МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1994

УДК 539.3

 В. В. ТИХОМИРОВ

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ СОСТАВНОГО ПРОСТРАНСТВА С ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Исследованию напряженно-деформированного состояния упругих тел с межфазными трещинами в рамках двумерной постановки задачи посвящено большое число публикаций (см., например, обзоры в [1, 2]). Что касается пространственных задач, то точные аналитические решения получены только для случая дискообразной трещины, содержащейся в составном упругом пространстве [2, 3].

В публикуемой работе рассматривается трехмерная задача механики разрушения о полубесконечной межфазной трещине нормального отрыва, находящейся на стыке двух разнородных полупространств. С помощью сведения к матричной задаче Римана построено ее точное решение и определены коэффициенты интенсивности напряжений.

1. Рассмотрим упругое пространство, состоящее из двух изотропных однородных полупространств $z \geq 0$ и $z \leq 0$, отмечаемых далее индексами 1 и 2 и имеющих упругие постоянные E_j и ν_j (E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона; $j=1, 2$). Пусть на границе раздела полупространства $z=0$ расположена трещина в виде полуплоскости $\{(x, y): x<0, |y|<\infty\}$, к берегам которой приложена самоуравновешенная нормальная нагрузка $p(x, y)$, симметричная относительно оси x. Тогда предполагая, что между полупространствами на оставшейся части плоскости осуществляется идеальный механический контакт, будем иметь при $z=0$ следующие граничные условия:

$$\tau_{xzj} = \tau_{yzj} = 0, \sigma_{zj} = -p(x, y) \quad (j = 1, 2; x < 0, |y| < \infty) \tag{1.1}$$

$$\tau_{xz1} = \tau_{xz2}, \tau_{yz1} = \tau_{yz2}, \sigma_{z1} = \sigma_{z2} \tag{1.2}$$

$$u_1 = u_2, v_1 = v_2, w_1 = w_2 \; (x > 0, |y| < \infty) \tag{1.3}$$

где u_j, v_j, w_j — перемещения вдоль осей x, y и z соответственно, а τ_{xzj}, τ_{yzj}, σ_{zj} — компоненты тензора напряжений.

Кроме того, следует учесть еще требование убывания напряжений на бесконечности и условие ограниченности потенциальной энергии деформации в окрестности фронта трещины.

Применяя двумерное преобразование Фурье по координатам x и y к уравнениям равновесия в перемещениях, получаем

$$u_j(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{L_\lambda} U_j(\lambda, \mu, z)\, e^{-i(\lambda x+\mu y)}\, d\lambda d\mu$$

$$v_j(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{L_\lambda} V_j(\lambda, \mu, z)\, e^{-i(\lambda x+\mu y)}\, d\lambda d\mu, \; w_j(x, y, z) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{L_\lambda} W_j(\lambda, \mu, z)\, e^{-i(\lambda x+\mu y)}\, d\lambda d\mu$$

$$U_j(\lambda,\mu,z)=\left(A_j^{(1)}-\frac{i\lambda}{\gamma}A_j^{(2)}z\right)e^{-\gamma|z|},\ V_j(\lambda,\mu,z)=\left(A_j^{(3)}-\frac{i\mu}{\gamma}A_j^{(2)}z\right)e^{-\gamma|z|}$$

$$W_j(\lambda,\mu,z)=\left[(-1)^j\frac{i}{\gamma}(\lambda A_j^{(1)}+\mu A_j^{(3)})-\frac{3-4\nu_j}{\gamma}A_j^{(2)}+(-1)^jA_j^{(2)}z\right]e^{-\gamma|z|}$$

$$\gamma=(\lambda^2+\mu^2)^{1/2},\ A_j^{(m)}\equiv A_j^{(m)}(\lambda,\mu)\ (j=1,2;\ m=1,2,3)$$

где контур интегрирования L_λ расположен в полосе $-|\mu|<\operatorname{Im}\lambda<0$. Здесь рассматривается главная ветвь функции $\gamma=(\lambda^2+\mu^2)^{1/2}$ на комплексной плоскости с разрезами, проведенными по лучам $(-i\infty,-i|\mu|)$ и $(i|\mu|,i\infty)$.

