

УДК 539.3 : 534.1

© 1994 г. Т. И. БЕЛЯНКОВА, В. В. КАЛИНЧУК

## ДИНАМИКА МАССИВНОГО ТЕЛА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО С ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫМ ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ

В рамках линеаризованной теории распространения упругих волн [1, 2] развивается метод исследования особенностей взаимодействия массивного штампа с начально-деформированной средой. Последняя предполагается сжимаемой, первоначально изотропной, имеющей упругий потенциал. Начальное состояние — однородным, т. е. [1, 2]  $u_n^0 = \delta_{in}(\lambda - 1)x_n$ ,  $\lambda_i = \text{const}$  ( $i, n = 1, 2, 3$ ), где  $u_n^0$  — составляющие вектора начального смещения,  $\lambda$  — относительные удлинения волокон,  $\delta_{in}$  — символ Кронекера.

Строится решение краевой задачи, описывающее волновое поле в среде, приводятся интегральные уравнения и системы интегральных уравнений задач о вибрации произвольного в плане и полосового штампа без ограничений на вид начального напряженного состояния среды. В случае задачи о сдвиговых колебаниях полосового штампа изучены различные характеристики его взаимодействия с преднапряженной средой, построены простые формулы, позволяющие исследовать влияние начальной деформации на динамику штампа в области средне- и высокочастотных колебаний. Установлено наличие счетного множества значений частоты при которых влияние преднапряжений на реальную компоненту реакции среды максимально, а также наличие счетного множества частот, при которых это влияние отсутствует. Приведены уравнения, из которых эти частоты определяются. С использованием численных методов показано влияние массы, вида и величины начальной деформации на динамику массивного штампа.

Ранее [3, 4] исследовалось влияние начальной деформации на распределение волновых полей в зоне контакта и на свободной поверхности полупространства в предположении, что начальное состояние удовлетворяет условию  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ .

1. Рассмотрим колебания массивного, занимающего в плане область  $\Omega$ , жесткого штампа на поверхности преднапряженного полупространства под действием гармонической нагрузки. Зависимость от времени примем в виде  $\exp(-i\omega t)$ . Ограничимся случаем поступательных колебаний (обобщение на другие случаи движения штампа можно получить пользуясь методикой, изложенной в [5, 6]). При этих предположениях уравнение движения штампа имеет вид

$$-m\omega^2 w = F - P, \quad P = \int_{\Omega} q(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (1.1)$$

где  $m$  — масса штампа,  $w$  — амплитуда колебаний,  $F$  — амплитуда внешней нагрузки,  $P$  — реакция основания,  $q(x_1, x_2)$  — напряжения в области контакта.

Перемещение штампа и волновое поле в среде определяются путем согласованного решения уравнений движения штампа и полупространства: на поверхности среды в области  $\Omega$  должно выполняться условие

$$w = u(x_1, x_2, 0), \quad x_1, x_2 \in \Omega, \quad (1.2)$$

где  $u(x_1, x_2, x_3)$  — вектор перемещения произвольной точки среды:  $x_1, x_2, x_3$  — лагранжева система координат, связанная с натуральным (недеформированным) состоянием тела, занимающего область  $|x_1|, |x_2| \leq \infty, x_3 \leq 0$ .

Краевая задача о возбуждении преднапряженной среды осциллирующей

нагрузкой, распределенной в области  $\Omega$ , описывается линеаризованными уравнениями движения с граничными условиями [1, 2]:

$$\nabla \cdot \theta = \rho \partial^2 u / \partial t^2, \quad \theta = \Sigma^* \cdot C^0 + \Sigma^0 \cdot \nabla u \quad (1.3)$$

$$n \cdot \theta = \begin{cases} q(x_1, x_2), & x_3 = 0, \quad x_1, x_2 \in \Omega \\ 0, & x_3 = 0, \quad x_1, x_2 \notin \Omega \end{cases}$$

$$\Sigma^* = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W^0}{\partial E^{02}} \cdot L \Sigma \cdot [\nabla u \cdot C^{0T} + C^0 \cdot \nabla u^T], \quad \Sigma^0 = \frac{\partial W^0}{\partial E^0} \quad (1.4)$$

$$E_{mn}^0 = 1/2 [u_{m,n}^0 + u_{n,m}^0 + u_{i,m}^0 u_{i,n}^0]$$

Здесь  $\nabla$  — оператор Гамильтона, определенный в координатах натуральной конфигурации,  $n$  — внешняя нормаль к поверхности  $x_3 = 0$ ,  $C^0$  — градиент деформации места, характеризующий в данном случае начально-деформированное состояние,  $\Sigma^*$  — тензор обобщенных напряжений [1, 2], определяющий закон состояния в теле с начальными напряжениями,  $\Sigma^0$  — тензор начальных напряжений,  $E^0$  — тензор деформации Коши — Грина, градусом обозначены величины, относящиеся к начально-деформированному состоянию, дифференцирование по лагранжевым координатам обозначено индексом после запятой;  $W^0$  — упругий потенциал, который в данном случае предполагается дважды непрерывно-дифференцируемой функцией. Ниже будем рассматривать [2, 7] среды, имеющие упругий потенциал вида

$$W = W(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5) \quad (1.5)$$

$$B_1 = E_{nn}, B_2 = E_{nm} E_{mn}, B_3 = E_{nm} E_{ml} E_{ln}, B_4 = E_{33}, B_5 = E_{3n} E_{n3}$$

где  $B_1, B_2, B_3$  — алгебраические инварианты тензора деформаций.

