

УДК 539.3

© 1994 г. А. Г. ТЯПИН

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН РЭЛЕЯ В ПАКЕТЕ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ СЛОЕВ, ПОДСТИЛАЕМОМ ПОДАТЛИВЫМ ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ

Численный метод решения дисперсионного уравнения для многослойной среды, разработанный автором для случая пакета слоев на жестком полупространстве, обобщается на случай податливого полупространства.

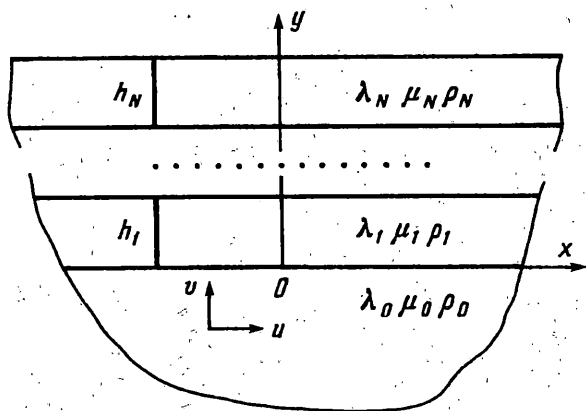
В задачах сейсмологии и акустики [1] традиционно рассматриваются, в основном, слабо затухающие гармонические поверхностные волны, но в задачах взаимодействия сооружений с основаниями приходится рассматривать и быстро затухающие однородные решения волнового уравнения («вытекающие» волны [1,2]). Волновые числа для них определяются либо из задачи о собственных значениях (при дискретизации перемещений по глубине [3—5]), либо из дисперсионного уравнения [1,6—8]. Вывод дисперсионных уравнений для горизонтально-слоистых сред известен давно, однако их численное решение в комплексной области вызывает определенные сложности. Но оно же открывает возможности обходиться без несобственных интегралов [1, 2, 9] в динамических контактных задачах, применяя разложение перемещений по однородным решениям.

Автором ранее был разработан эффективный численный метод [10], позволявший исследовать поведение комплексных корней дисперсионного уравнения для пакета слоев, подстилаемого жестким полупространством. Метод основан на предварительном выводе и численном решении асимптотического (получаемого в пределе при исчезающе малой частоте) дисперсионного уравнения, причем исходными при решении являются корни для некоторой условной среды, которую тоже можно назвать асимптотической (у нее исчезающе малые отношения модулей сдвига верхних слоев к модулям сдвига нижних на всех границах раздела). Для такой среды спектр корней распадается на совокупность спектров корней для изолированных слоев. Затем отношения модулей сдвига постепенно увеличиваются до реальных, а корни при этом непрерывно перемещаются по комплексной плоскости, но не исчезают и не появляются. На втором этапе решения частота постепенно увеличивается от нуля, и корни снова перемещаются по комплексной плоскости.

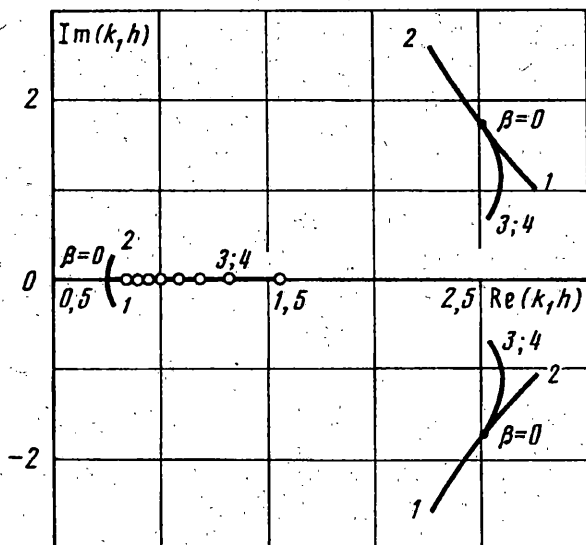
В реальных задачах подстилающее полупространство, идеализируемое жестким полупространством в расчетной схеме, имеет хотя и большую, но конечную жесткость. Поэтому представляет интерес исследование перехода от жесткого к абсолютно жесткому полупространству и выяснение реальных отношений жесткостей, при которых модель абсолютно жесткого подстилающего полупространства может считаться адекватной. Дополнительный интерес связан с тем, что дисперсионное уравнение для пакета слоев на податливом полупространстве имеет принципиальные отличия от дисперсионного уравнения для пакета на жестком полупространстве, связанные с возможностью появления и исчезновения корней.

