МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1994

УДК 539.9

© 1994 г. И. А. СОЛДАТЕНКОВ

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛОСЫ ПЕРЕМЕННОЙ ШИРИНЫ

В [1] с помощью преобразования Фурье было получено решение первой основной задачи теории упругости для полосы постоянной ширины и выполнен асимптотический анализ этого решения для тонкой полосы. В результате были установлены алгебраические зависимости граничных перемещений от граничных напряжений и их производных. Главные члены данных зависимостей соответствуют модели Винклера деформирования полосы, согласно которой величины продольного сдвига и поперечного сжатия полосы пропорциональны касательному и нормальному граничным напряжениям, соответственно.

В [2] рассматривалась смешанная задача для упругой полосы, одна из сторон которой описывается линией отличной от прямой. Был предложен алгоритм сведения данной задачи к последовательному решению ряда задач для полосы постоянной ширины. При изучении в [3] контактной задачи для полосы указанного вида было получено асимптотическое (вырожденное) решение, справедливое при малом отношении толщины полосы к длине области контакта. Главные члены этого решения также отвечают модели Винклера деформирования полосы.

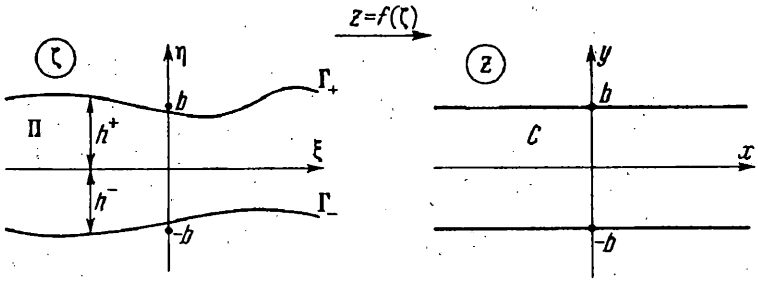
В [4] исходная область отображалась на близкую к ней каноническую, с последующим использованием для решения задачи метода возмущений.

Ниже рассматривается вторая основная задача теории упругости для полосы переменной ширины. Путем конформного отображения рассматриваемой полосы на полосу постоянной ширины и представления неизвестных функций интегралами Фурье задача сводится к системе четырех интегральных уравнений. Для случая тонкой полосы со слабоизменяющейся шириной получены асимптотические зависимости граничных напряжений от граничных перемещений, главные члены которых соответствуют модели Винклера.

1. Постановка задачи и основные уравнения. При дальнейшем изложении для краткости в местах, где это не может вызвать недоразумений будут опускаться аргументы в записях функций. Частная производная функции нескольких переменных обозначается соответствующей переменной, взятой в качестве индекса. Для обозначения производной функции одной переменной также используется традиционное обозначение штрихом и $f^{(n)}(x) \equiv d^n f(x)/dx^n$. Результат действия оператора Фурье обозначается чертой над символом соответствующей функции: $\bar{f}(\lambda)$. Для обозначения класса абсолютно интегрируемых функций одного переменного используется запись $L(-\infty, \infty)$, а для класса функций, имеющих n непрерывных производных — запись $C^n(-\infty, \infty)$. Знаком N_0^∞ будет обозначаться множество целых неотрицательных чисел. Граничное значение функции определяется, вообще говоря, как ее продолжение по непрерывности из области на границу.

Кроме того, ниже будут использоваться классы функций R и S такие, что $f(x) \in R$, если $\forall n \in N_0^\infty$: $f(x) \in C^1(-\infty, \infty)$, $(1+|x|^n) f(x) \in L(-\infty, \infty)$ и $f(x) \in S$, если $\forall n \in N_0^\infty$: $f^{(n)}(x) \in C(-\infty, \infty) \cap L(-\infty, \infty)$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f^{(n)}(x) = 0$, $(1+|x|^2) f(x) \in L(-\infty, \infty)$.

В [5] рассматривалась двумерная задача для полосы П переменной ширины



при известных перемещениях ее границ. Повторим в данном пункте основные результаты [5], необходимые для дальнейшего изложения.

Введем в плоскости полосы П комплексную переменную $\zeta = \xi + i\eta$ и опишем границы $\Gamma_\pm$ полосы П функциями $\eta = \pm h^\pm(\xi)$ (фигура). Поставим для перемещений $u(\xi, \eta)$, $v(\xi, \eta)$ граничные условия:

$$u|_{\Gamma_-} = w_1(\xi), \quad v|_{\Gamma_-} = w_2(\xi), \quad u|_{\Gamma_+} = w_3(\xi), \quad v|_{\Gamma_+} = w_4(\xi) \tag{1.1}$$

где $w_j(\xi)$, $j = \overline{1, 4}$ — заданные функции. Затем, используя представление Папковича — Нейбера, выразим перемещения u и v через две гармонические функции φ_1, φ_2:

$$\begin{aligned} 2Gu(\xi, \eta) &= -\varphi_{1\xi}(\xi, \eta) - \eta\varphi_{2\xi}(\xi, \eta) \\ 2Gv(\xi, \eta) &= \varkappa\varphi_2(\xi, \eta) - \varphi_{1\eta}(\xi, \eta) - \eta\varphi_{2\eta}(\xi, \eta) \end{aligned} \tag{1.2}$$

где G — модуль сдвига, $\varkappa = 3 - 4\nu$, ν — коэффициент Пуассона.

В результате придем к следующей граничной задаче для полосы П: найти гармонические в П функции φ_1, φ_2 такие, что граничные условия (1.1) удовлетворяются в силу равенств (1.2).

Далее, перейдем от полосы П к полосе C постоянной ширины $2b$, для чего конформно отобразим П на C (фиг. 1). Пусть $z = f(\zeta)$ — функция, осуществляющая данное отображение, а $\zeta = g(z) \equiv \Lambda(x, y) + iM(x, y) \equiv x + l(x, y) + i(y + m(x, y))$ — функция обратная к $f(\zeta)$. Введем в рассмотрение функции

$$\Phi_n(x, y) = \varphi_n(\Lambda(x, y), M(x, y)) \quad (n = 1, 2) \tag{1.3}$$

которые являются гармоническими в C, так как φ_1 и φ_2 гармонические в П. Кроме того, введем функции

$$U(x, y) = 2Gu(\Lambda(x, y), M(x, y)), \quad V(x, y) = 2Gv(\Lambda(x, y), M(x, y)) \tag{1.4}$$

Тогда, переходя в (1.2) от переменных ξ, η к переменным x, y, нетрудно получить соотношения вида

$$\begin{aligned} U &= -\Phi_{1x} - y\Phi_{2x} - \gamma_1\Phi_{1x} + \gamma_2\Phi_{1y} - \gamma_3\Phi_{2x} + \gamma_4\Phi_{2y} \\ V &= \varkappa\Phi_2 - \Phi_{1y} - y\Phi_{2y} - \gamma_2\Phi_{1x} - \gamma_1\Phi_{1y} - \gamma_4\Phi_{2x} - \gamma_3\Phi_{2y} \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} &\gamma_1 = \Delta + (1 + \Delta)m_y, \quad \gamma_2 = (1 + \Delta)m_x, \quad \gamma_3 = y\Delta + (1 + \Delta)(m + ym_y + mm_y) \\ &\gamma_4 = (1 + \Delta)(y + m)m_x, \quad \Delta = (M_x^2 + M_y^2)^{-1} - 1 \end{aligned} \tag{1.6}$$

причем, если ввести функции

$$\begin{aligned} W_j(x) &= 2Gw_j(\Lambda(x, -b)) \quad (j = 1, 2) \\ W_j(x) &= 2Gw_j(\Lambda(x, b)) \quad (j = 3, 4) \end{aligned} \tag{1.7}$$

то

$$U(x,-b)=W_1(x),\ V(x,-b)=W_2(x);\ U(x,b)=W_3(x),\ V(x,b)=W_4(x) \quad (1.8)$$

С учетом равенств (1.5) и (1.8) имеем следующую граничную задачу для полосы C, в которую переходит исходная задача (1.1), (1.2): найти гармонические в C функции Φ_1, Φ_2 такие, что граничные условия (1.8) удовлетворяются в силу равенств (1.5).

Для решения последней задачи возьмем $A_k(\lambda) \in R$ $(k=\overline{1,4})$ и представим

$$\Phi_1(x,y)=(2\pi)^{-1/2}\,\text{v. p.}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{A_1(\mu)}{\mu}\frac{\operatorname{ch}\mu y}{\operatorname{ch}\mu b}+\frac{A_2(\mu)}{\mu^2}\frac{\operatorname{sh}\mu y}{\operatorname{ch}\mu b}\right]e^{-i\mu x}d\mu$$

$$\Phi_2(x,y)=(2\pi)^{-1/2}\,\text{v. p.}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{A_3(\mu)}{\mu}\frac{\operatorname{ch}\mu y}{\operatorname{ch}\mu b}+\frac{A_4(\mu)}{\mu}\frac{\operatorname{sh}\mu y}{\operatorname{ch}\mu b}\right]e^{-i\mu x}d\mu \quad (1.9)$$

Будем считать, что $w_j(\xi)$, а также функции $l, m, l_y, m_y, xl, xm, xl_y$ и xm_y при $y=\pm b$ принадлежат классу S. В этом случае классу S будут принадлежать и функции $W_j(x)$, $\gamma_j(x,\pm b)$. Кроме того, допустим, что функции

$$f_{1j}(\xi)=\int_{-\infty}^{\xi}|w_j(\sigma)|\,d\sigma,\quad f_{2j}(\xi)=\int_{\xi}^{\infty}|w_j(\sigma)|\,d\sigma$$

являются абсолютно интегрируемыми на интервалах $(-\infty,0]$ и $[0,\infty)$, соответственно.