2. Используя методы операционного исчисления и принцип предельного поглощения, решение краевой задачи (1.3) можно записать в виде  $(\alpha, \beta$  — параметры преобразования Фурье по переменным  $x_1, x_2$ ):

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\Omega} k(x_1 - \xi, x_2 - \eta, x_3, \omega) q(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.1)$$

$$k(s, t, x_3, \omega) = \iint_{\Gamma_1 \Gamma_2} K(\alpha, \beta, x_3, \omega) \exp(i(\alpha s + \beta t)) d\alpha d\beta$$

Контуры  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  выбираются в соответствии с принципом предельного поглощения [8, 9] и поведением элементов матрицы-функции  $K(\alpha, \beta, x_3, \omega)$  на вещественной оси, свойства которых определяются характером начально-деформированного состояния и свойствами материала. В случае, когда начальное напряженное состояние задается условием ( $\sigma_i^{*0}$  — компоненты тензора  $\Sigma^0$  (1.4))  $\sigma_{11}^{*0} = \sigma_{22}^{*0} \neq \sigma_{33}^{*0}$  (состояние (a)), матрица-функция  $K(\alpha, \beta, x_3, \omega)$  имеет характерное для динамических задач теории упругости представление [3, 4, 8, 9]:

$$K(\alpha, \beta, x_3, \omega) = \begin{vmatrix} \alpha^2 M + \beta^2 N & \alpha\beta(M - N) & -i\alpha T \\ \alpha\beta(M - N) & \beta^2 M + \alpha^2 N & -i\beta T \\ i\alpha S & i\beta S & R \end{vmatrix}$$

$$M = M(u, x_3, \omega), N = N(u, x_3, \omega), S = S(u, x_3, \omega)$$

$$T = T(u, x_3, \omega), R = R(u, x_3, \omega), u = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$M = [\sigma_1 m_2 e^{\sigma_1 x_3} - \sigma_2 m_1 e^{\sigma_2 x_3}] u^{-2} \Delta^{-1}, N = e^{\sigma_1 x_3} u^{-2} t_3^{-1}$$

$$T = [s_1 - s_2] \Delta^{-1}, S = [m_1 t_2 - m_2 t_1] u^{-2} \Delta^{-1}$$

$$R = [l_1 t_2 - l_2 t_1] \Delta^{-1}, \Delta = l_1 m_2 - m_1 l_2$$

$$t_k(u, x_3) = d_k e^{\sigma_k x_3}, s_k(u, x_3) = \sigma_k l_{3-k} e^{\sigma_k x_3} \quad (k = 1, 2)$$

$$l_k = A_3 \sigma_k^2 - A_{42} d_k, m_k = [A_6 d_k + A_{41} u^2] \sigma_k \quad (2.2)$$

$$d_k = (A_3 \sigma_k^2 - R_1) / A_4, l_3 = A_3 \sigma_3^2$$

$$\sigma_k^2 = (D_2 \pm \sqrt{\Sigma}) / 2D_1, \sigma_3^2 = R_2 / A_3, D_1 = A_3 A_6$$

$$D_2 = A_3 R_3 + A_6 R_1 - A_4^2 u^2, D_3 = R_1 R_3, \Sigma = D_2^2 - 4D_1 D_3$$

$$R_k = A_k u^2 - \rho \omega^2, R_3 = A_7 u^2 - \rho \omega^2$$

$$A_1 = a_{11} \lambda_1^2 + \sigma_{11}^{*0}, A_2 = \mu_{12} \lambda_1^2 + \sigma_{11}^{*0}, A_3 = \mu_{13} \lambda_1^2 + \sigma_{33}^{*0}$$

$$A_4 = A_{41} + A_{42}, A_6 = a_{33} \lambda_3^2 + \sigma_{33}^{*0} \quad (2.3)$$

$$A_7 = \mu_{13} \lambda_3^2 + \sigma_{11}^{*0}, A_{41} = \lambda_1 \lambda_3 a_{13}, A_{42} = \lambda_1 \lambda_3 \mu_{13}$$

Коэффициенты  $a_{ik}$  и  $\mu_{ik}$  характеризуют связь между напряжениями и деформациями и определяются через упругий потенциал следующим образом:

$$a_{ik} = [\partial / \partial B_1^0 + r_k \partial / \partial B_2^0 + 3/4 r_k^2 \partial / \partial B_3^0 + \delta_{k3} \partial / \partial B_4^0] \times \\ \times [\partial / \partial B_1^0 + r_i \partial / \partial B_2^0 + 3/4 r_i^2 \partial / \partial B_3^0 + \delta_{i3} \partial / \partial B_4^0] W^0 \quad (2.4)$$

$$\mu_{ik} = [\partial / \partial B_2^0 + 3/4 (r_i + r_k) \partial / \partial B_3^0 + 1/2 (\delta_{i1} \delta_{k3} + \delta_{i3} \delta_{k1} + \\ + \delta_{i2} \delta_{k3} + \delta_{i3} \delta_{k2})] W^0, r_n = \lambda_n^2 - 1 \quad (n = 1, 2, 3)$$

Участвующие в представлении (2.3) компоненты тензора начальных напряжений определяются по формуле  $\sigma_{in}^{*0} = \delta_{in} [\partial / \partial B_1^0 + r_i \partial / \partial B_2^0 + 3/4 r_i^2 \partial / \partial B_3^0] W^0$ .

В случае  $\sigma_{11}^{*0} \neq \sigma_{22}^{*0} = \sigma_{33}^{*0}$  (состояние (d)) элементы матрицы-функции  $K(\alpha, \beta, x_3, \omega) = \|K_{ij}\|_{i,j=1,2,3}$  имеют вид:

$$K_{11} = \{d_1 f_{11}^0 - d_2 f_{12}^0\} \Delta^{-1}, K_{12} = \alpha \beta \{f_{11}^0 - f_{12}^0 + \sigma_3 \beta^{-2} f_{13}^0\} \Delta^{-1}$$

$$K_{13} = -i\alpha \{\sigma_1 f_{11}^0 - \sigma_2 f_{12}^0 + f_{13}^0\} \Delta^{-1}, K_{21} = K_{12}$$

$$K_{22} = \{f_{21}^0 - f_{22}^0 + \sigma_3 \beta^{-2} f_{23}^0\} \beta^2 \Delta^{-1}, K_{23} = -i\beta \{\sigma_1 f_{21}^0 - \sigma_2 f_{22}^0 + f_{23}^0\} \Delta^{-1}$$