Следуя образованиям [10], запишем уравнения движения в пространстве Фурье для слоистой полуплоскости (фиг. 1) в виде

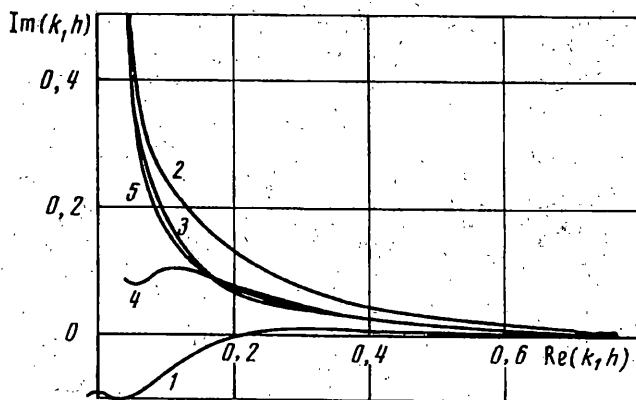
$$(\lambda_m + 2\mu_m) \frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} + \mu_m \frac{\partial^2 u_m}{\partial y^2} + (\lambda_m + \mu_m) \frac{\partial^2 v_m}{\partial x \partial y} = -\rho_m \omega^2 u_m \quad (1)$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

$$(\lambda_m + 2\mu_m) \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} + \mu_m \frac{\partial^2 v_m}{\partial x^2} + (\lambda_m + \mu_m) \frac{\partial^2 u_m}{\partial x \partial y} = -\rho_m \omega^2 v_m$$

Здесь  $m$  — номер слоя (для полупространства примем номер  $m = 0$ ),  $\lambda_m, \mu_m$  — комплексные аналоги упругих постоянных Ламе для слоя  $m$  с учетом внутреннего трения,  $\rho_m$  — плотность материала слоя,  $\omega$  — круговая частота колебаний. Будем искать решение системы (1) в виде  $(u_m, v_m)^T = (U_m, V_m)^T \exp(k_1 x + r_2^m y)$ . Тогда для фиксированного значения  $k_1$  получаем две пары значений  $r_2^m$ , которые обозначим  $\pm k_2^m, \pm p_2^m$ :

$$(k_2^m)^2 = -k_1^2 - \rho_m \omega^2 / \mu_m, \quad (p_2^m)^2 = -k_1^2 - \rho_m \omega^2 / (\lambda_m + 2\mu_m) \quad (2)$$

Перемещения и напряжения в слое  $m$  запишутся в виде

$$(u_m, v_m, \sigma_y^m, \tau^m)^T = D_m G_m E_m (U_1^m, U_2^m, U_3^m, U_4^m)^T \exp(k_1 x) \quad (3)$$

$$D_m = \text{diag} [1, i, -2\mu_m k_1, 2\mu_m i k_1]$$

$$E_m = \text{diag} [\exp(k_2^m y), \exp(-k_2^m y), \exp(p_2^m y), \exp(-p_2^m y)]$$

Матрицу  $G_m$  выпишем в преобразованном с помощью (2) виде, опуская индекс слоя  $m$  и обозначив  $\alpha = \rho \omega^2 / 2\mu k_1^2$ :

$$G = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -(k_1/ik_2) & (k_1/ik_2) & (p_2/ik_1) & -(p_2/ik_1) \\ 1 & 1 & 1 + \alpha & 1 + \alpha \\ -(1 + \alpha)(k_1/ik_2) & (1 + \alpha)(k_1/ik_2) & (p_2/ik_1) & -(p_2/ik_1) \end{vmatrix} \quad (4)$$

В соотношении (2) комплексные константы  $U_j^m$  произвольны. Чтобы выразить их через перемещения и напряжения, используя (3), обратим матрицу  $G$ :

$$G^{-1} = \begin{vmatrix} 1 + \alpha & -(k_2/ik_1) & -1 & (k_2/ik_1) \\ 1 + \alpha & (k_2/ik_1) & -1 & -(k_2/ik_1) \\ -1 & -(k_1/ip_2)(1 + \alpha) & 1 & (k_1/ip_2) \\ -1 & (k_1/ip_2)(1 + \alpha) & 1 & -(k_1/ip_2) \end{vmatrix} 1/2\alpha \quad (5)$$