Полагая $y=\pm b$, заменим левые части равенств (1.5) на функции $W_j(x)$ согласно (1.8) и перейдем в полученных четырех равенствах к Фурье-образам [5]. В результате, с учетом выражений (1.9) получим следующую систему уравнений для $A_k(\lambda)$:

$$P_k(\lambda)=A_k(\lambda)+(2\pi)^{-1/2}\beta_{km}(\lambda)\left[\text{v. p.}\int_{-\infty}^{\infty}b^*_{mjl}(\mu)\ \bar{\gamma}_l^{[m]}(\lambda-\mu)A_j(\mu)\,d\mu\right] \quad (1.10)$$

где $P_k(\lambda)=\beta_{kj}(\lambda)\overline{W}_j(\lambda)$, $\beta_{km}(\lambda)$, $b^*_{mjl}(\lambda)$ известные функции, выражения для которых приведены в [5], а $\bar{\gamma}_l^{[m]}(\lambda)$ $(m=\overline{1,4})$ являются Фурье-образами функций

$$\gamma_l^{[m]}(x)=\begin{cases}\gamma_l(x,-b) & (m=1,2)\\ \gamma_l(x,b) & (m=3,4)\end{cases} \quad (1.11)$$

Здесь и далее по индексу в квадратных скобках суммирование не производится. Отметим также, что функции $\overline{W}_j(\lambda)$, $P_k(\lambda)$, $\bar{\gamma}_l^{[m]}(\lambda)$ принадлежат классу R, так как $W_j(x)\in S$ и $\gamma_l(x,\pm b)\in S$.

Далее будет рассматриваться случай полосы Π, границы $\Gamma_\pm$ которой слабо отличаются от прямых $\eta=\pm b$. А именно, положим

$$h^\pm(\xi)=b-\delta^\pm(\xi),\quad \delta^\pm(\xi)=\varepsilon\delta_0^\pm(\xi) \quad (1.12)$$

где ε — малый параметр, $\delta_0^\pm(\xi)$ — заданные функции. Будем считать, что

$$\delta^{\pm(k)}(\xi)\in C(-\infty,\infty),\quad |\delta^{\pm(k)}(\xi)|\le\varepsilon_k\equiv\max_{\xi}|\delta^{\pm(k)}(\xi)|\ \ (k=\overline{0,8}) \quad (1.13)$$

Для описания отображения $f(\zeta)$ полосы Π на близкую к ней полосу C воспользуемся вариационными принципами конформных отображений [6]. В результате, учитывая соотношения (1.12) и (1.13), получим с точностью до малых второго порядка относительно ε:

$$l(x,y)=\varepsilon l_0(x,y),\quad m(x,y)=\varepsilon m_0(x,y) \quad (1.14)$$

$$
\left.\begin{aligned}
m(x,y) &= \frac{1}{4b}\left[-\sin\frac{\pi(b+y)}{2b} I^+(x,y) + \sin\frac{\pi(b-y)}{2b} I^-(x,y)\right] \\
I^{\pm}(x,y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{\pm}(t)\left[\operatorname{ch}\frac{\pi(x-t)}{2b} + \cos\frac{\pi(b\pm y)}{2b}\right]^{-1} dt
\end{aligned}\right\} \qquad (1.15)
$$

где l_0, m_0 суть функции l, m при $\delta^{\pm}(\xi) = \delta_0^{\pm}(\xi)$.

Введем в рассмотрение оператор $L_{kj}^{\wedge}$:

$$
(L_{kj}^{\wedge} A_j)(\lambda) = (2\pi)^{-1/2} \beta_{km}(\lambda) \text{ v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} b_{mjl}^{*}(\mu) \bar{\gamma}_l^{[m]}(\lambda-\mu) A_j(\mu)\, d\mu \qquad (1.16)
$$

и запишем уравнения (1.10) в виде

$$
P_k = A_k + L_{kj}^{\wedge} A_j \qquad (1.17)
$$

При наложенных выше на функции $l(x, y)$, $m(x, y)$ ограничениях оператор $L_{kj}^{\wedge}$ отображает класс функций R в себя. Возьмем тогда в качестве приближенного решения уравнений (1.17) функции $A_k^{[N]}(\lambda;\varepsilon) \in R$ вида

$$
A_k^{[N]} = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n (L^{\wedge})_{kj}^n P_j \qquad (1.18)
$$

где $(L^{\wedge})_{kj}^n P_j$ есть результат n-кратного действия оператора $L^{\wedge}$ на вектор P, а аргументом ε указано на зависимость величины $A_k^{[N]}$ от ε. Согласно определению (1.16) оператора $L_{kj}^{\wedge}$ и равенству (1.12), каждое слагаемое с индексом n в (1.18) имеет порядок малости $O(\varepsilon^n)$.

Приближенному решению $A_k^{[N]}$, на основании равенств $z = f(\zeta)$, (1.8), (1.3) и (1.2), отвечают некоторые перемещения $u^{[N]}$, $v^{[N]}$ точек полосы П и связанные с $u^{[N]}$, $v^{[N]}$ равенствами типа (1.1) граничные перемещения $w_j^{[N]}$. Таким образом, функции $A_k^{[N]}(\lambda;\varepsilon)$ определяют точное решение задачи теории упругости для полосы П при граничных перемещениях $w_j^{[N]}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема. При наложенных на функции $w_j(\xi)$, $l(x, y)$, $m(x, y)$ условиях, для любого $N \in N_0^{\infty}$ существуют константы $\varepsilon_* > 0$, h_n и функции $t_j(\xi;\varepsilon)$ такие, что при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$ и $n \in N_0^{\infty}$:

$$
w_j^{[N]}(\xi;\varepsilon) - w_j(\xi) = \varepsilon^{N+1} t_j(\xi;\varepsilon), \quad |t_j^{(n)}(\xi;\varepsilon)| \le h_n, \quad \xi \in (-\infty, \infty)
$$

причем ε_* от N не зависит.

Согласно данной теореме, граничные перемещения $w_j^{[N]}(\xi;\varepsilon)$, отвечающие приближенному решению $A_k^{[N]}(\lambda;\varepsilon)$ вида (1.18) будут при уменьшении ε поточечно сколь угодно мало отличаться от заданных граничных перемещений $w_j(\xi)$, причем это отличие имеет порядок малости $O(\varepsilon^{N+1})$. В свою очередь, из данного результата, при условии непрерывной зависимости решения задачи теории упругости от граничных перемещений (ее корректности) [7] следует, что приближенное решение граничной задачи для полосы П, определяемое функциями $A_k^{[N]}(\lambda;\varepsilon)$ стремится при $\varepsilon \to 0$ к точному решению, причем тем быстрее, чем больше число N.

2. Приближенное решение задачи. В этом пункте будут установлены зависимости касательного q_τ и нормального q_ν напряжений на границе Γ_+ от перемещений $w_j(\xi)$, исходя из приближенного решения уравнения (1.17) вида (1.18). При этом, ввиду предполагаемой близости границ полосы П к прямым $\eta = \pm b$ (- малости параметра ε) члены, содержащие произведения функций l, m, γ и их производных и, поэтому, имеющие порядок малости $O(\varepsilon^k)$, $k \ge 2$

будут отбрасываться. Учитывая это, положим в (1.18) $N=1$, в результате чего получим следующее приближение для функций $A_k(\lambda)$:

$$A_k(\lambda) = P_k(\lambda) - (L_{kj}^{\wedge}P_j)(\lambda) \tag{2.1}$$

Введем в рассмотрение функции вида

$$\overline{G}_{mln}(\lambda) = b_{mjl}^{*}(\lambda)\,\beta_{jn}(\lambda),\ \ \overline{D}_{ml}(\lambda) = \overline{G}_{mln}(\lambda)\,\overline{W}_n(\lambda)$$

$$\overline{\psi}_m(\lambda) = \overline{W}_m(\lambda) - (2\pi)^{-1/2}\,\text{v. p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\gamma}_l^{[m]}(\lambda-\mu)\,\overline{D}_{ml}(\mu)\,d\mu \tag{2.2}$$

Тогда с учетом определения (1.16) оператора $L_{kj}^{\wedge}$ и соотношения $P_k = \beta_{km}\overline{W}_m$ получим из (2.1):

$$A_k(\lambda) = \beta_{km}(\lambda)\,[\overline{W}_m(\lambda) - (2\pi)^{-1/2}\,\text{v. p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\gamma}_l^{[m]}(\lambda-\mu)\,\overline{D}_{ml}(\mu)\,d\mu\,] \tag{2.3}$$

Выражение (2.3) позволяет по образам Фурье $\overline{W}_j(\lambda)$ известных функций $W_j(x)$ найти функции $A_k(\lambda)$, которые согласно равенствам (1.9) определят $\Phi_1(x, y)$, $\Phi_2(x, y)$, а следовательно и функции $\varphi_1(\xi, \eta)$, $\varphi_2(\xi, \eta)$. После этого, на основе представления Папковича—Нейбера для компонент σ_ξ, σ_η, $\tau_{\xi\eta}$ тензора напряжений через φ_1 и φ_2 [8] нетрудно будет найти касательное q_τ и нормальное q_ν напряжения на границе Γ_+.