$$K_{31} = -K_{13}, K_{32} = -K_{23}, K_{33} = \{\sigma_1 f_{31}^0 - \sigma_2 f_{32}^0 + f_{33}^0\} \Delta^{-1}$$

$$\Delta = \sigma_3 l_3 f_{33} - l_2 f_{32} + l_1 f_{31}$$

$$f_{ik} = \sigma_{3-k} \sigma_3 n_{3-k} l_3 - l_{3-k} n_3, f_{2k} = l_{3-k} m_3 - \sigma_{3-k} \sigma_3 m_{3-k} l_3$$

$$f_{3k} = \sigma_{3-k} [m_{3-k} n_3 - n_{3-k} m_3] \quad (k = 1, 2)$$

$$f_{13} = n_1 [\sigma_1 l_2 - l_1 \sigma_2], f_{23} = \sigma_2 m_2 l_1 - l_2 \sigma_1 m_1$$

$$f_{33} = \sigma_1 \sigma_2 n_1 [m_1 - m_2], f_{ik}^0 = f_{ik} e^{\sigma_k x_3} \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

$$m_k = A_2 d_k + \alpha^2 A_{42}, l_k = A_6 \sigma_k^2 - (A_{41} d_k + \beta^2 A_{51})$$

$$n_k = \beta^2 (A_{52} + A_{32}), d_k = (A_6 \sigma_k^2 - R_6) / A_8 \quad (k = 1, 2) \quad (2.5)$$

$$m_3 = \alpha^2 A_{42}, l_3 = A_6 - A_{51}, n_3 = A_{32} \sigma_3^2 + \beta^2 A_{52}$$

$$\sigma_{1,2}^2 = [D_2 \pm \Sigma^{1/2}] [2D_1]^{-1}, \sigma_3^2 = R_4 / A_{32}$$

$$D_1 = A_2 A_6, D_2 = A_{32} R_5 + A_2 R_4 + A_5 A_2 \beta^2 + R_7$$

$$D_3 = R_4 R_5 + R_7 \beta^2, \Sigma = D_2^2 - 4D_1 D_3, R_4 = A_7 \alpha^2 + A_{32} \beta^2 - \rho \omega^2$$

$$R_5 = A_1 \alpha^2 + A_2 \beta^2 - \rho \omega^2, R_7 = (A_5 A_1 - A_8^2) \alpha^2 + A_5 A_2 \beta^2 - A_5 \rho \omega^2$$

$$R_6 = A_7 \alpha^2 + A_8 \beta^2 - \rho \omega^2$$

$$A_{32} = \mu_{23} \lambda_3^2 + \sigma_{22}^{*0}, A_5 = A_{51} + A_{52}, A_8 = \lambda_1 \lambda_2 (a_{12} + \mu_{12})$$

$$A_{51} = \lambda_2 \lambda_3 a_{23}, A_{52} = \lambda_2 \lambda_3 \mu_{23}$$

где  $A_i$  ( $i = 1-4, 6, 7$ ) определены формулами (2.3).

В общем случае, когда  $\sigma_{11}^{*0} \neq \sigma_{22}^{*0} \neq \sigma_{33}^{*0}$  ( $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ ), элементы матрицы-функции  $K(\alpha, \beta, x_3, \omega)$  имеют значительно более громоздкий вид.

3. Выражение (2.1) определяет перемещение произвольной точки среды под действием заданной нагрузки  $q(x_1, x_2)$ . В случае задачи о вибрации штампа на поверхности преднапряженного полупространства в выражениях (2.1) необходимо положить  $x_3 = 0$ . При этом  $q(x_1, x_2)$  — неизвестная функция распределения контактных напряжений,  $u(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)$  — заданная амплитуда перемещений подошвы штампа.

Частным случаем рассмотренной задачи является задача о вибрации полосового ширины  $2a$  штампа на поверхности преднапряженного полупространства. Решение ее сводится к системе интегральных уравнений (плоская задача) ( $u(x_i) = \{u_1(x_i), u_2(x_i)\}$ ,  $q(x_i) = \{q_1(x_i), q_3(x_i)\}$  — соответственно векторы смещений и напряжений) которую можно записать в безразмерном виде

$$u'(x_1') = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 k(x_1' - \xi') q'(\xi') d\xi', |x_1'| \leq 1 \quad (3.1)$$

$$k(t') = \int_{\Gamma} K(\alpha') \exp(i\alpha' t') d\alpha', K(\alpha') = \|K_{ij}(\alpha')\|_{i,j=1,3} \quad (3.2)$$

$$x_i' = \frac{x_i}{a}, \xi_i' = \frac{\xi_i}{a}, t_i' = \frac{t_i}{a}, \alpha' = a\alpha, q_i' = \frac{q_i}{\mu}, u_i' = \frac{u_i}{a}$$

или к интегральному уравнению (антиплоская задача):

$$u_2'(x_1') = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 k_{22}(x_1' - \xi') q_2(\xi') d\xi', |x_1'| \leq 1 \quad (3.3)$$

$$k_{22}(t') = \int_{\Gamma} K_{22}(\alpha') \exp(i\alpha' t') d\alpha' \quad (3.4)$$

Далее штрихи опускаем. В случае состояния (а):

$$K_{11}(\alpha) = M^0(\alpha), K_{13}(\alpha) = -i\alpha T^0(\alpha), K_{31}(\alpha) = i\alpha S^0(\alpha)$$

$$K_{33}(\alpha) = R^0(\alpha), K_{22}(\alpha) = N^0(\alpha)$$

$$M^0(\alpha) = \alpha^2 M(\alpha, 0, \omega), N^0(\alpha) = \alpha^2 N(\alpha, 0, \omega), S^0(\alpha) = S(\alpha, 0, \omega)$$

$$R^0(\alpha) = R(\alpha, 0, \omega), T^0(\alpha) = T(\alpha, 0, \omega) \quad (3.5)$$

где коэффициенты  $l_k, m_k, d_k, \sigma_k$  — определяются формулами (2.2).