Таким образом, при  $x = 0$  вектор констант выражается через перемещения и напряжения по формуле

$$(U_1^m, U_2^m, U_3^m, U_4^m)^T = E_m^{-1} G_m^{-1} D_m^{-1} (u_m, v_m, \sigma_y^m, \tau^m)^T \quad (6)$$

Применяя матричный алгоритм, аналогичный [7], с учетом условий непрерывности перемещений на границах раздела получаем выражение для перемещений и напряжений на свободной верхней поверхности пакета через перемещения и напряжения на его нижней границе (т. е. на верхней границе полупространства). Оно следует из формулы (2) в [10]:

$$(u_N, v_N, \sigma_y^N, \tau^N)^T = D_N B_N T_{N-1} B_{N-1}^{-1} \dots B_2 T_1 B_1 D_1^{-1} (u_0, v_0, \sigma_y^0, \tau^0) \quad (7)$$

$$T_l = D_{m+1}^{-1} D_m = \text{diag} [1, 1, t_m, t_m], \quad t_m = \mu_m / \mu_{m+1}$$

Здесь  $B_m$  — матрица  $(4 \times 4)$  с элементами (индекс слоя  $m$  опускаем) [10]:

$$\begin{aligned} b_{13} &= \alpha^{-1} (\text{ch } p - \text{ch } k), \quad b_{33} = b_{13} + \text{ch } p, \quad b_{24} = -b_{13} \\ b_{23} &= \alpha^{-1} [(p_2/ik_1) \text{sh } p + (k_1/ik_2) \text{sh } k], \quad b_{22} = b_{33} \\ b_{43} &= b_{23} - (ik_1/k_2) \text{sh } k, \quad b_{44} = \text{ch } k - b_{13}, \quad b_{11} = b_{44} \\ b_{14} &= -\alpha^{-1} [(ik_2/k_1) \text{sh } k + (ik_1/p_2) \text{sh } p], \quad b_{21} = -b_{43} \\ b_{34} &= b_{14} - (ik_1/p_2) \text{sh } p, \quad b_{31} = \text{ch } k - \text{ch } p - b_{13} \end{aligned} \quad (8)$$

$$b_{41} = b_{21} + (1 + \alpha)(ik_1/k_2) \operatorname{sh} k, \quad b_{12} = (ik_1/p_2) \operatorname{sh} p - b_{14}$$

$$b_{32} = (1 + \alpha)(ik_1/p_2) \operatorname{sh} p + b_{12}, \quad b_{42} = -b_{31}$$

$$\alpha = \rho\omega^2/2\mu k_1^2, \quad k = k_2 h, \quad p = p_2 h$$

Из физического смысла (7) следует важное свойство матрица  $B$ , которое может быть проверено непосредственно по (8):  $B^{-1}(h) = B(-h)$ . Обращая (7) и применяя (6), приходим к соотношению между константами  $U$  для полупространства и перемещениями и напряжениями на поверхности пакета (обозначая  $B_m^* = B_m(-h_m)$ ,  $T_m^* = T_m^{-1}$ ):

$$(U_1^0, U_2^0, U_3^0, U_4^0)^T = G_0^{-1} T_0^* B_1^* T_1^* \dots B_N^* D_N^{-1} (u_N, v_N, \sigma_y^N, \tau^N)^T \quad (9)$$

Отсутствие напряжений на свободной поверхности пакета и простой вид  $D_N^{-1}$  позволяют переписать (9) в виде

$$(U_1^0, U_2^0, U_3^0, U_4^0)^T = [G_0^{-1} T_0^* B_1^* T_1^* \dots B_N^*] (u_N, v_N/i)^T \quad (10)$$

где в матрице  $B_N^*$  оставлены два первых столбца из четырех. Будем в дальнейшем опускать индекс полупространства 0.