В дальнейшем указанная принципиальная схема нахождения q_τ и q_ν будет несколько видоизменена в целях упрощения выкладок.

2.1. Установим связь напряжений $q_\tau(\xi)$, $q_\nu(\xi)$ с функциями $\Phi_1(x, y)$, $\Phi_2(x, y)$. Для этого введем функции

$$Q_\tau(x) = q\tau(\Lambda(x, b)),\ \ Q_\nu(x) = q_\nu(\Lambda(x, b)) \tag{2.4}$$

представляющие собой образы функций $q_\tau(\xi)$ и $q_\nu(\xi)$ при отображении $z = f(\zeta)$.

Напомним, что, если ξ и $\eta = h^+(\xi)$ — координаты некоторой точки границы Γ_+ полосы Π, то образ этой точки в плоскости z будет иметь координаты x и $y = b$, причем

$$\xi = \Lambda(x, b),\quad \eta = h^+(\xi) = M(x, b) \tag{2.5}$$

Кроме того, при $\xi = \Lambda(x, b)$ имеет место равенство $h^{+1}(\xi)\,\Lambda_x(x, b) = M_x(x, b)$ из которого следует соотношение

$$h^{+1}(\xi)\,|_{\xi=\Lambda(x,b)} = m_x(x, b) \tag{2.6}$$

Запишем теперь связь напряжений q_τ, q_ν с компонентами σ_ξ, σ_η, $\tau_{\xi\eta}$ [8, 9]:

$$q_\tau(\xi) = [h^{+1}(\xi)\,(\sigma_\eta(\xi, \eta) - \sigma_\xi(\xi, \eta)) + \tau_{\xi\eta}(\xi, \eta)\,]\,|_{\eta=h^+(\xi)}$$

$$q_\nu(\xi) = [\sigma_\eta(\xi, \eta) - 2h^{+1}(\xi)\,\tau_{\xi\eta}(\xi, \eta)\,]\,|_{\eta=h^+(\xi)} \tag{2.7}$$

при этом, согласно представлению Папковича—Нейбера [8]:

$$\sigma_\xi(\xi, \eta) = 2G\,\partial u(\xi, \eta)/\partial\xi + 2\nu\varphi_{2\eta}(\xi, \eta)$$

$$\sigma_\eta(\xi, \eta) = -2G\partial u(\xi, \eta)/\partial\xi + 2\,(1-\nu)\,\varphi_{2\eta}(\xi, \eta) \tag{2.8}$$

$$\tau_{\xi\eta}(\xi, \eta) = 2G\partial v(\xi, \eta)/\partial\xi - 2\,(1-\nu)\,\varphi_{2\xi}(\xi, \eta)$$

Подставим (2.8) в (2.7) и перейдем в полученных равенствах от переменной ξ к x: $\xi = \Lambda(x, b)$. В результате, принимая во внимание соотношения (1.3), (1.7) и (2.4), нетрудно получить искомую зависимость напряжений q_τ, q_ν от функций Φ_1, Φ_2:

$$q_\tau(\Lambda(x, b)) \equiv Q_\tau(x) = W_4'(x) - 2(1-\nu)\Phi_{2x}(x, b) + m_x(x, b)[-2W_3'(x) + 2(1-\nu)\Phi_{2y}(x, b) - \Phi_{1xx}(x, b) - b\Phi_{2xx}(x, b)] + m_y(x, b)[-(1-2\nu) \times \Phi_{2x}(x, b) + \Phi_{1xy}(x, b) + b\Phi_{2xy}(x, b)] \quad (2.9)$$

$$q_\nu(\Lambda(x, b)) \equiv Q_\nu(x) = -W_3'(x) + 2(1-\nu)\Phi_{2y}(x, b) + m_x(x, b)[-2W_4'(x) + (5-6\nu)\Phi_{2x}(x, b) - \Phi_{1xx}(x, b) - b\Phi_{2xy}(x, b)] + m_y(x, b)[-2(1-\nu) \times \Phi_{2y}(x, b) - \Phi_{1xx}(x, b) - b\Phi_{2xx}(x, b)]$$

2.2. Фигурирующие в (2.9) производные функции Φ_1, Φ_2 выражаются через функции $\overline{W}_j(\lambda)$ согласно равенствам (1.9), (2.2) и (2.3). Рассмотрим функцию $\overline{D}_{ml}(\lambda)$, которая непосредственно связана с $\overline{W}_j(\lambda)$.

Функция $\overline{D}_{ml}$ определяется вторым равенством (2.2) в виде произведения $\overline{G}_{mln}\overline{W}_n$. В свою очередь, функция $\overline{G}_{mln}$ определяется первым равенством (2.2) и допускает следующее разложение:

$$\overline{G}_{mln}(\lambda) = \overline{G}^0_{mln}(\lambda) + \overline{G}^1_{mln}(\lambda) \quad (2.10)$$

где $\overline{G}^0_{mln}$ — регулярная часть, такая, что при $k = \overline{0, 5}$:

$$\overline{G}^{0(k)}_{mln}(\lambda) \in L(-\infty, \infty) \cap C^1(-\infty, \infty), \ \lim_{\lambda\to\pm\infty} \overline{G}^{0(k)}_{mln}(\lambda) = 0 \quad (2.11)$$

а функция $\overline{G}^1_{mln}$ имеет вид

$$\overline{G}^1_{mln}(\lambda) = a_{mln} + b_{mln}\lambda + c_{mln}\,\mathrm{th}\,2X + d_{mln}\lambda\,\mathrm{th}\,2X + g_{mln}(\lambda\,\mathrm{ch}\,2X)^{-1} \quad (2.12)$$

причем a_{mln}, b_{mln}, c_{mln}, d_{mln}, g_{mln} зависят только от $\varkappa$, $X = \lambda b$.

Из второго равенства (2.2) в соответствии с разложением (2.10) имеем

$$\overline{D}_{ml}(\lambda) = \overline{D}^0_{ml}(\lambda) + \overline{D}^1_{ml}(\lambda) \quad (2.13)$$

$$\overline{D}^k_{ml}(\lambda) = \overline{G}^k_{mln}(\lambda)\overline{W}_n(\lambda) \quad (k = 0, 1)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$D_{ml}(x) \equiv (2\pi)^{-1/2}\,\mathrm{v.\,p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda\overline{D}_{ml}(\lambda)}{\lambda} e^{-i\lambda x} d\lambda \quad (2.14)$$

Получим выражения для $D_{ml}(x)$ и ее производных через известные функции $W_n(x)$. Из определения функции $D_{ml}(\lambda)$, соотношений (2.10)—(2.12) и принадлежности $\overline{W}_n(\lambda)$ классу R следует, что $\lambda\overline{D}_{ml}(\lambda) \in C^1(-\infty, \infty)$, $(1 + |\lambda|^k) \times \lambda\overline{D}_{ml}(\lambda) \in L(-\infty, \infty)$, $k \in N_0^\infty$ и поэтому, в силу доказанной в [10] теоремы, интеграл в (2.14) сходится. Более того, функция $D_{ml}(x)$ обладает следующими свойствами:

$$D^{(k)}_{ml}(x) \in C(-\infty, \infty), \ |D^{(k)}_{ml}(x)| \le \mathrm{const}, \ x \in (-\infty, \infty), \ k \in N_0^\infty \quad (2.15)$$

Заменим $\overline{D}_{ml}(\lambda)$ в (2.14) правой частью (2.13). В результате получим

$$D_{ml}(x) = D^0_{ml}(x) + D^1_{ml}(x) \quad (2.16)$$

$$D^k_{ml}(x) \equiv (2\pi)^{-1/2}\,\mathrm{v.\,p.}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{G}^k_{mln}(\lambda)\overline{W}_n(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda \ (k = 0, 1)$$

Рассмотрим отдельно слагаемые D^0_{ml} и D^1_{ml} в (2.16).

Пусть $G^0_{mln}(x)$ — прообраз Фурье функции $\overline{G}^0_{mln}(\lambda)$. В силу соотношений (2.11) и теоремы об обращении преобразования Фурье [11], функция $G^0_{mln}(x)$ существует, причем

$$(1 + |x|^3)\, G^0_{mln}(x) \in L(-\infty, \infty) \tag{2.17}$$

Отсюда, учитывая абсолютную интегрируемость функций $\overline{W}_n(\lambda)$, получим по теореме о свертке [11]:

$$D^0_{ml}(x) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G^0_{mln}(x - s)\, W_n(s)\, ds \tag{2.18}$$

Для второго слагаемого в (2.16), принимая во внимание (2.12) и то, что функции $W_n^{(k)}(x) \in S$ $(k = 0, 1)$ удовлетворяют условиям теоремы об обращении преобразования Фурье, можно получить выражение

$$D^1_{ml}(x) = d_{mln} W_n(x) + i b_{mln} W_n{}'(x) + c_{mln} I_{0n}(x) + d_{mln} I_{1n}(x) + g_{mln} E_n(x) \tag{2.19}$$

$$I_{kn}(x) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^k \operatorname{th} 2X \overline{W}_n(\lambda)\, e^{-i\lambda x} d\lambda \quad (k = 0, 1) \tag{2.20}$$

$$E_n(x) = (2\pi)^{-1/2} \text{ v. p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda \operatorname{ch} 2X} \overline{W}_n(\lambda)\, e^{-i\lambda x} d\lambda$$