В случае начального состояния (б):

$$K_{11}(\alpha) = R^0(\alpha), K_{13}(\alpha) = i\alpha S^0(\alpha), K_{31}(\alpha) = -i\alpha T^0(\alpha) \quad (3.6)$$

$$K_{33}(\alpha) = M^0(\alpha), K_{22}(\alpha) = N^0(\alpha)$$

где  $M^0, S^0, T^0, R^0, N^0$  определены (3.5), но коэффициенты  $l_k, m_k, d_k, \sigma_k$  определяются формулами (2.5).

Выражение (3.1) представляет собой систему интегральных уравнений первого рода относительно неизвестных функций контактных напряжений  $q(x_1, x_2)$ . Функции  $M^0, S^0, T^0, R^0$  (3.5) являются аналитическими в комплексной плоскости с непереходящими друг в друга разрезами, лежащими строго в первом и третьем квадратах (по два в каждом из них), и имеют на вещественной оси два полюса (по одному на положительной и отрицательной полуосях). Разрезы проводятся от точек ветвления, которые определяются численно из уравнения  $\sigma_k(\alpha, \beta, \omega, \sigma_{11}^{*0}, \sigma_{22}^{*0}, \sigma_{33}^{*0}) = 0$  ( $k = 1, 2$ ), до бесконечно удаленных точек. На разных отрезках вещественной оси эти функции обладают качественно различным поведением: при  $|\alpha| \geq \kappa_2$  ( $\kappa_2 > \kappa_1$ ) принимают вещественные значения, при  $|\alpha| \leq \kappa_1$  — чисто мнимые, а при  $\kappa_1 < |\alpha| < \kappa_2$  — комплекснозначные. Функция  $N^0$  является аналитической в комплексной плоскости с разрезами, проведенными в первом и третьем квадрантах от точек ветвления, определяемых из уравнения  $\sigma_3(\alpha, \beta, \omega, \sigma_{11}^{*0}, \sigma_{22}^{*0}, \sigma_{33}^{*0}) = 0$ , до бесконечно удаленных точек, нулей и полюсов не имеет. При  $\alpha \rightarrow \infty$  для функций  $M^0, N^0, R^0$  справедливо представление  $|\alpha| f(\alpha) = c_i + O(\alpha^{-2})$  ( $i = 1, 2, 3$ ), а для функций  $T^0, S^0(\alpha) - \alpha^2 f(\alpha) = c_i + O(\alpha^{-2})$  ( $i = 4, 5$ ). Здесь  $c_i$  зависят от механических параметров среды и начальных напряжений.

4. Информацию о начальном напряженном состоянии среды можно получать как на основе исследования дисперсионных характеристик и скоростей волн Рэлея [1, 2], так и на основе анализа особенностей распределения контактных напряжений [3, 4, 10]. Эффективным средством для оценки начального состояния среды является анализ интегральной характеристики — реактивной силы, действующей на штамп.

Ограничимся случаем сдвиговых колебаний штампа на поверхности полупространства. Обобщение на другие случаи движения штампа можно получить используя соотношения (3.1)—(3.6) с привлечением соответствующих методов решения интегральных уравнений или их систем (например, [3—6, 8—13]).

Задача сводится к исследованию интегрального уравнения (3.3) с ядром (3.4), где функция  $K_{22}$  имеет вид

$$K_{22}(\alpha) = c_2 [\alpha^2 - \kappa^2]^{-1/2}, \quad \kappa = \omega a (\rho/A_2)^{1/2} \quad (4.1)$$

Здесь в случае начального состояния (a)  $c_2 = (A_2 A_3)^{-1/2}$ ; в случае начального состояния (b)  $c_2 = (A_2 A_{32})^{-1/2}$ .

В [10] на основе обобщения метода факторизации [11, 12] было построено решение этого интегрального уравнения для случая  $u_2(x_1) = f(x_1) = \exp(i\eta x_1)$  (далее индекс при  $x_1$  опускаем):

$$q_\eta(x) = -e^{i\eta x} / K(\eta) + S^+(\eta, 1-x) + S^-(\eta, 1+x), \quad |x| < 1 \quad (4.2)$$

$$S^\pm(\eta, t) = \frac{\exp(\pm i\eta(1-t))}{K(\eta)} \operatorname{erf}(-i(\kappa \pm \eta)t)^{1/2} + \frac{\exp(i\kappa t)}{(\pi t)^{1/2}} R^\pm +$$

$$+ \frac{i}{2} \sum_{k=1}^N \frac{\exp(-iz_k t)}{K_+(z_k)} P_k^\pm(t) \quad (4.3)$$

$$R^{\pm} = \frac{e^{\pm\eta}}{K_{\mp}(\eta)} - \frac{i}{2} \sum_{k=1}^N b_k^{\pm}, \quad P_k^{\pm}(t) = b_k^{\pm} [1 - \operatorname{erf}(-i(\kappa + z_k)t)^{1/2}]$$

$$b_k^{\pm} = r_k \sum_{l=1}^N [B_{kl}^{\pm} \alpha(-z_l, +) \mp B_{kl}^{-} \alpha(-z_l, -)] \quad (4.4)$$

$$\alpha(z, \pm) = i \left[ \frac{e^{\eta}}{K_{-}(\eta)(u - \eta)} \pm \frac{e^{-\eta}}{K_{+}(\eta)(u + \eta)} \right]$$

$$K_{\pm}(\alpha) = \sqrt{c_2} \exp(\pm i\pi/4) (\alpha \mp \kappa)^{-1/2}$$

где  $B_{kl}^{\pm}$  — элементы матрицы, обратной матрице вида

$$A = \left\| \delta_{ik} - \frac{r_k}{z_l + z_k} \right\|_{i, k=1, \dots, N}, \quad r_k = \frac{K_{-}(-z_k)}{\pi i K_{+}(-z_k)} (z_{k+1} - z_k) \exp(2iz_k)$$

$z_k = \kappa + it_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) — точки, располагающиеся на берегах разреза  $[\kappa, \kappa + i\infty]$  (принцип их выбора указан в [10]).