Две константы  $U_j$  из четырех — те, которым соответствуют  $r_2$  с отрицательными действительными частями, — должны равняться нулю. Это условие приводит к дисперсионному уравнению  $\det A = 0$ , где в качестве  $A$  используются две строки из матрицы  $(4 \times 2)$ , стоящей в квадратных скобках в (10). Далее обозначим

$$k_2 = ik_1(1 + 2\alpha)^{0,5}, \quad p_2 = ik_1[1 + 2\alpha\gamma]^{0,5}, \quad \gamma = \mu/(\lambda + 2\mu) \quad (11)$$

Соотношение (11) конкретизирует (2) для полупространства и дает возможность записать (5) в виде

$$G^{-1} = \left\| \begin{array}{cccc} 1 + \alpha & -(1 + 2\alpha)^{0,5} & -1 & (1 + 2\alpha)^{0,5} \\ 1 + \alpha & (1 + 2\alpha)^{0,5} & -1 & -(1 + 2\alpha)^{0,5} \\ -1 & (1 + \alpha)(1 + 2\gamma\alpha)^{-0,5} & 1 & -(1 + 2\gamma\alpha)^{-0,5} \\ -1 & -(1 + \alpha)(1 + 2\gamma\alpha)^{-0,5} & 1 & (1 + 2\gamma\alpha)^{-0,5} \end{array} \right\| 1/2\alpha \quad (12)$$

отметим, что в (11) процедура извлечения квадратного корня в комплексной области двузначна, поэтому для фиксированного  $k_1$  существует четыре варианта выбора параметров  $(k_2, p_2)$ . Отметим далее, что все элементы матрицы (8) не изменяются при перемене знака  $k_2$  и/или  $p_2$ , а элементы матрицы (12) изменяются. Здесь и кроется принципиальное отличие пакета на жестком полупространстве от пакета на полупространстве податливом. Для определенности в дальнейшем будем выбирать для дисперсионного уравнения всегда первую и третью строки из матрицы (12). Это позволяет однозначно записать уравнение через  $k_2$  и  $p_2$  (эти числа определяются для полупространства; подобные числа для слоев не рассматриваются, поскольку от их знака ничего не зависит). Из-за неоднозначности выбора  $k_2$  и  $p_2$  формально дисперсионное уравнение расщепляется на четыре. Соответственно у него появляются четыре семейства корней. Однако физический смысл имеют только те корни  $k_1$ , для которых не только  $\det A = 0$ , но одновременно волновые числа  $k_2, p_2$  лежат в левой комплексной полуплоскости. В этом и заложена возможность появления и исчезновения корней: при непрерывном изменении любого параметра задачи (например, частоты или отношения жесткостей слоев) в каждом семействе корни на комплексной плоскости меняются непрерывно, т. е. не могут исчезать или появляться, однако волновые числа  $k_2, p_2$  могут переходить из левой комплексной полуплоскости в правую и обратно, меняя таким образом число корней, имеющих физический смысл.

Для исследования этого явления рассмотрим два подхода. Первый подход в

принципе аналогичен [10]: сначала выведем асимптотическое уравнение для пакета на податливом полупространстве, затем решим его, постепенно переходя от асимптотически слоистого основания к реально слоистому, а потом будем увеличивать частоту от нуля, следя за поведением корней.

Если предположить, что в (11)  $1^{0.5} = 1$  и для  $k_2$ , и для  $p_2$ , (это будем считать определением первого семейства корней), то при исчезающе малых  $\alpha$  матрица (12) с точностью до членов первого порядка малости по  $\alpha$  равна

$$G^{-1} = \begin{vmatrix} 1 + \alpha & -1 - \alpha & -1 & 1 + \alpha \\ 1 + \alpha & 1 + \alpha & -1 & -1 - \alpha \\ -1 & 1 + \alpha(1 - \gamma) & 1 & -1 + \gamma\alpha \\ -1 & -1 - \alpha(1 - \gamma) & 1 & 1 - \gamma\alpha \end{vmatrix} 1/2\alpha \quad (13)$$

Асимптотика при малых  $\alpha$  матрицы  $B$  приведена в [10]. Найдем асимптотику  $G^{-1}$ . Поскольку равенство нулю определителя матрицы  $A$  не изменится при замене строк  $G^{-1}$  их линейными комбинациями, приходим к следующим асимптотическим выражениям для первой и третьей строк матрицы  $G^{-1}$ , участвующих в вычислении  $A$ :

$$G^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & \gamma & 0 & 1 + \gamma \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad (14)$$

Для второго семейства корней, которое определим соотношением  $1^{0.5} = -1$  одновременно для  $k_2$  и  $p_2$  в (II), первая строка в (13) поменяется местами со второй, третья с четвертой, и в итоге

$$-G^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & -\gamma & 0 & -1 - \gamma \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad (15)$$