Граничные условия (1.1), (1.2) позволяют выразить постоянные $A_2^{(m)}$ через $A_1^{(m)}$. После этого условия (1.1) для $j=1$ и (1.3) приводят к следующей системе парных интегральных уравнений:

$$(2\pi)^{-1/2}\int_{L_\lambda}\gamma\,[A(\lambda,\mu)-(1-2\nu_1)C(\lambda,\mu)]\,e^{-i\lambda x}d\lambda=0\ \ (x<0)$$

$$(2\pi)^{-1/2}\int_{L_\lambda}\frac{i\gamma^2}{\lambda}[A(\lambda,\mu)-2(1-\nu_1)C(\lambda,\mu)]\,e^{-i\lambda x}d\lambda=-p^*(x,\mu)\ \ (x<0) \tag{1.4}$$

$$(2\pi)^{-1/2}\int_{L_\lambda}[a_1A(\lambda,\mu)-a_2C(\lambda,\mu)]\,e^{-i\lambda x}d\lambda=0\ \ (x>0)$$

$$(2\pi)^{-1/2}\int_{L_\lambda}\frac{i\gamma}{\lambda}[a_1A(\lambda,\mu)-a_3C(\lambda,\mu)]\,e^{-i\lambda x}d\lambda=0\ \ (x>0)$$

$$a_1=3+q-4\nu_2,\ a_2=2\,[2(1-\nu_1)(1-2\nu_2)+\nu_2-\nu_1]$$

$$a_3=2(1-\nu_1)a_1+q(1-2\nu_1)-1+2\nu_2,\ q=E_2(1+\nu_1)/[E_1(1+\nu_2)]$$

$$A=A_1^{(1)}E_1/(1+\nu_1),\ C=i\lambda\gamma^{-2}A_1^{(2)}E_1/(1+\nu_1)$$

где $p^*(x,\mu)$ — трансформанта Фурье по координате y нагрузки $p(x,y)$.

Введем в рассмотрение функции

$$T_+(\lambda,\mu)=(2\pi)^{-1/2}\int_0^\infty\tau_{xz1}^*(x,\mu,0)\,e^{i\lambda x}dx,\ S_+(\lambda,\mu)=(2\pi)^{-1/2}\int_0^\infty\sigma_{z1}^*(x,\mu,0)\,e^{i\lambda x}dx$$

$$U_-(\lambda,\mu)=q\,(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^0[u_1^*(x,\mu,0)-u_2^*(x,\mu,0)]\,e^{i\lambda x}dx$$

$$W_-(\lambda,\mu)=q\,(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^0[w_2^*(x,\mu,0)-w_1^*(x,\mu,0)]\,e^{i\lambda x}dx,\ P_-(\lambda,\mu)=$$

$$=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^0p^*(x,\mu)\,e^{i\lambda x}dx$$

в которых $\tau_{xz1}^*(x,\mu,0)$, $\sigma_{z1}^*(x,\mu,0)$ — трансформанты Фурье по координате y напряжений на продолжении трещины, а $u_j^*(x,\mu,0)$, $w_j^*(x,\mu,0)$ трансформанты перемещений берегов трещины. Тогда система парных интегральных уравнений (1.4) сводится к матричной задаче Римана с комплексной переменной λ и вещественным параметром μ:

$$DR(\lambda,\mu)F_-(\lambda,\mu)=F_+(\lambda,\mu)-Q(\lambda,\mu),\ \lambda\in L_\lambda \tag{1.5}$$

$$R(\lambda,\mu)=\gamma G(\lambda,\mu),\; G(\lambda,\mu)=\begin{Vmatrix} 1 & i\lambda\beta/\gamma \\ -i\gamma\beta/\lambda & 1 \end{Vmatrix},\; Q(\lambda,\mu)=\begin{Vmatrix} 0 \\ P_-(\lambda,\mu) \end{Vmatrix} \tag{1.6}$$

$$F_-(\lambda,\mu)=\begin{Vmatrix} U_-(\lambda,\mu) \\ W_-(\lambda,\mu) \end{Vmatrix},\; F_+(\lambda,\mu)=\begin{Vmatrix} T_+(\lambda,\mu) \\ S_+(\lambda,\mu) \end{Vmatrix}$$

Здесь β — константа Дундурса [4], имеющая вид $\beta=[1-2\nu_2-q(1-2\nu_1)]/[2(1-\nu_2)+2q(1-\nu_1)]$, а D — постоянная, зависящая от упругих модулей полупространств.