Применяя к (4.2)—(4.4) формулы операционного исчисления получим амплитудное значение реактивной силы, действующей на штамп со стороны полупространства

$$P_{\eta} = \int_{-1}^1 q_{\eta}(x) dx = P_{0\eta} + P_{1\eta} + P_{2\eta} \quad (4.5)$$

$$P_{0\eta} = -(\eta K(\eta))^{-1} \{2 \sin \eta + i [e^{\eta} E(-\eta) - e^{-\eta} E(\eta)]\}$$

$$P_{1\eta} = (-i\kappa)^{1/2} E(0) \frac{1}{K(\eta)} \frac{1}{i\eta} [e^{\eta} K_{+}(\eta) - e^{-\eta} K_{-}(\eta)]$$

$$P_{2\eta} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{b_k^{+} + b_k^{-}}{z_k} \left[ -(-i\kappa)^{1/2} E(0) + \frac{1}{K_{+}(z_k)} (1 - e^{-2iz_k} \{1 - E(z_k)\}) \right]$$

$$E(x) = \operatorname{erf}(-2i(\kappa + x))^{1/2}$$

С помощью формул (4.2)—(4.5) просто строится решение уравнения (3.3) для произвольной функции  $f(x)$  (форма подошвы штампа), если ее представить интегралом

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\eta) e^{m\kappa} d\eta$$

В этом случае [8, 9, 14]:

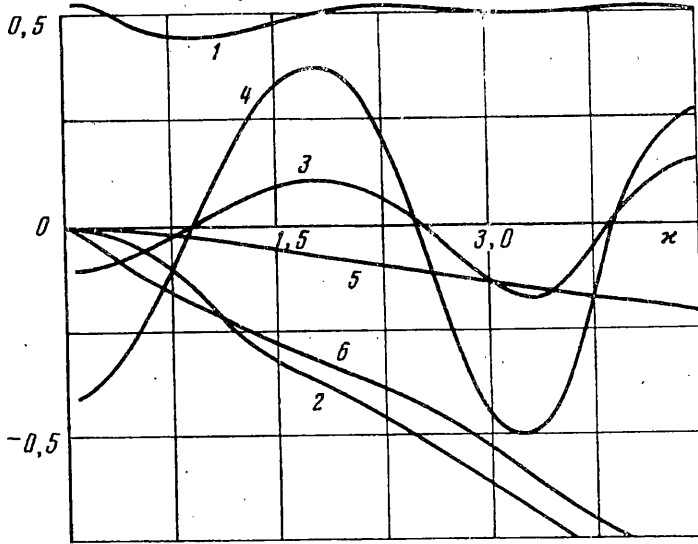
$$q(x) = \int_{-\infty}^{\infty} q_{\eta}(x) F(\eta) d\eta, \quad P = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\eta} F(\eta) d\eta \quad (4.6)$$

Формулы (4.2)—(4.4), (4.6) достаточно наглядно представляют структуру волнового поля под штампом при произвольной форме основания. Случай плоского штампа подробно исследован в [10]. Из выражений (4.5) следует, что реакция основания, определяющая динамическое поведение массивного штампа, существенно зависит от напряженного состояния, поскольку параметр  $\kappa$  ( $\kappa = \omega a (\rho/A_2)^{1/2}$ ) непосредственно связан с начальной деформацией.

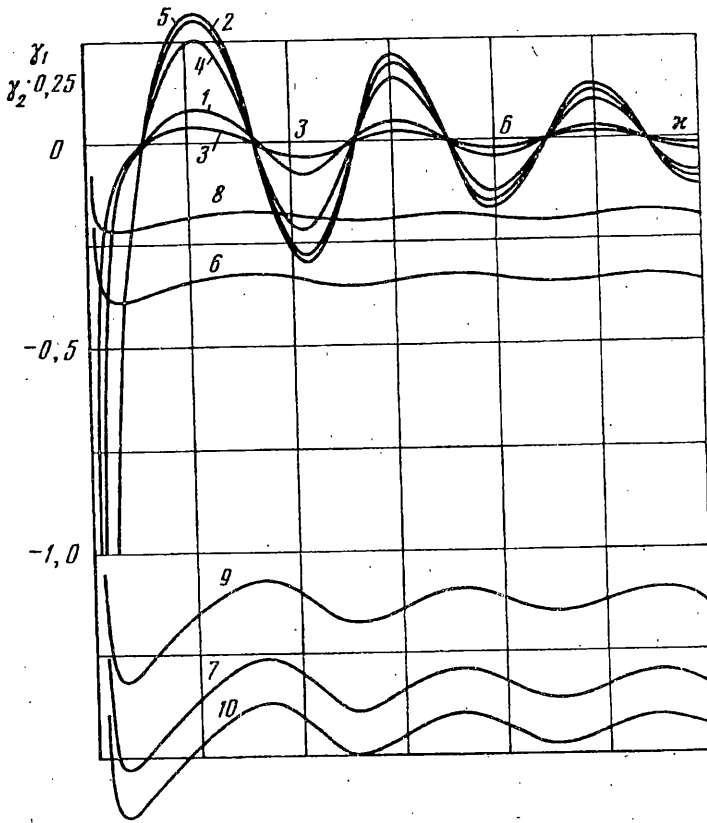
5. В качестве примера, рассмотрим задачу о сдвиговых колебаниях плоского штампа. Полагая в (4.5)  $\eta = 0$  получаем амплитудное значение реактивной силы, действующей на штамп со стороны полупространства в рассматриваемом случае

$$P = P_{00} + P_{01} \quad (5.1)$$

$\operatorname{Re} \theta, \operatorname{Im} \theta \cdot 10^{-2}; \operatorname{Re} P_0 \cdot 0,5, \operatorname{Im} P_0 \cdot 0,1$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$P_{00} = 2i\kappa + (1 - 4i\kappa) E(0) + 2(-2i\kappa/\pi)^{1/2} \exp(2i\kappa) \quad (5.2)$$

$$P_{01} = \sum_{k=1}^N \frac{b_k}{z_k} [-i(-i\kappa)^{1/2} E(0) + (-i(\kappa + z_k))^{1/2} \times \\ \times (1 - \exp(-2iz_k) \{1 - E(z_k)\})] \quad (5.3)$$

$$b_k = r_k \sum_{l=1}^N B_{kl}^+ \alpha(-z_l, +)$$

Формулы (5.1)—(5.3) построены безотносительно к виду начального напряженного состояния, а также к свойствам и форме закона состояния материала среды.