Третье семейство корней определим так:  $\sqrt{1} = 1$  для  $k_2$ ,  $\sqrt{1} = -1$  для  $p_2$  в (11). В четвертом семействе для  $k_2$   $\sqrt{1} = -1$ , для  $p_2$   $-\sqrt{1} = 1$ . И в том, и в другом случае асимптотическое выражение для матрицы  $G^{-1}$  одинаково

$$G^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (16)$$

До сих пор рассматривалась асимптотика при малых  $\alpha$ . Особого рассмотрения заслуживает случай, когда при исчезающе малой частоте  $\alpha$  не стремится к нулю, то есть  $k_1$  стремится к нулю вместе с  $\omega$ . Физически это классическая волна Рэлея в подстилающем полупространстве. Легко убедиться в том, что матрицы в (8) для всех слоев превращаются в единичные, и в итоге дисперсионное уравнение для пакета на полупространстве полностью эквивалентно дисперсионному уравнению для полупространства без пакета; матрица  $A$  получается непосредственно из (12):

$$A = \begin{vmatrix} 1 + \alpha & -(1 + 2\alpha)^{0.5} \\ -1 & (1 + \alpha)(1 + 2\gamma\alpha)^{-0.5} \end{vmatrix} \quad (17)$$

Дисперсионное уравнение, получаемое из (17), приводит к кубическому уравнению относительно  $\alpha$ ; для первых двух определенных выше семейств корней лишь один действительный (или почти действительный, если  $\gamma$  не совсем действительное отношение комплексных модулей  $\lambda$  и  $\mu$ ) корень  $\alpha$  удовлетворяет исходному дисперсионному уравнению: этот корень дает классическое значение скорости волны Рэлея в подстилающем полупространстве. Для двух других семейств формальные аналоги волны Рэлея можно найти, используя другие корни кубического уравнения, однако физического смысла они не имеют, поскольку, как показывают вычисления, с ростом частоты для третьего и четвертого семейств одно из волновых чисел  $k_2$ ,  $p_2$  остается в правой комплексной полуплоскости.

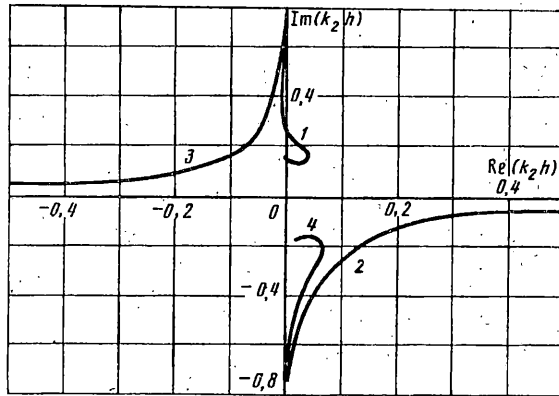
Построим алгоритм численного решения дисперсионного уравнения аналогично

[10]: сначала будем решать асимптотическое уравнение при исчезающе малых  $\alpha$ , затем начнем постепенно увеличивать частоту. На первом этапе предположим, что все величины  $t_j^{-1} = \mu_{j+1}/\mu_j$  пропорциональны некоторому параметру  $\beta$ , который меняется от 0 до единицы. При  $\beta = 0$  все слои и полупространство работают независимо (это показано в [10]), и спектр корней является просто объединением корней для отдельных слоев (полупространство представлено нулевым корнем). При постепенном возрастании  $\beta$  от нуля до единицы отношения модулей  $t_j^{-1}$  стремятся к реальным значениям.