Преобразуем функции $I_{kn}(x)$ и $E_n(x)$. Если ввести обозначения $\overline{f}_{kn}(\lambda) = \lambda^k (1 + X^2)\, \overline{W}_n(\lambda)$, $\overline{k}(\lambda) = i(1 + X^2)^{-1} \operatorname{th} 2X$, то из (2.20) будем иметь

$$I_{kn}(x) = -i (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{k}(\lambda)\, \overline{f}_{kn}(\lambda)\, e^{-i\lambda x} d\lambda \tag{2.21}$$

На основе теоремы об обращении преобразования Фурье, для функции $\overline{k}(\lambda)$ существует абсолютно интегрируемый прообраз Фурье

$$k(x) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{th} 2X}{(1 + X^2)} \sin \lambda x d\lambda \tag{2.22}$$

Поэтому, учитывая, что функция $\overline{f}_{kn}(\lambda)$ имеет прообраз Фурье вида $f_{kn}(x) = i^k (W_n^{(k)}(x) - b^2 W_n^{(k+2)}(x))$, получим из (2.21) с помощью теоремы о свертке

$$I_{kn}(x) = -i^{k+1} (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(x - s)\, (W_n^{(k)}(s) - b^2 W_n^{(k+2)}(s))\, ds \tag{2.23}$$

Для того, чтобы преобразовать выражение (2.20) для $E_n(\overline{x})$ введем в рассмотрение функции

$$T_{1n}(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} W_n(s)\, ds, \quad T_{2n}(x) = \int\limits_{x}^{\infty} W_n(s)\, ds \tag{2.24}$$

и заметим, что $T_{1n}(x) \in L(-\infty, 0]$, $T_{2n}(x) \in L[0, \infty)$. Последние соотношения можно легко вывести из сделанного в п. 1 допущения относительно перемещений $w_j(\xi)$, если учесть малость параметра ε. Кроме того, рассмотрим функцию $\omega_n(x)$ вида

$$\omega_n(x) = T_{1n}(x) - \frac{1}{2} N_n \left(1 + \operatorname{th} \frac{\pi x}{4b}\right), \quad N_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} W_n(s)\, ds \tag{2.25}$$

Для определенной таким образом функции имеют место соотношения

$$\omega_n^{(k)}(x) \in L(-\infty, \infty) \quad (k = 0, 1), \quad \lim_{x \to \pm\infty} \omega_n(x) = 0 \tag{2.26}$$

первое из которых является следствием вышеуказанной абсолютной интегрируемости функций $T_{1n}(x)$ и $T_{2n}(x)$ на интервалах $(-\infty, 0]$ и $[0, \infty)$ соответственно.

Продифференцируем теперь равенство (2.25) по x, после чего, учитывая соотношения (2.26), перейдем в нем к образам Фурье. В результате получим выражение

$$\overline{W}_n(\lambda) = -i\lambda\overline{\omega}_n(\lambda) + (2/\pi)^{1/2} N_n X\,\mathrm{sh}^{-1} 2X$$

подставляя которое в (2.20), будем иметь

$$E_n(x) = E_{nA}(x) + E_{nB}(x) \tag{2.27}$$

$$E_{nA}(x) = -i(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{\omega}_n(\lambda)}{\mathrm{ch}\,2X}e^{-i\lambda x}d\lambda,\quad E_{nB}(x) = \frac{2}{\pi}bN_n\mathrm{v.\,p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\lambda x}}{\mathrm{sh}\,4X}d\lambda$$

Если ввести функцию, $\overline{l}(\lambda) = \mathrm{ch}^{-1}2X$, то, используя теорему о свертке, для первого слагаемого в правой части (2.27), нетрудно получить (аналогично (2.23)):

$$E_{nA}(x) = -i(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} l(x-s)\,\omega_n(s)\,ds$$

или после замены $\omega_n(s)$ правой частью (2.25):

$$E_{nA}(x) = -i(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} l(x-s)\,T_{1n}(s)\,ds + \frac{i}{2}N_n\left(1+\mathrm{th}\frac{\pi x}{8b}\right) \tag{2.28}$$

$$l(x) = (\pi/2)^{1/2}(2b\,\mathrm{ch}(\pi x/4b))^{-1} \tag{2.29}$$

Выполняя интегрирование в выражении для $E_{nB}(x)$, будем иметь

$$E_{nB}(x) = -\tfrac{1}{2}iN_n\,\mathrm{th}(\pi x/8b) \tag{2.30}$$

Подставим выражения (2.28) и (2.30) в (2.27) и положим $T_n(x) \equiv T_{1n}(x)$. В результате придем к следующему выражению для $E_n(x)$:

$$E_n(x) = -i(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} l(x-s)\,T_n(s)\,ds + \frac{i}{2}N_n \tag{2.31}$$

Вернемся теперь к выражению (2.19). Подставляя (2.23) и (2.31) в (2.19), для второго слагаемого в (2.16) получим

$$D^1_{ml}(x) = a_{mln}W_n(x) + ib_{mln}W_n'(x) - ic_{mln}(2\pi)^{-1/2}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty} k(x-s)(W_n(s) - b^2W_n''(s))\,ds + d_{mln}(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} k(x-s)(W_n'(s) -$$

$$- b^2W_n'''(s))\,ds - ig_{mln}\left[(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} l(x-s)\,T_n(s)\,ds - \frac{1}{2}N_n\right] \tag{2.32}$$

Равенство (2.16) совместно с выражениями (2.18) и (2.32) определяет $D_{ml}(x)$ через известные функции $W_n(x)$. Дифференцируя (2.18) и (2.32) по x, нетрудно получить аналогичную зависимость и для производных $D^{(k)}_{ml}(x)$ $(k = \overline{1,5})$. Результатом указанных выкладок будет равенство

$$D^{(k)}_{ml}(x) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} G^0_{mln}(x-s)\,W^{(k)}_n(s)\,ds + a_{mln}W^{(k)}_n(x) +$$

$$+ ib_{mln}W^{(k+1)}_n(x) - ic_{mln}(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} k(x-s)(W^{(k)}_n(s) - b^2W^{(k+2)}_n(s))\,ds +$$

$$+ d_{mln} (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(x-s) \left(W_n^{(k+1)}(s) - b^2 W_n^{(k+3)}(s)\right) ds -$$

$$- ig_{mln} \left[(2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} l(x-s) T_n^{(k)}(s)\, ds - \frac{1}{2} \frac{d^k N_n}{dx^k} \right] \quad (k = \overline{0, 5}) \tag{2.33}$$

2.3. Установим связь производных от Φ_1, Φ_2 из (2.9) с функцией $D_{ml}(x)$. Для этого введем в рассмотрение функции вида

$$\psi_m(x) = W_m(x) - \gamma_l^{[m]}(x) D_{ml}(x) \tag{2.34}$$

В силу соотношений (2.15) и того, что $W_m(x) \in S$, $\gamma_l^{[m]}(x) \in S$, имеем

$$\psi_m^{(k)}(x) \in L(-\infty, \infty) \cap C^1(-\infty, \infty), \quad k \in N_0^\infty \tag{2.35}$$

Умножим обе части равенства (2.34) на $(2\pi)^{-1/2} \exp(i\mu x)$ и, учитывая (2.35), проинтегрируем результат по x от $-\infty$ до ∞. Затем заменим в подынтегральном выражении функцию $D_{ml}(x)$ интегралом из (2.14) и, пользуясь теоремой из [10], поменяем порядок интегрирования по x и λ. В результате получим

$$\overline{\psi}_m(\mu) = \overline{W}_m(\mu) - (2\pi)^{-1/2} \text{ v. p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\gamma}_l^{[m]}(\mu - \lambda) \overline{D}_{ml}(\lambda)\, d\lambda \tag{2.36}$$

Правая часть последнего равенства совпадает с выражением в квадратных скобках в (2.3). Поэтому, из (2.3) и (2.36) следует равенство

$$A_k(\lambda) = \beta_{km}(\lambda) \overline{\psi}_m(\lambda) \tag{2.37}$$

определяющее связь $\overline{\psi}_m(\lambda)$ с функциями $A_k(\lambda)$, через которые, согласно (1.9), выражаются функции Φ_1 и Φ_2.

