/2}}{(\rho^2 \sin^2(\varphi - \vartheta) + \gamma^2 \rho^2 \cos^2(\varphi - \vartheta))^{1/2}} \cos(\varphi - \vartheta) \right)$$

$K_1(\dots)$ — функция Макдональда первого порядка, $B = P\gamma^3 h\nu\rho/(2\pi c^3)$. Из (2.2) и (2.3) видно, что в случае нормального пересечения объектом закрепления ($\vartheta = 0$), при $t = 0$, смещение мембраны всюду равно нулю, однако ее скорость в этот момент времени отлична от нуля, что и приводит к возникновению в мембране при $t > 0$ свободных волн, которые представляют собой переходное излучение. В случае наклонного пересечения в момент времени $t = 0$ как смещение, так и скорость мембраны отличны от нуля, причем профиль смещения асимметричен, а скорости — симметричен относительно прямой $y = 0$ (фиг. 2). Смещение и скорость мембраны в момент времени $t = 0$ определяют направленность и интенсивность возникающего при $t > 0$ переходного излучения.

3. Анализ задачи спектральным методом. Применим к (1.1) интегральное преобразование Фурье по времени t и координате y :

$$V(\omega, k_2, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int U(x, y, t) \exp(i(\omega t - k_2 y)) dt dy$$

Тогда получим:

$$c^2 V_{xx} + (\omega^2 - c^2 k_2^2 - h^2) V = \frac{P}{v_1} \exp\left(i(\omega - k_2 v_2) \frac{x}{v_1}\right)$$

$$V(\omega, k_2, 0) = 0 \quad (3.1)$$

Решение (3.1) с учетом ограниченности смещения мембраны при $x \rightarrow -\infty$ запишется в виде

$$V(\omega, k_2, x) = b(\omega, k_2) \exp(i(\Omega x/v)) + a(\omega, k_2) \exp(-ix(\omega^2 - h^2 - k_2^2 c^2)^{1/2}/c) \quad (3.2)$$

$$\Omega = ((\omega - k_2 v \sin \vartheta)/\cos \vartheta),$$

$$a(\omega, k_2) = -b(\omega, k_2) = Pv/(\cos \vartheta (\Omega^2 c^2 - \omega^2 v^2 + c^2 k_2^2 v^2 + h^2 v^2))$$

Выражение (3.2) представляет собой сумму вынужденного решения, которое описывает собственное поле смещений объекта

$${}^a V = b(\omega, k_2) \exp(i\Omega x/v) \quad (3.3)$$

и свободного поля

$${}^r V = a(\omega, k_2) \exp(-ix(\omega^2 - h^2 - k_2^2 c^2)^{1/2}/c) \quad (3.4)$$

которое в волновой зоне ($\omega^2 > h^2 + k_2^2 c^2$) описывает переходное излучение. Найдем энергию этого излучения W , воспользовавшись гамильтоновским методом, изложенным в [7]. Согласно этому методу излученный волновой пакет рассматривается при больших временах ($t \rightarrow +\infty$), когда он отошел далеко от закрепления и в среднем по пространству поле излучения и собственное поле практически

не интерферируют. Следовательно, выражение для \overline{W} может быть записано в виде

$$\overline{W} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} H \, dx \, dy \quad (3.5)$$

где $H = \rho \overline{U}_i^2/2 + N (\overline{U}_x^2 + \overline{U}_y^2)/2 + k \overline{U}^2/2$ — плотность энергии сводного поля. Для вычисления (3.5) используем представление \overline{U} в виде интеграла Фурье

$$\overline{U} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{V}(\omega, k_2, x) \exp(i(k_2 y - \omega t)) \, d\omega \, dk_2 / (2\pi)^2 \quad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в (3.5), получим для \overline{W} :