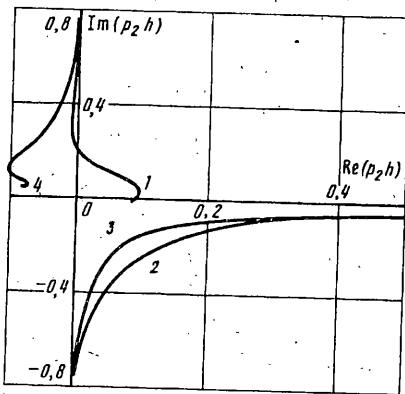
Рассмотрим однородный слой толщины  $h$ , лежащий на полупространстве. Пусть коэффициенты Пуассона у слоя и полупространства совпадают, а отношение модулей равно  $\beta$ . На фиг. 2 приведены графики поведения корней асимптотического уравнения в диапазоне  $\beta$  от нуля до  $1,3^{-2}$  (отношение скоростей сдвиговых волн в полупространстве и слое уменьшается от бесконечности до 1,3). Коэффициент Пуассона для слоя и полупространства равен 0,48. Для каждого из трех низших по модулю корней на правой комплексной полуплоскости приведено по три кривых: для семейств 1, 2, 3 и 4 (для последних двух кривая общая, так как асимптотическая матрица (16) для них совпадает). Волновые числа  $k_2, p_2$  в соответствии с (11) и определениями семейств равны для исчезающе малой частоты произведениям  $k_1$  на  $\pm i$ , откуда следует, что первый асимптотический корень для семейств 1 и 2 не имеет физического смысла, а в семействах 3, 4 заведомо не имеют физического смысла любые асимптотические корни, не лежащие на действительной оси. Таким образом, в приведенном диапазоне  $\beta$  для первого корня может иметь смысл общий корень семейств 3, 4, для второго (в первой четверти комплексной полуплоскости) имеет смысл корень семейства 1, для третьего — корень семейства 2. При дальнейшем увеличении  $\beta$  последние два из названных корней продолжают приближаться к действительной оси и при  $\beta = 0,95$  пересекают ее в противоположных направлениях. Это означает, что корни, имеющие физический смысл, для этой пары исчезли. Для следующей пары корней критическое значение  $\beta$  равно примерно 0,985. Первый же корень семейств 3, 4 при увеличении  $\beta$  уходит по действительной оси вправо. Так для асимптотического уравнения осуществляется предельный переход к однородному полупространству, где не должно остаться никаких имеющих физический смысл корней, кроме нулевого (т. е. классического рэлеевского).

При увеличении частоты  $\omega$  от нуля корни всех семейств непрерывно перемещаются по комплексной плоскости от своих асимптотических значений. При этом они могут терять и обретать физический смысл. Проиллюстрируем это на примере рассмотренного выше слоя на полупространстве при  $\beta = 0,01$  для первого корня. Частоту  $\omega$  будем описывать безразмерной величиной  $d = \omega h(c_s \pi)$ , где  $c_s = \text{Re } G/\rho$  — скорость сдвиговых волн в слое. Зададим частотнезависимое трение в слое и полупространстве  $\text{Im } G = 0,05 \text{ Re } G$ . На фиг. 3 в диапазоне от 0 до 0,6 приведены пять кривых: кривые 1, ..., 4 дают значения первого корня всех четырех семейств, а кривая 5 — значения корня для слоя на жестком полупространстве. На фиг. 4 приведены волновые числа  $k_2$ , на фиг. 5 — волновые числа  $p_2$ . Естественно, на последних двух фигурах кривая 5 отсутствует. Напомним, что корень имеет физический смысл тогда и только тогда, когда волновые числа  $p_2$  и  $k_2$  одновременно лежат в левой комплексной полуплоскости. Как видно из фиг. 4, 5 только корень семейства 1 удовлетворяет этому условию, и то в небольшом диапазоне по  $a$  (начиная с 0,29 и до 0,47). Данный пример подтверждает, что с изменением частоты формальные корни дисперсионного уравнения могут приобретать и терять физический смысл.

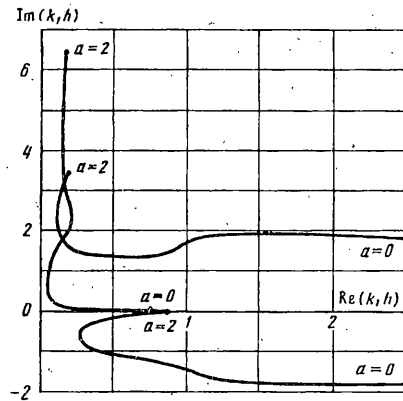
Таким образом, чтобы гарантировать себя от потери корней, необходимо отслеживать изменение формальных корней всех четырех семейств. В связи со сложным поведением корней это приводит к резкому возрастанию громоздкости расчетов. Поэтому рассмотрим альтернативный подход.