2. Для решения задачи Римана (1.5) представим ее матрицу-коэффициент в форме

$$G(\lambda,\mu)=I+B(\lambda,\mu),\; B(\lambda,\mu)=\frac{\beta}{\lambda\gamma}\begin{Vmatrix} 0 & i\lambda^2 \\ -i\gamma^2 & 0 \end{Vmatrix}$$

где I — единичная матрица. Тогда, согласно [5], факторизация матрицы $G(\lambda,\mu)$ будет иметь вид

$$G(\lambda,\mu)=X_+(\lambda,\mu)X_-^{-1}(\lambda,\mu) \tag{2.1}$$

$$X^{\pm 1}(\lambda,\mu)=\varphi^{\pm 1}(\lambda,\mu)\{I\operatorname{ch}[\gamma\psi(\lambda,\mu)]\pm B(\lambda,\mu)\operatorname{sh}[\gamma\psi(\lambda,\mu)]\}$$

причем функции $\varphi(\lambda,\mu)$ и $\psi(\lambda,\mu)$ удовлетворяют двум скалярным задачам Римана

$$\varphi_+(\lambda,\mu)\varphi_-^{-1}(\lambda,\mu)=\Delta^{1/2},\; \lambda\in L_\lambda \tag{2.2}$$

$$\psi_+(\lambda,\mu)-\psi_-(\lambda,\mu)=\varkappa/\gamma,\; \lambda\in L_\lambda \tag{2.3}$$

Здесь $\Delta=1-\beta^2$ и $\varkappa=\frac{1}{2}\ln[(1-\beta)/(1+\beta)]$ — определитель и показатель матрицы-коэффициента $G(\lambda,\mu)$.

Решение задач (2.2), (2.3) проводится известным способом [6] и определяется формулами

$$\varphi_\pm(\lambda,\mu)=(1-\beta^2)^{\pm 1/4},\; \psi_\pm(\lambda,\mu)=i\varepsilon\gamma^{-1}\ln[(\lambda+\gamma)/(\pm i|\mu|)] \tag{2.4}$$

Биупругая постоянная $\varepsilon=(2\pi)^{-1}\ln[(1-\beta)/(1+\beta)]$ совпадает со своим известным выражением в плоских задачах о межфазных трещинах [2].

Учитывая, что $\gamma_\pm(\lambda,\mu)=(\lambda\pm i|\mu|)^{1/2}$, а также формулу (2.1), будем иметь

$$R_+^{\pm 1}(\lambda,\mu)=(1-\beta^2)^{\pm 1/4}(\lambda+i|\mu|)^{\pm 1/2}\begin{Vmatrix} \operatorname{ch}\gamma\psi_+ & \pm i\lambda\gamma^{-1}\operatorname{sh}\gamma\psi_+ \\ \mp i\gamma\lambda^{-1}\operatorname{sh}\gamma\psi_+ & \operatorname{ch}\gamma\psi_+ \end{Vmatrix} \tag{2.5}$$

Тогда векторное уравнение Винера — Хопфа (1.5) можно записать в форме

$$DR_-(\lambda,\mu)F_-(\lambda,\mu)+Q_-(\lambda,\mu)=R_+^{-1}(\lambda,\mu)F_+(\lambda,\mu)-Q_+(\lambda,\mu) \tag{2.6}$$

$$Q_\pm(\lambda,\mu)=\pm\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\alpha}R_+^{-1}(\alpha,\mu)Q(\alpha,\mu)\frac{d\alpha}{\alpha-\lambda} \tag{2.7}$$

контур L_α расположен между вещественной осью и контуром L_λ.

В соответствии со схемой метода Винера — Хопфа [7] из уравнения (2.6) получаем соотношение $F_+(\lambda,\mu)=R_+(\lambda,\mu)Q_+(\lambda,\mu)$, которое позволяет представить напряжения на подолжении трещины в виде

$$\begin{Vmatrix} \tau_{xz}(x,y,0) \\ \sigma_z(x,y,0) \end{Vmatrix}=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_{L_\lambda}R_+(\lambda,\mu)Q_+(\lambda,\mu)e^{-i\lambda x}d\lambda\right]\cos\mu y d\mu \tag{2.8}$$

Найдем асимптотики напряжений при $x\to+0$. Согласно теореме абелева типа [7] они определяются асимптотиками подынтегральных функций при $\lambda \to \infty$. На основании формул (2.4) и (2.5) при $\lambda \to \infty$ имеем

$$\frac{R_+(\lambda,\mu)}{\alpha-\lambda} \sim -\frac{1}{2}(1-\beta^2)^{1/4}\left[\left\|\begin{matrix} 1 & i \\ -i & 1\end{matrix}\right\| \left(\frac{2}{i\mu}\right)^{i\varepsilon}\lambda^{-1/2+i\varepsilon} + \right.$$

$$\left. + \left\|\begin{matrix} 1 & -i \\ i & 1\end{matrix}\right\| \left(\frac{2}{i\mu}\right)^{-i\varepsilon}\lambda^{-1/2-i\varepsilon}\right] \tag{2.9}$$