$$\begin{aligned} \overline{W} = & 1/2 \rho \int \dots \int ((-i\omega)(-i\Omega) + c^2(-ik_1)(-i\kappa_1) + (ik_2)(i\kappa_2) + \\ & + h^2) a(\omega, k_2) a(\Omega, \kappa_2) \exp(-ix(k_1 + \kappa_1) + iy(k_2 + \kappa_2) - \\ & - it(\omega + \Omega)) \, dx \, dy \, d\omega \, dk_2 \, d\Omega \, d\kappa_2 / (2\pi)^4 \quad (3.7) \end{aligned}$$

$$k_1 = (\omega^2 - h^2 - k_2^2 c^2) / c$$

Интегрирование этого выражения по y дает δ -функцию $2\pi \delta(k_2 + \kappa_2)$, свойство которой используется для вычисления интеграла по κ_2 . Полученное выражение интегрируется затем по x , что вновь дает δ -функцию $2\pi \delta((\Omega^2 - h^2 - k_2^2 c^2)^{1/2} + (\omega^2 - h^2 - k_2^2 c^2)^{1/2})$, которая с использованием формулы [1]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \delta(f(x) - y) \, dx = \left| \frac{\varphi(x)}{df(x)/dx} \right|_{f(x)=y}$$

позволяет вычислить интеграл по Ω . В итоге выражение для \overline{W} примет вид

$$\begin{aligned} \overline{W} = & \frac{1}{(2\pi)^2} \iint Q_0(\omega, k_2) \, d\omega \, dk_2 \\ Q_0(\omega, k_2) = & \rho c a^2(\omega, k_2) \omega (\omega^2 - h^2 - k_2^2 c^2) \quad (3.8) \end{aligned}$$

Введем угол φ между волновым вектором излучения $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ и направлением $-x$ (φ отсчитывается против часовой стрелки). В этом случае

$$\cos \varphi = -k_1 / |\mathbf{k}| = -(\omega^2 - h^2 - k_2^2 c^2)^{1/2} / (\omega^2 - h^2)^{1/2},$$

$$\sin \varphi = -k_2 / |\mathbf{k}| = -k_2 c / (\omega^2 - h^2)^{1/2}$$

Учитывая эти соотношения, перепишем (3.8) в виде

$$Q(\omega, \varphi, \vartheta) = A \beta^2 \omega (\omega^2 - h^2) \cos^2 \varphi / \left(\left(\frac{\omega + \beta \sin \vartheta \sin \varphi (\omega^2 - h^2)^{1/2}}{\cos \vartheta} \right)^2 - \beta^2 (\omega^2 - h^2) \cos^2 \varphi \right)^2 \quad (3.9)$$

$$A = \rho P^2 / c^2 \cos \vartheta, \quad \beta = v/c, \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2, \quad -\pi/2 < \vartheta < \pi/2$$

Функция $Q(\omega, h, \vartheta)$ описывает спектрально-угловое распределение энергии излучения в зависимости от угла падения ϑ . Рассмотрим случай нормального пересечения объектом закрепления ($\vartheta = 0$). Спектрально-угловая плотность энергии излучения, как это следует из (3.9), описывается в этом случае выражением

$$Q(\omega, \varphi, \vartheta) = A \beta^2 \omega (\omega^2 - h^2) \cos^2 \varphi / (\omega^2 - \beta^2 (\omega^2 - h^2) \cos^2 \varphi)^2 \quad (3.10)$$

Анализ (3.10) для малых скоростей $v \ll c$ показывает, что излучение носит дипольный характер $Q(\omega, \varphi) \sim \cos^2 \varphi$, а при скоростях близких к c ($(1 - \beta^2) \ll 1$) излучение оказывается сконцентрированным в узком диапазоне углов $0 < \varphi^2 < 1 - \beta^2$. Исследование выражения (3.9) для случая наклонного пересечения ($\vartheta \neq 0$) показало, что максимум излучаемой энергии ($\max Q(\omega, \varphi, \vartheta)$) приходится на угол, симметричный углу падения ϑ относительно оси x , т. е. на угол $-\vartheta$, причем, как и в случае нормального падения (пересечения), ширина максимума уменьшается при росте β (фиг. 3).