Фиг. 4



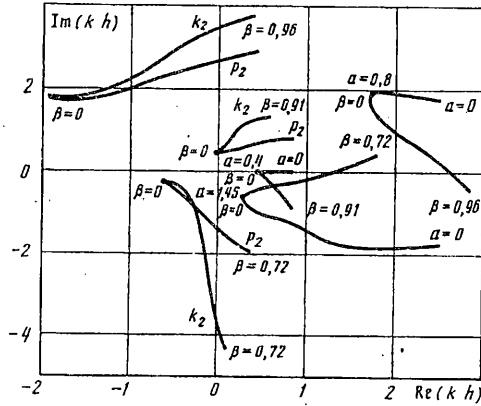
Фиг. 5



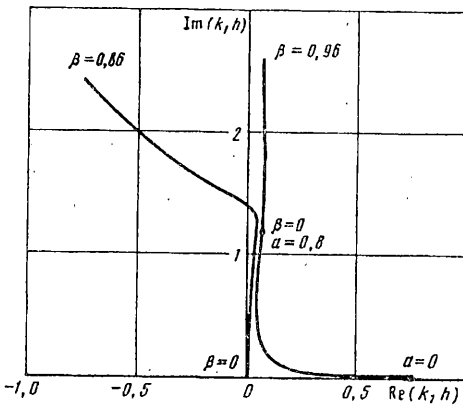
Фиг. 6

В общей схеме вычислений, предложенной в [10], поменяем местами два этапа: сначала вычислим корни для «асимптотического основания» при конечной частоте (здесь будем считать асимптотическим основанием пакет слоев с реальными свойствами, но не на податливом, а на жестком полупространстве), и лишь затем будем постепенно смягчать полупространство, рассматривая четыре введенных нами семейства формальных корней. Преимущественно такого подхода в том, что первый этап достаточно проработан в [10] и там нет проблем с исчезновением и появлением корней. На фиг. 6 показаны графики изменения трех нижних корней на правой комплексной полуплоскости для рассматриваемого нами, примера в диапазоне  $a$  от 0 до 2,0. Каждый корень в целом проходит как бы две стадии: сначала он движется вдали от мнимой оси (нижний корень выходит к ней в нижней полуплоскости, а затем уходит опять, что отражает явление аномальной дисперсии [8]), а затем выходит к мнимой оси в первой четверти комплексной плоскости и начинает двигаться вдоль нее вверх (это же происходит и с нижним корнем, но при более высоких значениях  $a$ ). Физически вторая стадия означает появление новой бегущей волны в слое.

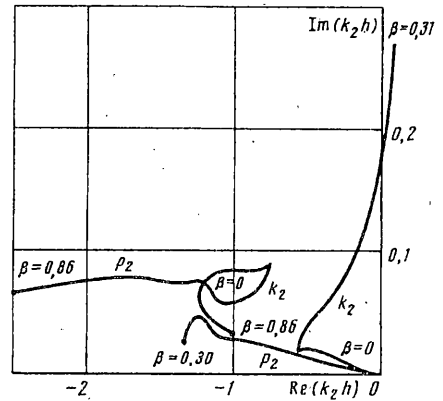
Второй этап вычислений — постепенное смягчение подстилающего полупространства при фиксированной частоте — приводит к «расщеплению» каждого корня на четыре. Однако теперь, в отличие от фиг. 3, все четыре семейства начинаются из одного корня. Волновые числа  $k_2$ ,  $p_2$ , как и на фиг. 2, равны произведениям  $k_1$  на  $\pm i$ , но не потому, что в (11)  $\omega = 0$ , а потому, что в (11)  $\mu^{-1} = 0$ . Здесь удобно ввести новую нумерацию семейств, отличную от предыдущей.



Фиг. 7



Фиг. 8



Фиг. 9

Семейство 1 определим условиями  $\text{Im } k_2 < 0$ ,  $\text{Im } p_2 < 0$ , семейство 2 условиями  $\text{Im } k_2 > 0$ ,  $\text{Im } p_2 > 0$ , семейство 3 условиями  $\text{Im } k_2 < 0$ ,  $\text{Im } p_2 > 0$ , семейство 4 условиями  $\text{Im } k_2 > 0$ ,  $\text{Im } p_2 < 0$ . Все эти условия даны только для предельно жесткого полупространства. Для любого корня  $k_1$ , не лежащего на действительной оси, введенные определения семейств гарантируют, что существует диапазон  $\mu$  выше некоторого значения, в котором корень первого семейства имеет физический смысл. Сразу отметим, что в процессе вычислений автору не встретились случаи, когда корни из других семейств по мере смягчения полупространства приобретали бы физический смысл, поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением корней только первого семейства.