Рассмотрим теперь выражения (1.9) для Φ_1, Φ_2. Пользуясь доказанной в [10] теоремой о возможности внесения под знак интеграла операции дифференцирования по x и y правых частей (1.9), нетрудно получить из (1.9) следующие выражения для Φ_{1xx}, Φ_{1xy}, Φ_{2x}, Φ_{2y}, Φ_{2xx}, Φ_{2xy} при $y = b$:

$$\Phi_\cdot(x, b) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Omega_{(\cdot)k}(\lambda, b) A_k(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda \tag{2.38}$$

где точкой обозначается любая из совокупностей индексов $1xx$, $1xy$, $2x$, $2y$, $2xx$, $2xy$, а векторы $\Omega_{(\cdot)}(\lambda, b)$ имеют вид

$$\Omega_{(1xx)} = \begin{bmatrix} -\lambda \\ -\text{th}\, X \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega_{(1xy)} = \begin{bmatrix} -i\lambda\, \text{th}\, X \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega_{(2x)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \\ -i\, \text{th}\, X \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{(2y)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \text{th}\, X \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Omega_{(2xx)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\lambda \\ -\lambda\, \text{th}\, X \end{bmatrix}, \quad \Omega_{(2xy)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -i\lambda\, \text{th}\, X \\ -i\lambda \end{bmatrix}$$

Обозначим $\overline{F}_{(\cdot)m}(\lambda, b) = \Omega_{(\cdot)k}(\lambda, b) \beta_{km}(\lambda)$. Тогда, заменяя в (2.38) функции $A_k(\lambda)$ правой частью равенства (2.37), получим

$$\Phi_\cdot(x, b) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{F}_{(\cdot)m}(\lambda, b) \overline{\psi}_m(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda \tag{2.39}$$

Выражение для $\overline{F}_{(\cdot)m}(\lambda, b)$ находится по известным функциям $\Omega_{(\cdot)k}(\lambda, b)$ и $\beta_{km}(\lambda)$. Нетрудно убедиться, что справедливо следующее разложение:

$$\overline{F}_{(\cdot)m}(\lambda, b) = \overline{F}^0_{(\cdot)m}(\lambda) + \overline{F}^1_{(\cdot)m}(\lambda) \tag{2.40}$$

в котором $\overline{F}^0_{(\cdot)m}$ — регулярная часть, такая, что при $k = \overline{0, 7}$:

$$\overline{F}^{0(k)}_{(\cdot)m}(\lambda) \in L(-\infty, \infty) \cap C^1(-\infty, \infty), \quad \lim_{\lambda \to \pm\infty} \overline{F}^{0(k)}_{(\cdot)m}(\lambda) = 0 \tag{2.41}$$

а функция $\overline{F}^1_{(\cdot)m}$ имеет вид

$$\overline{F}^1_{(\cdot)m}(\lambda) = a_{(\cdot)m} + b_{(\cdot)m}\lambda + d_{(\cdot)m}\lambda \operatorname{th} 2X + e_{(\cdot)m}\lambda^2 + f_{(\cdot)m}\lambda^2 \operatorname{th} 2X \tag{2.42}$$

где $a_{(\cdot)m}$, $b_{(\cdot)m}$, $d_{(\cdot)m}$, $e_{(\cdot)m}$, $f_{(\cdot)m}$ зависят только от $\varkappa$, $X = \lambda b$.

В соответствии с разложением (2.40) равенство (2.41) можно записать в виде

$$\Phi_{\cdot}(x, b) = \Phi^0_{\cdot}(x, b) + \Phi^1_{\cdot}(x, b), \; \Phi^k_{\cdot}(x, b) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F}^k_{(\cdot)m}(\lambda)\, \overline{\psi}_m(\lambda)\, e^{-\lambda x} d\lambda \tag{2.43}$$

Рассмотрим слагаемые $\Phi^0_{\cdot}$ и $\Phi^1_{\cdot}$ в (2.43).

Пусть $F^0_{(\cdot)m}(x)$ — прообраз Фурье функции $\overline{F}^0_{(\cdot)m}(\lambda)$. В силу соотношений (2.41) и теоремы об обращении преобразования Фурье, функция $F^0_{(\cdot)m}(x)$ существует, причем

$$(1 + |x|^5)\, F^0_{(\cdot)m}(x) \in L(-\infty, \infty) \tag{2.44}$$

Как указывалось выше, функция $\psi_m(x)$ является абсолютно интегрируемой. Таким же свойством, согласно (2.41), обладает и $\overline{F}^0_{(\cdot)m}(\lambda)$. Пэтому, по теореме о свертке получим для первого слагаемого в (2.43):

$$\Phi^0_{\cdot}(x, b) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} F^0_{(\cdot)m}(x - s)\, \psi_m(s)\, ds \tag{2.45}$$

Принимая во внимание (2.42) и то, что в силу (2.35) функции $\psi^{(k)}_m(x)$ $(k = \overline{0, 2})$ удовлетворяют условиям теоремы об обращении преобразования Фурье, для слагаемого $\Phi^1_{\cdot}$ в (2.43) можно получить выражение

$$\Phi^1_{\cdot}(x, b) = a_{(\cdot)m}\psi_m(x) + ib_{(\cdot)m}\psi_m'(x) - e_{(\cdot)m}\psi_m''(x) + \tag{2.46}$$

$$+ d_{(\cdot)m}J_{1m}(x) + f_{(\cdot)m}J_{2m}(x)$$

$$J_{km}(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^k (\operatorname{th} 2X)\, \overline{\psi}_m(\lambda)\, e^{-i\lambda x} d\lambda \quad (k = 1, 2)$$

Функция $J_{km}(x)$ имеет вид аналогичный виду функции $I_{kn}(x)$ из (2.20). Поэтому $J_{km}(x)$ может быть представлена равенством (2.23), если в последнем заменить W_n на ψ_m. После этого, подставляя выражения (2.45) и (2.46) в равенство (2.43), придем к зависимости функций $\Phi_{\cdot}(x, b)$ от $\psi_m(x)$ следующего вида:

$$\Phi_{\cdot}(x, b) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} F^0_{(\cdot)m}(x - s)\, \psi_m(s)\, ds + a_{(\cdot)m}\psi_m(x) +$$

$$+ ib_{(\cdot)m}\psi_m'(x) - e_{(\cdot)m}\psi_m''(x) + d_{(\cdot)m}(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} k(x - s)\,(\psi_m'(s) - b^2\psi_m'''(s))\, ds +$$

$$+ if_{(\cdot)m}(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} k(x - s)\,(\psi_m''(s) - b^2\psi^{(4)}_m(s))\, ds \tag{2.47}$$

Цепочка равенств (2.9), (2.47), (2.34), (2.33), (1.7) устанавливает явную зависимость напряжений $q_\tau(\xi)$, $q_\nu(\xi)$ на границе Γ_+ от перемещений $w_j(\xi)$. Отметим, что эта зависимость является приближенной, так как определяет значения q_τ, q_ν, соответствующие в точности лишь граничным перемещениям $w_j^{[1]}(\xi)$, которые отличаются от заданных $w_j(\xi)$ на величину $\varepsilon^2 t_j(\xi;\varepsilon)$.

3. Асимптотический анализ решения задачи. Вышеустановленная зависимость напряжений q_τ, q_ν от граничных перемещений w_j является функциональной, так как функции $w_j(\xi)$ входят в подынтегральные выражения. Цель дальнейшего рассмотрения состоит в получении упрощенной алгебраической (поточечной) зависимости $q_\tau(\xi)$ и $q_\nu(\xi)$ от величин $w_j(\xi)$, $w_j'(\xi)$, дающей асимптотику функциональной зависимости при $b\to 0$.

Упрощение зависимости q_τ, q_ν от w_j будет достигаться путем разложения по формуле Тейлора подынтегральных функций $W_n(s)$ и $\psi_m(s)$ в соотношениях (2.33) и (2.47) в окрестности точки $s=x$. При этом для функций $m(x,y)$ и $\gamma_l^{[m]}(x)$, фигурирующих в (2.9) и (2.34), будут использоваться представления через $\delta^\pm(x)$ и $\delta^{\pm\prime}(x)$, получаемые также на основе разложения Тейлора функций $\delta^\pm(t)$ в интеграле (1.15).

Для выполнения оценок остаточных членов в указанных разложениях введем в рассмотрение константы Θ_{-1}, Θ_k такие, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}|w_j(\xi)|\,d\xi\le\Theta_{-1},\quad |w_j^{(k)}(\xi)|\le\Theta_k\quad (k=\overline{0,7})\tag{3.1}$$

Существование подобных констант следует из принадлежности функций $w_j(\xi)$ классу S.

3.1. Рассмотрим вначале функции $m(x,y)$ и $\gamma_l^{[m]}(x)$. Считая $y\in(-b,b)$, продифференцируем обе части равенств (1.15) по x и y. В результате получим

$$m^{(k)}(x,y)=\frac{\pi}{8b^2}\left[-\sin Y^+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta^{+(k)}(t)\,dt}{\operatorname{ch}X_0+\cos Y^+}+\sin Y^-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta^{-(k)}(t)\,dt}{\operatorname{ch}X_0+\cos Y^-}\right]$$

$$m_y^{(k)}(x,y)=\frac{-\pi}{8b^2}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta^{+(k)}(t)(\operatorname{ch}X_0\cos Y^++1)\,dt}{(\operatorname{ch}X_0+\cos Y^+)^2}+\right.\tag{3.2}$$

$$\left.+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta^{-(k)}(t)(\operatorname{ch}X_0\cos Y^-+1)\,dt}{(\operatorname{ch}X_0+\cos Y^-)^2}\right]$$

$$k=\overline{0,5},\quad m^{(k)}(x,y)\equiv\partial^k m(x,y)/\partial x^k,\quad m_y^{(k)}(x,y)=\partial^k m_y(x,y)/\partial x^k$$

$$X_0=\pi(x-t)/(2b),\quad Y^\pm=\pi(b\pm y)/(2b)$$

Отметим допустимость внесения под знак интеграла операции дифференцирования функций $I^\pm(x,y)$ в (1.15) [12], так как в силу (1.13), интегралы в (3.2) сходятся равномерно по $y\in(-b,b)$, а соответствующие подынтегральные выражения непрерывны при $x\in(-\infty,\infty)$, $y\in(-b,b)$.