4. Законы изменения энергии и импульса излучения. Ответим на вопрос: откуда черпается энергия переходного излучения и какие силы совершают при этом работу? Для этого запишем интегральный закон изменения энергии при переходном излучении упругих волн. Вид этого закона был получен для одномерных систем [3]:

$$W = \Delta H + A^s + A^R \quad (4.1)$$

Здесь W — полная энергия излучения, $\Delta H = [H]_{t_0}^{t_0+\infty}$ — изменение энергии прогиба мембраны, движущегося вместе с объектом, A^s — работа силы тяжести, A^R — работа силы R , поддерживающей равномерное движение объекта. Несмотря на то, что каждая величина, входящая в (4.1), в рассмотренной модели расходится, данный закон изменения энергии справедлив и для двумерных систем (это утверждение легко проверить, используя спектральный подход). Таким образом, как видно из (4.1), переходное излучение возникает в процессе преобразования собственного поля деформации. При этом совершает работу как сила, поддерживающая равномерное движение объекта, так и поле тяготения.

Анализируя спектрально-угловую плотность энергии излучения, получаем, что ее максимум приходится на угол «зеркальный» углу падения ϑ относительно оси x . С этой точки зрения процесс переходного излучения аналогичен удару без проскальзывания твердого шарика о стенку, когда угол падения равен углу отражения. Закон изменения импульса при переходном излучении, имеющий вид

$$P^0 + \int_{-\infty}^0 R dt = \int_{-\infty}^{+\infty} T dt + P^R \quad (4.2)$$

лишь подчеркивает это сходство. Действительно, ставя в соответствие собственному полю, переносящему импульс P^0 — шарик до удара, полю излучения, переносящему импульс P^R — шарик после удара, силе давления мембраны на закрепление (импульс $\int T dt$) — реакцию стенки, а силе, обеспечивающей равномерное движение источника по мембране (импульс $\int R dt$), — силу, прижимающую шарик к стенке, видим, что изменения импульса в обоих случаях происходят одинаково.

В публикуемой работе переходное излучение рассмотрено на примере равномерного движения точечного объекта вдоль полубесконечной, жестко закрепленной по краю, подпружиненной мембраны. Данная модель, с одной стороны, позволила выявить причину возникновения излучения, изучить его спектральный состав, а также проанализировать интегральные законы изменения энергии и импульса. С другой стороны, серьезным недостатком модели, с точки зрения механики, является бесконечный прогиб упругой системы под объектом. Устранить данный недостаток можно двумя способами: учесть конечность размеров объекта, либо ввести в рассмотрение изгибную жесткость направляющей. На этом пути появится возможность ответить на следующие, актуальные для практики вопросы, связанные с переходным излучением упругих волн: каковы динамические напряжения в процессе излучения, велика ли его реакция на движущийся объект и может ли в процессе излучения быть нарушен контакт объекта и направляющей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н. Переходное излучение и переходное рассеяние. М.: Наука, 1984. 360 с.
2. Павлов В. И., Сухоруков А. И. Переходное излучение акустических волн. // Успехи физ. наук. 1985. Т. 147. Вып. 1. С. 83—115.
3. Весницкий А. И., Метрикин А. В. Переходное излучение в одномерных упругих системах. // ПМТФ. 1992. № 2. С. 62—67.
4. Маланов С. Б. Постановка задачи согласованного движения сосредоточенного объекта вдоль двумерной направляющей. // Волновые задачи механики. Н. Новгород: Изд-е. Нф ИМАШ АН СССР, 1991. С. 11—18.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 623 с.
6. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.
7. Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика. Дополнительные главы. М.: Наука, 1987. 488 с.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
3.XII.1992