На фиг. 7 показана эволюция трех первых корней при постепенном смягчении полупространства. Для всех трех корней частоты  $a$  разные (для первого  $a = 0,4$ ; для нижнего  $a = 1,45$ ; для верхнего  $a = 0,8$ ), но выбраны с таким расчетом, что все корни находятся на первой стадии по частоте, т. е. до выхода к мнимой оси в первой четверти комплексной полуплоскости. На фиг. 7 для трех корней  $k_1$  показаны сначала участки эволюции при изменении частоты от нуля до выбранного значения, а потом участки эволюции при изменении параметра  $\beta = \mu^{-1}$  от нуля. Все три корня ведут себя одинаково: они движутся вправо и по направлению к действительной оси, а затем пересекают ее. Кроме того, на фиг. 7 показано движение волновых чисел  $k_2$ ,  $p_2$  при смягчении полупространства. Эти числа тоже ведут себя одинаково: они стремятся вправо к мнимой



оси и пересекают ее. Первое же пересечение лишает соответствующий корень физического смысла. Для первого корня это пересечение происходит примерно при  $\beta = 0,015$ ; для нижнего — при  $\beta = 0,38$ ; для верхнего корня — при  $\beta = 0,88$ .

Корень, соответствующий классической волне Рэлея, при смягчении полупространства выходит из нуля и движется к предельному значению. Когда все корни для слоистого пакета находятся еще вдали от мнимой оси (т. е. на первой стадии по частоте), рэлеевский корень проходит весь путь, не теряя физического смысла. Когда же корни для слоя выходят к мнимой оси, положение меняется. Рэлеевский корень выходит из нуля и идет к предельному значению, но на его пути оказывается вышедший к оси корень для слоя. На фиг. 8 показано, что при этом рэлеевский корень меняет траекторию, а встреченный им корень продолжает движение к предельному значению рэлеевского корня. Для рассматриваемого примера это означает, что при смягчении полупространства до уровня слоя оставшаяся рэлеевская волна получится не путем эволюции рэлеевской волны в подстилающем полупространстве, а путем эволюции бегущей волны в слое.

На фиг. 9 показано, как при этом ведут себя волновые числа  $k_2$ ,  $p_2$ . Здесь видно, как теряет физический смысл рэлеевский корень с переходом  $k_2$  через мнимую ось. Это происходит при  $\beta = 0,30$ , т. е. раньше, чем корень  $k_1$  переходит при  $\beta = 0,33$  с правой полуплоскости на левую (иначе пришлось бы констатировать непрерывный переход волны, затухающей влево в волну, затухающую вправо).

Предложенная методика, основанная на непрерывном изменении корней дисперсионного уравнения с изменением как частоты, так и отношений жесткостей подстилающего полупространства и верхних слоев, позволяет достаточно уверенно исследовать поведение корней с учетом изменения их физического смысла.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
2. Phynney R. A. Propagation of leaking interface waves//Bull. Seismol. Soc. America. 1961. V. 51. No. 4. P. 527—555.
3. Болотин В. В. К теории слоистых плит//Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. № 3. С. 65—72.
4. Новичков Ю. Н. Распространение плоских волн в слоистых упругих средах регулярной структуры//Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 6. С. 65—73.
5. Lysmer J., Waas G. Shear waves in plane infinite structures//Proc. Amer. Soc. Civil Eng. J. Eng. Mech. Div. 1972. V. 98. No. 1. P. 85—105.
6. Ewing W. M., Jardetsky W. S., Press F. Elastic waves in layered media. New York: McGraw-Hill, 1957. 380 p.
7. Haskell N. A. The dispersion of surface waves waves in multilayered media//Bull. Seismol. Soc. America. 1953. V. 43. No. 1. P. 17—34.
8. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
9. Lico J. E. Impedance functions for a rigid foundation on a layered medium//Nucl. Eng. and Design. 1974. V. 31. No. 2. P. 204—217.
10. Тяпин А. Г. Комплексные корни дисперсионного уравнения для волн Рэлея в многослойном пакете на жестком полупространстве//Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 6. С. 139—143.