На фиг. 1 представлен характерный вид кривых, иллюстрирующих влияние начального напряженного состояния на реактивную силу, действующую на штамп со стороны полупространства, рассчитанных по формулам (5.1)—(5.3). Заметим, что вычисления, на основе которых построены графики, проводились для  $\kappa > 0,05$ . Диапазон  $\kappa < 0,05$  не рассматривался из-за общего дефекта плоских задач для полупространства [13]. Цифрами 1, 2 отмечены кривые  $\text{Re } P_0$ , и  $\text{Im } P_0$  соответственно, в отсутствие начальной деформации. Цифрами 3—6 отмечены кривые  $\text{Re } \theta$  и  $\text{Im } \theta$  ( $\theta = (P - P_0) \cdot 10^3$ ,  $P$ ,  $P_0$  — значение силы в начально-деформированном и естественном состояниях) при начальной деформации вида  $\lambda_1 = 1 + 0,005$ ,  $\sigma_{22}^{*0} = \sigma_{33}^{*0} = 0$  (кривые 3, 5) и  $\text{Re } \theta$  и  $\text{Im } \theta$  при начальной деформации вида  $\lambda_2 = 1 + 0,005$ ,  $\sigma_{11}^{*0} = \sigma_{33}^{*0} = 0$  (кривые 4, 6). Из графиков следует, что начальная деформация качественно различным образом влияет на реальную и мнимую компоненты реакции среды:  $\text{Re } \theta$  имеет осциллирующий характер, существуют значения частоты, на которых  $\text{Re } P$  на зависит от вида преднапряжения ( $\text{Re } \theta = 0$ );  $\text{Im } \theta$  монотонно возрастает по частоте. Изменение вида начального состояния приводит к изменению амплитуды  $\theta$ , причем, начальные напряжения, действующие по оси  $x_2$  (соосные штампу) оказывают большое влияние на его динамику, чем напряжения, действующие вдоль оси  $x_1$ .

Для детального исследования влияния преднапряжения предположим, что удлинения, сдвиги и повороты в начально-деформированном состоянии малы. Для широкого класса материалов, обладающих достаточной жесткостью это предположение вполне оправдано. Ограничиваясь линейным приближением, запишем реакцию среды  $P$  (5.1) в виде

$$P = P_0 + P_1 \sigma_u^{*0} + O(\sigma_u^{*02}), \quad P_1 = \partial P / \partial \sigma_u^{*0} |_{\sigma_u^{*0}=0}$$

Из выражений (5.1)—(5.3) и представления параметра  $\kappa$  (4.1) следует, что  $P_1$  можно представить следующим образом:

$$P_1 = G \cdot \partial \kappa / \partial \sigma_u^{*0} |_{\sigma_u^{*0}=0}, \quad G = \partial P / \partial \kappa |_{\kappa=\kappa_0} \quad (5.4)$$

$$\kappa_0 = \kappa |_{\sigma_u^{*0}=0}$$

Численный анализ показывает, что составляющая  $P_{00}$  (5.2) реакции среды  $P$  (5.1) играет определяющую роль на средних и высоких частотах. Составляющая  $P_{01}$  (5.3) на этих частотах носит уточняющий характер, что дает возможность пренебречь ее вкладом и получить для  $G$  (5.4) выражение

$$G = -2i + e^{2\kappa_0} \left( 4iW \left( \sqrt{\kappa_0} (1+i) \right) + 2(1-i) \pi^{-1/2} \kappa_0^{-1/2} \right) \quad (5.5)$$

где  $W(z) = e^{-z^2} \text{erfc}(-iz)$ , [15] — является функцией, реальная и мнимая компоненты которой положительны и монотонно убывают.



Из выражений (5.4), (5.5) следует, что качественное поведение  $P_1$  на средних и высоких частотах определяется функцией  $G$  (5.5) и не зависит от вида преднапряжения и величины начальной деформации. Разделяя  $G$  на вещественную и мнимую составляющие получаем, что  $\text{Re } G$  обращается в ноль на частотах  $\chi_k^0$ , являющихся нулями уравнения

$$\text{tg } 2\chi_0 = C = \frac{-4 \text{Im } W(\sqrt{\chi_0}(1+i)) + 2\pi^{-1/2}\chi_0^{-1/2}}{4 \text{Re } W(\sqrt{\chi_0}(1+i)) - 2\pi^{-1/2}\chi_0^{-1/2}}, \quad (5.6)$$

а осциллирующая составляющая  $\text{Im } G$  обращается в ноль на частотах  $\chi_k^*$ , которые определяются из уравнения

$$\text{tg } 2\chi_0 = C^{-1} \quad (5.7)$$

Отметим, что  $\chi_k^0$  — значения частоты, на которых влияние начальной деформации на реакцию среды отсутствует,  $\chi_k^*$  — значения частоты, на которых влияние преднапряжения максимально.

С помощью формул (5.5)—(5.7) можно проводить на реакцию среды качественный анализ влияния преднапряжений на реакцию среды безотносительно к закону состояния материала, виду и величине начальной деформации. Влияние последних заключено во втором сомножителе выражения для  $P_1$  (5.4) и носит чисто количественный характер.