Далее, учитывая (1.13), разложим $\delta^{\pm(k)}(t)$ по формуле Тейлора [12]:

$$\delta^{\pm(k)}(t)=\delta^{\pm(k)}(x)+\delta^{\pm(k+1)}(x)(t-x)+{}^1\!/_2\,\delta^{\pm(k+2)}(t_1)(t-x)^2\tag{3.3}$$

$$(x\lessgtr t_1\lessgtr t,\quad k=\overline{0,5})$$

Заменим функцию $\delta^{\pm(k)}(t)$ в (3.2) правой частью (3.3), возьмем интегралы, соответствующие первым двум слагаемым в (3.3), а интегралы, отвечающие третьему слагаемому в (3.3) оценим по абсолютному значению, пользуясь неравенством из (1.13). В результате можно прийти к следующим соотношениям:

$$m^{(k)}(x, y) = \frac{1}{2b}\left[-\delta^{+(k)}(x)(b + y) + \delta^{-(k)}(x)(b - y)\right] + R_{1k}(x, y)$$

$$m_y^{(k)}(x, y) = -\frac{1}{2b}\left[\delta^{+(k)}(x) + \delta^{-(k)}(x)\right] + R_{2k}(x, y) \tag{3.4}$$

$$|R_{1k}(x, y)| \le 4/3 b^2 \varepsilon_{k+2}, \quad |R_{2k}(x, y)| \le 4/3 \pi b \varepsilon_{k+2} \quad (k = \overline{0, 5})$$

Если теперь выражения для m, m_x, m_y из (3.4) подставить в равенства (1.6), (1.11), определяющие функции $\gamma_l^{[m]}(x)$, то нетрудно будет получить

$$\gamma_1^{[m](k)}(x) = \frac{1}{2b}\left[\delta^{+(k)}(x) + \delta^{-(k)}(x)\right] + q_{1k}^{[m]}(x)$$

$$\gamma_2^{[m](k)}(x) = \begin{cases} \delta^{-(k+1)}(x) + q_{2k}^{[m]}(x) & (m = 1, 2) \\ -\delta^{+(k+1)}(x) + q_{2k}^{[m]}(x) & (m = 3, 4) \end{cases}$$

$$\gamma_3^{[m](k)}(x) = 1/2\left[-\delta^{+(k)}(x) + \delta^{-(k)}(x)\right] + q_{3k}^{[m]}(x) \tag{3.5}$$

$$\gamma_4^{[m](k)}(x) = \begin{cases} -b\delta^{-(k+1)}(x) + q_{4k}^{[m]}(x) & (m = 1, 2) \\ -b\delta^{+(k+1)}(x) + q_{4k}^{[m]}(x) & (m = 3, 4) \end{cases}$$

$$|\gamma_l^{[m](k)}(x)| \le 6b^{-(k+1)+\sigma_l} S^{\varepsilon}_{k,\,k+3}, \quad |q_{lk}^{[m]}(x)| \le 6b^{-(k+1)+\sigma_l} S^{\varepsilon}_{k+2,\,k+3}$$

$$k = \overline{0, 4}, \quad S^{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \sum_{k=\alpha}^{\beta} b^k \varepsilon_k, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = \sigma_4 = 1$$

Соотношения (3.4) и (3.5) определяют функции $m(x, y)$, $\gamma_l^{[m]}(x)$ и их производные через величины $\delta^{\pm(k)}(x)$.

3.2. Рассмотрим выражения (2.33), связывающие функции $D_{ml}^{(k)}(x)$ с известными функциями $W_n(x)$. Прежде всего заметим, что, используя соотношения (3.4), из неравенств (1.13), (3.1) нетрудно получить аналогичные неравенства и для функций $W_n(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |W_n(x)|\, dx \le \chi_{-1}, \quad |W_n^{(k)}(x)| \le \chi_k \quad (k = \overline{0, 7}) \tag{3.6}$$

при этом константы χ_k связаны с константами ε_k и Θ_k следующим образом:

$$\chi_k = 2G\left[\Theta_k + O(\varepsilon)\right] \quad (k = \overline{-1, 8}) \tag{3.7}$$

$$S^{\chi}_{35} = 2G\left[S^{\theta}_{35} + 80b^{-1}\left(S^{\varepsilon}_{03}S^{\theta}_{25} + S^{\varepsilon}_{26}S^{\theta}_{13}\right)\right], \quad S^{\theta}_{\alpha\beta} = \sum_{k=\alpha}^{\beta} b^k \Theta_k$$

Принимая во внимание определение функций $T_n(x)$ и то, что $W_n(x) \in S$, представим согласно формуле Тейлора [12]:

$$T_n^{(j)}(s) = \sum_{k=0}^{3-j} \frac{1}{k!} T_n^{(k+j)}(x)(s - x)^k + \frac{1}{(4 - j)!} T_n^{(4)}(s_{0j})(s - x)^{(4-j)} \quad (j = \overline{0, 3})$$

$$W_n^{(j)}(s) = \sum_{k=0}^{2-j} \frac{1}{k!} W_n^{(k+j)}(x)(s - x)^k + \frac{1}{(3 - j)!} W_n^{(3)}(s_{1j})(s - x)^{(3-j)} \quad (j = \overline{0, 2}) \tag{3.8}$$

где $x \lessgtr s_{0j}$, $s_{1i} \lessgtr s$ и кроме того $T_n^{(k)}(x) = W_n^{(k-1)}(x)$, $k \ge 1$.

Положим в равенстве (2.33) $k=0$, подставим в его правую часть разложения (3.8) и затем сгруппируем содержащие производную $W_n^{(3)}$ слагаемые, обозначив их через r_{ml0}. Тогда придем к выражению

$$D_{ml}(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{(-1)^k}{k!} W_n^{(k)}(x) (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} t^k G_{mln}^0(t)\, dt + a_{mln} W_n(x) +$$

$$+ ib_{mln} W_n'(x) + [d_{mln} W_n'(x) - ic_{mln}(W_n(x) - b^2 W_n''(x))] (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} k(t)\, dt +$$

$$+ [ic_{mln} W_n'(x) - d_{mln} W_n''(x)] (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} tk(t)\, dt - \frac{i}{2} c_{mln} W_n''(x) (2\pi)^{-1/2} \times \tag{3.9}$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} t^2 k(t)\, dt + ig_{mln} \left[\frac{1}{2} N_n - \sum_{k=0}^{3} \frac{(-1)^k}{k!} T_n^{(k)}(x) (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} t^k l(t)\, dt\right] + r_{ml0}(x)$$

причем, в силу (3.6):

$$|r_{ml0}(x)| \le \chi_3 \max_n \left\{ \frac{1}{6} (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} |t^3 G_{mln}^0(t)|\, dt + |d_{mln}| \left(\frac{1}{2} (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} |t^2 k(t)|\, dt + \right.\right.$$

$$\left. + b^2 (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} |k(t)|\, dt \right) + |c_{mln}| \left(\frac{1}{6} (2\pi)^{-1/2} \int_{-ln}^{\infty} |t^3 k(t)|\, dt + \right.$$

$$\left.\left. + b^2 (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} |tk(t)|\, dt \right) + |g_{mln}| \frac{1}{24} (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} |t^4 l(t)|\, dt \right\} \tag{3.10}$$

Определим интегральные члены в (3.9) и (3.10). Если учесть свойства (2.11) функции $\overline{G}_{mln}^0(\lambda)$ и аналогичные свойства функций $\overline{k}(\lambda)$ и $\overline{l}(\lambda)$, то, пользуясь теоремой об обращении преобразования Фурье, нетрудно получить

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} t^k G_{mln}^0(t)\, dt = (-i)^k \overline{G}_{mln}^{0(k)}(0) \quad (k = \overline{0, 2}) \tag{3.11}$$

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} t^k k(t)\, dt = \begin{cases} 0 & (k = 0, 2) \\ 2b & (k = 1), \\ 4b^3 & (k = 3) \end{cases} \qquad (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} t^k l(t)\, dt = \begin{cases} 1 & (k = 0) \\ 0 & (k = 1, 3) \\ 4b^2 & (k = 2) \end{cases}$$

Кроме того, из определений функций $\overline{G}_{mln}^0(\lambda)$, $\overline{k}(\lambda)$, $\overline{l}(\lambda)$ и коэффициентов a_{mln}, b_{mln}, c_{mln}, d_{mln}, g_{mln} следует, что

$$\max_n (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} |t^k G_{mln}^0(t)|\, dt = b^{k-\sigma_l} Q_{kml} \quad (k = \overline{0, 3})$$

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} |t^k k(t)|\, dt = b^k Q_{1k}, \quad (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} |t^k l(t)|\, dt = b^k Q_{2k} \quad (k = \overline{0, 4}) \tag{3.12}$$

$$|a_{mln}| \le (1 - \sigma_l), \quad |b_{mln}| \le b^{1-\sigma_l}, \quad |c_{mln}| \le (1 - \sigma_l)$$

$$|d_{mln}| \le b^{1-\sigma_l}, \quad |g_{mln}| \le (1 - \sigma_l)\, b^{-1}$$

причем величины Q_{kml}, Q_{1k}, Q_{2k} зависят только от $\varkappa$.