Как уже отмечалось, соотношения (5.5)—(5.7) справедливы в средне- и высокочастотной областях колебаний штампа ( $\chi > 0,5$ ); на низких частотах ( $\chi < 0,3$ ) составляющая  $P_{01}$  (5.3) реакции среды имеет значения, соизмеримые со значениями  $P_{00}$  (5.2), что приводит к значительным трудностям вычислительного характера при исследовании влияния преднапряжений на реакцию среды. Для проведения дальнейших исследований будем полагать, что материал среды является сжимаемым, первоначально изотропным, имеющим упругий потенциал. В качестве последнего используем, например, потенциал Мурнагана [1, 2]:

$$W^0 = 1/2\lambda B_1^0 + \mu B_2^0 + 1/3aB_1^0 + bB_1^0B_2^0 + 1/3cB_3^0 \quad (5.8)$$

где  $\lambda, \mu$  — постоянные Ляме,  $a, b, c$  — постоянные третьего порядка. Полагая начальную деформацию однородной ( $\lambda_i = \text{const}$ ) из (2.4) с учетом (5.8) получаем

$$\mu_{ik} = \mu + bB_1^0 + 1/4c(r_i + r_k)$$

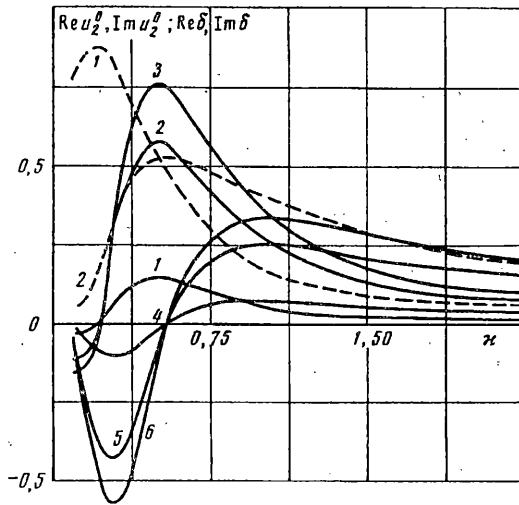
$$a_{ik} = \lambda + 2aB_1^0 + b(r_i + r_k) + \delta_{ik}(2\mu + 2bB_1^0 + cr_i)$$

$$\sigma_{ii}^{*0} = \lambda B_1^0 + aB_1^0 + bB_2^0 + r_i(\mu + bB_1^0) + 1/4cr_i^2$$

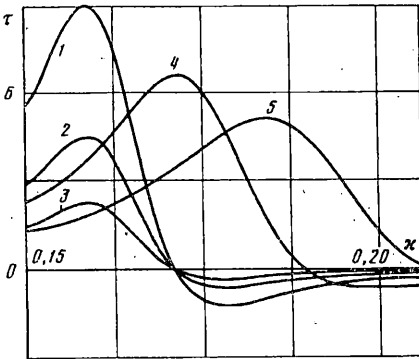
$$B_1^0 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 r_n, \quad B_2^0 = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^3 r_n^2, \quad B_3^0 = \frac{1}{8} \sum_{n=1}^3 r_n^3, \quad r_n = \lambda_n^2 - 1$$

Далее, для численного анализа, будем использовать следующие виды напряженного состояния: одноосное —  $\sigma_{11}^{*0} = p, \quad \sigma_{22}^{*0} = \sigma_{33}^{*0} = 0; \quad \sigma_{22}^{*0} = p, \quad \sigma_{11}^{*0} = \sigma_{33}^{*0} = 0;$  двухосное —  $\sigma_{11}^{*0} = 0, \quad \sigma_{22}^{*0} = \sigma_{33}^{*0} = p;$  трехосное —  $\sigma_{11}^{*0} = \sigma_{22}^{*0} = \sigma_{33}^{*0} = p.$

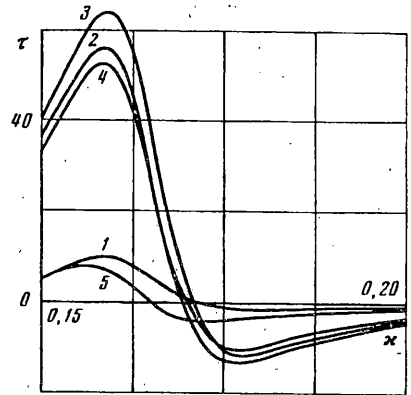
На фиг. 2 представлены кривые, иллюстрирующие поведение  $\gamma_1$  (кривые 1—5),  $\gamma_2$  (кривые 6—10) при одноосном по осям  $x_1, x_2, x_3$ , двухосном и трехосном преднапряженных состояниях соответственно, которые рассчитаны по формулам (5.1)—(5.3) ( $\gamma_1 = \text{Re } P^*\chi^{-1}, \quad \gamma_2 = \text{Im } P^*\chi^{-1}, \quad \Gamma = \text{Im } P_0\chi^{-1}, \quad P^* = (P - P_0)\sigma_{ii}^{*0-1}$ ). Графики подтверждают выводы, сделанные на основе анализа формул (5.4)—(5.7) для средне- и высокочастотных колебаний штампа, относительно влияния на-



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

чальной деформации на реакцию среды. Определенная градиентность в поведении  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  на низких частотах обусловлена вкладом  $P_{01}$  (5.3). Из графиков следует, что максимальное влияние на реакцию среды оказывает трехосное напряженное состояние. Из одноосных напряженных состояний максимальное влияние оказывает напряжения соосные штампу, наименьшее — напряжения, действующие перпендикулярно поверхности среды.