Подставим равенства (3.11) в (3.9) и преобразуем неравенство (3.10) с помощью соотношений (3.12). В результате, обозначая

$$Q_{*1} \equiv \max \{\max_{\substack{m,\, l\\ k=\overline{0,3}}} Q_{kml},\ \max_{k=\overline{0,4}} Q_{1k},\ \max_{k=\overline{0,4}} Q_{2k},\ 1\} \tag{3.13}$$

получим

$$\begin{gathered} D_{ml}(x) = ig_{mln}\left(\frac{1}{2}N_n - \int\limits_{-\infty}^{x} W_n(s)\,ds\right) + (\overline{G}^0_{mln}(0) + a_{mln})\, W_n(x) + \\ + i\,(\overline{G}^{0\prime}_{mln}(0) + b_{mln} + 2bc_{mln} - 2b^2 g_{mln})\, W_n'(x) - \\ - (1/2\,\overline{G}^{0\prime\prime}_{mln}(0) + 2bd_{mln})\, W_n''(x) + r_{ml0}(x) \end{gathered} \tag{3.14}$$

$$|r_{ml0}(x)| \le 3Q_{*1} b^{-\sigma_l} S^{\chi}_{33}, \quad S^{\chi}_{\alpha\beta} = \sum_{k=\alpha}^{\beta} b^k \chi_k$$

Аналогично, полагая в равенстве (2.33) последовательно $k=1,\ 2,\ 3$ можно получить

$$\begin{gathered} D_m' l(x) = -ig_{mln} W_n(x) + (\overline{G}^0_{mln}(0) + a_{mln})\, W_n'(x) + \\ + i\,(\overline{G}^{0\prime}_{mln}(0) + b_{mln} + 2bc_{mln} - 2b^2 g_{mln})\, W_n''(x) + r_{ml1}(x) \\ D_{ml}''(x) = -ig_{mln} W_n'(x) + (\overline{G}^0_{mln}(0) + a_{mln})\, W_n''(x) + r_{ml2}(x) \\ D_{ml}'''(x) = -ig_{mln} W_n''(x) + r_{ml3}(x) \end{gathered} \tag{3.15}$$

при этом, для остаточных членов в (3.15) справедливы оценки $|r_{mlk}(x)| \le 5Q_{*1} b^{-(k+\sigma_l)} S^{\chi}_{36}$ $(k=\overline{0,3})$. Кроме того, в силу (2.33) и соотношений (3.12) имеют место неравенства

$$\left| D_{ml}(x) - ig_{mln}\left(\frac{1}{2}N_n - \int\limits_{-\infty}^{x} W_n(s)\,ds\right) \right| \le 3Q_{*1} b^{-\sigma_l} S^{\chi}_{03} \tag{3.16}$$

$$|D^{(k)}_{ml}(x)| \le 3Q_{*1} b^{-(k+\sigma_l)} S^{\chi}_{k-1,\,k+3} \quad (k=\overline{1,5})$$

Напомним, что функции $\gamma_l^{[m]}(x)$ и $D_{ml}(x)$, для которых получены соотношения (3.5), (3.14)—(3.16), определяют функции $\psi_m(x)$ согласно равенству (2.34).

3.3. Рассмотрим теперь функции $\Phi.(x, b)$, которые выражаются через $\psi_m(x)$. Заметим, что из определения (2.34) функций $\psi_m(x)$ и соотношений (3.5), (3.16) вытекает неравенство

$$|\psi^{(5)}_m(x)| \le \Delta_5 = \chi_5 + 450Q_{*1} b^{-6}(S^{\varepsilon}_{04}S^{\chi}_{38} + S^{\varepsilon}_{27}S^{\chi}_{06} + S^{\varepsilon}_{58}S^{\chi}_{-13}) \tag{3.17}$$

Учитывая свойство (2.35) функций $\psi_m(x)$, произведем следующие разложения [12]:

$$\psi^{(j)}_m(s) = \sum_{k=0}^{4-j} \frac{1}{k!}\psi^{(k+j)}_m(x)(s-x)^k + \frac{1}{(5-j)!}\psi^{(5)}_m(s_{0j})(s-x)^{(5-j)} \quad (j=\overline{1,4}) \tag{3.18}$$

где $(x \lessgtr s_{0j} \lessgtr s)$. Подставим (3.18) в правую часть (2.47) и сгруппируем слагаемые, содержащие производные $\psi^{(k)}_m$ $(k=3,\ 4)$, обозначив их через $r_{(\cdot)}$. В результате, используя равенства (3.11) для интеграла от $t^k k(t)$, придем к выражению

$$\begin{gathered} \Phi.(x, b) = \sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k}{k!}\psi^{(k)}_m(x)(2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^k F^0_{(\cdot)m}(t)\,dt + a_{(\cdot)m}\psi_m(x) + ib_{(\cdot)m}\psi_m'(x) - \\ - (2bd_{(\cdot)m} + e_{(\cdot)m})\,\psi_m''(x) - i2bf_{(\cdot)m}\psi_m'''(x) + 4/3\, b^3 d_{(\cdot)m}\psi^{(4)}_m(x) + r_{(\cdot)}(x) \end{gathered} \tag{3.19}$$

причем, в силу (3.17) и равенства (3.12) для интеграла от $|t^k k(t)|$:

$$|r_{(\cdot)}(x)| \le \Delta_5 \max_m \left\{ \frac{1}{5!} (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} |t^5 F^0_{(\cdot)m}(t)|\,dt + \right.$$

$$\left. + |d_{(\cdot)m}| b^4 (1/2 Q_{12} + 1/24 Q_{14}) + |f_{(\cdot)m}| b^3 (Q_{11} + 1/6 Q_{13}) \right\} \tag{3.20}$$

Определим интегральные члены в (3.19) и (3.20). Если учесть свойства (2.41) функций $\overline{F}^0_{(\cdot)m}(\lambda)$, то, пользуясь теоремой об обращении преобразования Фурье, нетрудно получить

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} t^k F^0_{(\cdot)m}(t)\,dt = (-i)^k\, \overline{F}^{0(k)}_{(\cdot)m}(0) \tag{3.21}$$

Кроме того, из определений функций $\overline{F}^0_{(\cdot)m}(\lambda)$ и коэффициентов $d_{(\cdot)m}$, $d_{(\cdot)m}$ следует, что

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} |t^5 F_{(\cdot)m}(t)|\,dt = \rho_{(\cdot)} Q^0_{(\cdot)m}, \quad \rho_{(\cdot)} = \begin{cases} b^4, & (\cdot) = (2x), (2y), (1xx), (1xy) \\ b^3, & (\cdot) = (2xx), (2xy) \end{cases}$$

$$\max_m |d_{(\cdot)m}| = \begin{cases} 0, & (\cdot) = (2y), (1xx), (2xx), (2xy) \\ 1, & (\cdot) = (2x), (1xy) \end{cases} \tag{3.22}$$

$$\max_m |f_{(\cdot)m}| = \begin{cases} 0, & (\cdot) = (2x), (2y) \\ 1, & (\cdot) = (2xx), (2xy) \\ b, & (\cdot) = (1xx), (1xy) \end{cases}$$

причем величины $Q^0_{(\cdot)m}$ зависят только от $\varkappa$.

Подставим равенство (3.21) в (3.19) и преобразуем неравенство (3.20) с помощью соотношений (3.22). В результате, обозначая

$$Q_{*2} = \max \{ \max_{(\cdot),\, m} Q^0_{(\cdot)m},\ \max_{k=\overline{0,4}} Q_{1k} \} \tag{3.23}$$

получим

$$\Phi_{\cdot}(x, b) = \sum_{k=0}^{4} \frac{i^k}{k!} \overline{F}^{0(k)}_{(\cdot)m}(0)\, \psi^{(k)}_m(x) + a_{(\cdot)m} \psi_m(x) + i b_{(\cdot)m} \psi_m'(x) - \tag{3.24}$$

$$- (2bd_{(\cdot)m} + e_{(\cdot)m})\, \psi_m''(x) - i2bf_{(\cdot)m} \psi_m'''(x) + \frac{4}{3} b^3 d_{(\cdot)m} \psi^{(4)}_m(x) + r_{(\cdot)}(x)$$

$$|r_{(\cdot)}(x)| \le 3Q_{*3} b^{-5} \rho_{(\cdot)} S^\Delta_{55}, \quad S^\Delta_{\alpha\beta} = \sum_{k=\alpha}^{\beta} b^k \Delta_k$$

3.4. Произведем теперь следующие выкладки. Продифференцируем по x равенство (2.34), определяющее функции $\psi_m(x)$. В полученных выражениях для $\psi^{(k)}_m$ $(k = \overline{0, 4})$ заменим производные $\gamma_l^{[m](n)}$ $(n = 0, 1)$, $D^{(n)}_{ml}$ $(n = \overline{0, 3})$ согласно равенствам (3.5), (3.14), (3.15), а производные $\gamma_l^{[m](n)}$ $(n = \overline{2, 4})$, $D^{(4)}_{ml}$ включим в остаточный член. В результате, например, получим

$$\psi_1'''(x) = \frac{-1}{2b} \left[3\delta^{+\prime}(x) + \frac{4\varkappa}{(\varkappa + 1)} \delta^{-\prime}(x) \right] W_1''(x) + \tag{3.25}$$

$$+ \frac{(\varkappa - 3)}{2(\varkappa + 1) b} \delta^{-\prime}(x)\, W_3''(x) + r_1^{\psi 3}(x)$$

где $r_1^{\psi 3}$ — остаточный член такой, что

$$|r_1^{\psi 3}(x)| \le \chi_3 + 378 Q_{*1} b^{-4}(S_{03}^{\varepsilon} S_{36}^{\chi} + S_{26}^{\varepsilon} S_{06}^{\chi} + S_{36}^{\varepsilon} S_{-13}^{\chi}) \tag{3.26}$$

Далее подставим выражения (3.24) для $\Phi_{.}(x, b)$ в равенства (2.9) и получим соотношения, связывающие функции $Q_\tau(x)$ и $Q_\nu(x)$ с производными $\psi_m^{(k)}(x)$ $(k = \overline{0, 4})$. В свою очередь, подставляя в эти соотношения выражения для $\psi_m^{(k)}(x)$ типа (3.25), придем к зависимостям величин $Q_\tau(x)$, $Q_\nu(x)$ от $\delta^{\pm(k)}(x)$ $(k = 0,\ 1)$ и $W_j^{(k)}(x)$ $(k = \overline{0, 2})$, остаточные члены в которых можно оценить с помощью равенств (3.17), (3.24), а также неравенств типа (3.26).