На фиг. 3 представлены кривые, иллюстрирующие влияние начальной деформации среды на амплитуду колебаний невесомого штампа. Цифрами 1, 2 обозначены штриховые кривые  $\text{Re } u_2^0$  и  $\text{Im } u_2^0$  в естественном состоянии, цифрами 1—6 обозначены сплошные кривые  $\text{Re } \delta$  и  $\text{Im } \delta$  ( $\delta = (u_2 - u_2^0) \cdot 10^2$ ,  $u_2$ ,  $u_2^0$  — амплитуды смещений невесомого штампа в начально-деформированном и естественном состоянии соответственно) при начальном состоянии вида  $\lambda_1 = 1 + 0,005$ ,  $\sigma_{22}^{*0} = \sigma_{33}^{*0} = 0$  (кривые 1, 4), при начальном состоянии вида  $\lambda_2 = 1 + 0,005$ ,  $\sigma_{11}^{*0} = \sigma_{33}^{*0} = 0$  (кривые 2, 5) и при начальном состоянии вида  $\lambda_1 = 1 + 0,005$ ,  $\sigma_{11}^{*0} = 0$  (кривые 3, 6). Из графиков следует, что в диапазоне низких частот существуют значения, на которых влияние начальной деформации на амплитуду колебаний невесомого штампа максимально и имеет одинаковый

качественный характер для различных видов начальной деформации. В то же время существуют значения частоты, на которых преднапряжение не влияет либо на реальную ( $\text{Re } \delta = 0$ ), либо на мнимую ( $\text{Im } \delta = 0$ ) составляющие амплитуды колебаний невесомого штампа.

6. При исследовании сдвиговых колебаний массивного штампа с плоским основанием под действием силы  $F$  уравнение (1.1) принимает вид (в безразмерных параметрах)

$$-m\kappa^2 u_2 = F - P_1, \quad P_1 = u_2 P \quad (6.1)$$

где  $P$  — реакция среды на единичное перемещение штампа, которая определяется формулами (5.1)—(5.3),  $m$  — безразмерная масса штампа. С учетом (6.1) имеем

$$u_2 = F [P(\kappa) - m\kappa^2]^{-1} \quad (6.2)$$

Расчеты показывают, что поведение массивного штампа носит резонансный характер: существует частота  $\kappa_*$ , на которой амплитуда колебаний имеет ограниченный максимум. Значение  $\kappa_*$ , а также амплитуда колебаний штампа зависят не только от его массы [5, 6, 9], но и от характера и интенсивности напряженного состояния. Наибольшее влияние начальных напряжений сказывается в окрестности  $\kappa_*$ . В то же время существует значение частоты  $\kappa^0$ , на которой влияние начальных напряжений на амплитуду колебаний штампа практически отсутствует.

На фиг. 4, 5 приведены графики величины  $\tau = [|u_2^0| - |u_2|] \cdot 10^2$  ( $u_2^0$  — амплитуда колебаний штампа при  $p = 0$ ,  $u_2$  — амплитуда колебаний, соответственно, при  $p \neq 0$ ), рассчитанные для стали 35ХГСА [2, 7]. На фиг. 4 приведены кривые, иллюстрирующие влияние начальных напряжений и массы штампа на амплитуду его колебаний. Цифрами 1, 2, 3 отмечены кривые, которые соответствуют различным значениям  $p$  ( $\lambda_1 = 1,005; 1,0025; 1,00125$ ), при фиксированной массе, кривые 1, 4, 5 — различным значениям  $m$  ( $m = 37, 31, 26$ ) при фиксированном  $p$  ( $\lambda_1 = 1,005$ ). Видно, что поведение  $\tau$  носит резонансный характер, причем масса  $m$  влияет как значение  $\kappa_*$ , так и на  $A_*$  — частоту и амплитуду резонансного пика. С уменьшением  $m - \kappa_*$  увеличивается, а значение  $A_*$  уменьшается. Изменение  $p$  приводит к изменению  $A_*$ , но значения  $\kappa_*$  и  $\kappa^0$  — не изменяются.

На фиг. 5 приведены кривые, иллюстрирующие влияние характера начальной деформации (1, 4, 5 — одноосное, соответственно по осям  $x_1, x_2, x_3$ , 2 — двухосное, 3 — трехосное напряженное состояние). Масса штампа фиксирована, значение  $p$  во всех случаях одинаково и положительно. Видно, что наиболее сильное влияние на динамику штампа оказывает трехосное напряженное состояние. Несколько меньшее — двухосное. Сравнение кривых 1 и 4, а также 1 и 5 показывает, что при одноосной деформации минимальное влияние на динамику штампа оказывают напряжения соосные штампу, а минимальное влияние — напряжения, действующие перпендикулярно поверхности среды. Все виды напряженных состояний характеризуются различными значениями  $A_*$ ,  $\kappa_*$  и  $\kappa^0$ . Как и прежде, наибольшее влияние имеет место в окрестности  $\kappa_*$ . Характерно, что на частотах  $\kappa^0$  достигается максимум изменения аргумента.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гузь А. Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: Наук. думка, 1973. 270 с.
2. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Киев: Наук. думка, 1986. Т. 1. 376 с.; Т. 2. 536 с.
3. Калинин В. В., Полякова И. Б. О вибрации штампа на поверхности предварительно напряженного полупространства // Прикл. механика. 1982. Т. 18. Вып. 6. С. 22—27.

4. *Ананьев И. В., Калинин В. В., Полякова И. Б.* О возбуждении волн вибрирующим штампом в среде с неоднородными начальными напряжениями//ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 3. с. 483—489.
5. *Ворович Е. И., Пряхина О. Д., Тукодова О. М.* Динамические свойства упругой полуограниченной среды, контактирующей с упругим инерционным элементом//Изв. АН СССР МТТ. 1986. № 2. С. 128—133.
6. *Ворович Е. И., Пряхина О. Д., Тукодова О. М.* Динамические свойства упругой полуограниченной среды при наличии двух массивных штампов//ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 1. С. 109—116.
7. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
8. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
9. *Бабешко В. А.* К теории пространственных контактных задач для анизотропных сред//Докл. АН СССР. 1981. Т. 256. № 2. С. 324—328.
10. *Белянкова Т. И., Калинин В. В.* О сдвиговых колебаниях штампа на поверхности предварительно напряженного полупространства//ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 2. С. 313—320.
11. *Бабешко В. А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.
12. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
13. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 336 с.
14. *Крейн М. Г.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов//Успехи мат. наук. 1958. Т. 13. Вып. 5. С. 3—120.
15. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*/Под ред. Абрамовица М., Стиган И. М.: Наука, 1979. 832 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию  
10.IX.1992