Наконец, перейдем в полученных зависимостях для $Q_\tau(x) \equiv q_\tau(\Lambda(x, b))$ и $Q_\nu(x) \equiv q_\nu(\Lambda(x, b))$ от переменной x к переменной $\xi = \Lambda(x, b)$. При этом учтем, что в силу неравенств (1.7), (3.4) имеют место соотношения

$$W_j(x) = 2G\,[w_j(\xi) - (\delta^{+\prime}(\xi) - \delta^{-\prime}(\xi))\, b w_j'(\xi)] + r_j^{w0}(\xi) \quad (j = 1, 2)$$

$$W_j(x) = 2G w_j(\xi) \quad (j = 3, 4)$$

$$W_j'(x) = 2G\,[1 - (\delta^{+}(\xi) + \delta^{-}(\xi))(2b)^{-1}]\, w_j'(\xi) + r_j^{w1}(\xi) \quad (j = \overline{1, 4})$$

$$W_j''(x) = -2G\,(\delta^{+\prime}(\xi) + \delta^{-\prime}(\xi))(2b)^{-1} w_j'(\xi) + r_j^{w2}(\xi) \quad (j = \overline{1, 4})$$

$$|r_j^{wk}(\xi)| \le 2G\,[\Theta_2 + 12 b^{-(k+1)}(S_{03}^{\varepsilon} S_{22}^{\theta} + S_{23}^{\varepsilon} S_{11}^{\theta})] \quad (k = \overline{0, 2})$$

и кроме того, с точностью до малых второго порядка относительно ε:

$$\delta^{\pm(k)}(x) = \delta^{\pm(k)}(\xi), \qquad (h^{+}(\xi) + h^{-}(\xi))^{-1} = \frac{1}{2b}\left(1 + \frac{\delta^{+}(\xi) + \delta^{-}(\xi)}{2b}\right)$$

В результате будем иметь искомые зависимости напряжений $q_\tau(\xi)$ и $q_\nu(\xi)$ от величин $w_j(\xi)$, $w_j'(\xi)$:

$$\frac{1}{2G} q_\tau(\xi) = \frac{1}{2h(\xi)}(w_3(\xi) - w_1(\xi)) - \frac{1}{2(\varkappa - 1)h(\xi)}[\varkappa\delta^{+\prime}(\xi) + \delta^{-\prime}(\xi)](w_4(\xi) -$$

$$- w_2(\xi)) + \frac{\varkappa}{6(\varkappa^2 - 1)}[(2\varkappa + 1)\delta^{+\prime}(\xi) - (\varkappa + 2)\delta^{-\prime}(\xi)]\, w_1'(\xi) +$$

$$+ \frac{1}{2(\varkappa - 1)} w_2'(\xi) + \frac{1}{6(\varkappa^2 - 1)}[(4\varkappa^2 - \varkappa - 6)\delta^{+\prime}(\xi) +$$

$$+ \varkappa(\varkappa + 2)\delta^{-\prime}(\xi)]\, w_3'(\xi) + \frac{(\varkappa - 2)}{2(\varkappa - 1)} w_4'(\xi) + \frac{1}{2G} r_\tau(\xi) \tag{3.27}$$

$$\frac{1}{2G} q_\nu(\xi) = \frac{(\varkappa + 1)}{2(\varkappa - 1)h(\xi)}(w_4(\xi) - w_2(\xi)) + \frac{1}{2(\varkappa - 1)h(\xi)}[\varkappa\delta^{+\prime}(\xi) -$$

$$- \delta^{-\prime}(\xi)](w_3(\xi) - w_1(\xi)) + \frac{1}{2(\varkappa - 1)} w_1'(\xi) + \frac{\varkappa}{6(\varkappa - 1)^2} \times$$

$$\times [(2\varkappa - 1)\delta^{+\prime}(\xi) - (\varkappa - 2)\delta^{-\prime}(\xi)]\, w_2'(\xi) - \frac{(\varkappa - 2)}{2(\varkappa - 1)} w_3'(\xi) +$$

$$+ \frac{(\varkappa - 2)}{6(\varkappa - 1)^2}[(4\varkappa - 3)\delta^{+\prime}(\xi) + \varkappa\delta^{-\prime}(\xi)]\, w_4'(\xi) + \frac{1}{2G} r_\nu(\xi)$$

где $h = h^{+} + h^{-}$ — толщина полосы, r_τ и τ_ν — остаточные члены. Используя соотношения (3.7) и оценки остаточных членов в зависимостях Q_τ, Q_ν от $\delta^{\pm(k)}$, $W_j^{(k)}$, нетрудно получить следующие неравенства для r_τ и r_ν:

$$|r_{\tau,\nu}(\xi)| \le 2GQ_* \,[25b^{-1}S^\theta_{25} + C_0 b^{-2}(S^\varepsilon_{04}S^\theta_{28} + S^\varepsilon_{27}S^\theta_{06} + S^\varepsilon_{38}S^\theta_{-13})]$$

где C_0 — некоторая константа; $Q_* = \max\{1, Q_{*1}Q_{*2}, Q_{*1}Q_{*3}\}$, $Q_{*3} = \max\{(\varkappa-1)^{-1}, (\varkappa-1)^{-2}, (\varkappa-1)^{-3}\}$.

Величины Q_{*1}, Q_{*2} определяются согласно (3.13) и (3.23).

Первые слагаемые в правых частях (3.27) соответствуют модели Винклера деформирования полосы [1] и дают асимптотическую зависимость $q_\tau(\xi)$, $q_\nu(\xi)$ от $w_j(\xi)$ при $b \to 0$, так как в этом случае остальные слагаемые в (3.27) имеют более высокий порядок малости по b. Остальные слагаемые в правых частях (3.27) описывают совместное влияние на напряжения $q_\tau(\xi)$, $q_\nu(\xi)$ величин $\delta^{\pm\prime}(\xi)$, $w_j(\xi)$ и $w_j'(\xi)$.

Отметим, что правая часть (3.27) за вычетом остаточных членов r_τ, r_ν инвариантна относительно малого поворота системы координат ξ, η на угол α. В этом нетрудно убедиться, если ввести в рассмотрение соответствующие повернутой системе координат ξ_*, η_* величины h_*, $\delta^{\pm\prime}_*$, w_{*j}, w_{*j}' и заменить ими в (3.27) величины h, $\delta^{\pm\prime}$, w_j, w_j' согласно соотношениям

$$h = h_*, \qquad \delta^{\pm\prime} = \delta^{\pm\prime}_* \mp \alpha$$

$$w_1 = w_{*1} - \alpha w_{*2} - \alpha h_* w_{*1}', \qquad w_1' = w_{*1}' - \alpha w_{*2}'$$

$$w_2 = w_{*2} + \alpha w_{*1} - \alpha h_* w_{*2}', \qquad w_2' = w_{*2}' + \alpha w_{*1}'$$

$$w_3 = w_{*3} - \alpha w_{*4}, \qquad w_3' = w_{*3}' - \alpha w_{*4}'$$

$$w_4 = w_{*4} + \alpha w_{*3}, \qquad w_4' = w_{*4}' + \alpha w_{*3}'$$

которые справедливы с точностью до малых второго порядка относительно ε и α. Полученные в результате зависимости напряжений q_τ и q_ν от величин $w_{*j}(\xi_*)$, $w_{*j}'(\xi_*)$ будут иметь прежний вид (3.27).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
2. *Ворович И. И., Пенин О. М.* Смешанная задача для бесконечной полосы переменной высоты.//Инж. ж. МТТ. 1968. № 4. С. 101—109.
3. *Ворович И. И., Пенин О. М.* Контактная задача для бесконечной полосы переменной высоты.//Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 5. С. 112—121.
4. *Гузь А. Н., Немиш Ю. Н.* Методы возмущений в пространственных задчах теории упругости. Киев: Вища школа, 1982. 350 с.
5. *Солдатенков И. А.* Приближенное решение задачи теории упругости для полосы переменной ширины.//Изв. РАН. МТТ. 1992. № 1. С. 48--57.
6. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.
7. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
8. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
9. *Демидов С. П.* Теория упругости. М.: Высш. шк. 1979. 432 с.
10. *Солдатенков И. А.* Некоторые теоремы математического анализа для сингулярных интегралов. М., 1989. 44 с. ИПМ АН СССР. Препринт № 390.
11. *Князев П. Н.* Интегральные преобразования. Минск: «Вынэйш. школа», 1969. 197 с.
12. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. М.: Наука. Ч. 1, 1971. 599 с; Ч. 2, 1973. 447 с.

Москва

Поступила в редакцию
3.XII.1992