Воспользовавшись значениями интеграла [8]:

$$\int_0^\infty t^{\nu-1}e^{-tx}dt = x^{-\nu}\,\Gamma(\nu) \quad (x>0)$$

где $\Gamma(\nu)$ — гамма-функция, и формулами (2.7)—(2.9), приходим к следующему представлению напряжений вблизи фронта трещины:

$$\left\|\begin{matrix}\tau_{xz}(x,y,0)\\ \sigma_z(x,y,0)\end{matrix}\right\| \sim \frac{1}{2\pi^2}\left[\left\|\begin{matrix} 1 & i \\ -i & 1\end{matrix}\right\| \Gamma\left(\frac{1}{2}+i\varepsilon\right)\int_0^\infty J(\mu)\left(\frac{\mu}{2}\right)^{-i\varepsilon}\cos\mu y\,d\mu\, x^{-1/2-i\varepsilon} + \right.$$

$$\left. + \left\|\begin{matrix} 1 & -i \\ i & 1\end{matrix}\right\| \Gamma\left(\frac{1}{2}-i\varepsilon\right)\int_0^\infty J(\mu)\left(\frac{\mu}{2}\right)^{i\varepsilon}\cos\mu y\,d\mu\, x^{-1/2+i\varepsilon}\right] \tag{2.10}$$

$$J(\mu) \equiv \left\|\begin{matrix} J_2(\mu)\\ J_1(\mu)\end{matrix}\right\| = i^{1/2}(1-\beta^2)^{-1/4}\int_{L_\alpha} R_+^{-1}(\alpha,\mu)\,Q(\alpha,\mu)\,d\alpha$$

С помощью соотношений (1.6), (2.4), (2.5) элементы матрицы-столбца $J(\mu)$ можно выразить через трансформанту Фурье $P_-(\alpha,\mu)$ нормальной нагрузки

$$J_1(\mu) = i^{1/2}\operatorname{ch}\pi\varepsilon\int_{L_\alpha}\frac{P_-(\alpha,\mu)}{(\alpha+i\mu)^{1/2}}\cos\left(\varepsilon\ln\frac{\alpha+\gamma}{i\mu}\right)d\alpha,\quad J_2(\mu) =$$

$$= i^{1/2}\operatorname{ch}\pi\varepsilon\int_{L_\alpha}\frac{\alpha P_-(\alpha,\mu)}{\gamma(\alpha+i\mu)^{1/2}}\sin\left(\varepsilon\ln\frac{\alpha+\gamma}{i\mu}\right)d\alpha \tag{2.11}$$

Введем в рассмотрение функции

$$r_n(y) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+i\varepsilon\right)\int_0^\infty J_n(\mu)\left(\frac{\mu}{2}\right)^{-i\varepsilon}\cos\mu y\,d\mu \quad (n=1,2) \tag{2.12}$$

Тогда асимптотика напряжений при $x \to +0$ (2.10) примет вид

$$\left\|\begin{matrix}\sigma_z(x,y,0)\\ \tau_{xz}(x,y,0)\end{matrix}\right\| \sim \frac{1}{\pi^2}\left\|\begin{matrix}\operatorname{Re}\left[(r_1-ir_2)\,x^{-1/2-i\varepsilon}\right]\\ -\operatorname{Im}\left[(r_1-ir_2)\,x^{-1/2-i\varepsilon}\right]\end{matrix}\right\|$$

или

$$\sigma_z(x,y,0) \sim [K_1(y)\cos(\varepsilon\ln x) - K_2(y)\sin(\varepsilon\ln x)]\,x^{-1/2} \tag{2.13}$$

$$\tau_{xz}(x,y,0) \sim [K_1(y)\sin(\varepsilon\ln x) + K_2(y)\cos(\varepsilon\ln x)]\,x^{-1/2}$$

где коэффициенты интенсивности напряжений $K_1(y)$ и $K_2(y)$ вычисляются по формулам

$$K_1(y) = \frac{1}{\pi^2}[\operatorname{Re} r_1(y) + \operatorname{Im} r_2(y)],\quad K_2(y) = \frac{1}{\pi^2}[\operatorname{Re} r_2(y) - \operatorname{Im} r_1(y)] \tag{2.14}$$

Отметим, что формулы (2.13) определяют осциллирующие поля напряжений вблизи вершины трещины, находящейся на стыке двух разнородных по-

M	K_1^*	K_2^*	K_1^*	K_2^*	K_1^*	K_2^*
$Cu — Al_2O_3$	2,8249	0,4057	1,0013	0,1240	0,3548	0,0369
$Ti — Al_2O_3$	2,8219	0,5718	1,0029	0,1749	0,3561	0,0521
Si — Cu	2,8274	0,1520	1,0000	0,0465	0,3537	0,0138
MgO — Ni	2,8278	0,0713	0,9998	0,0218	0,3535	0,0065
St — G	2,8110	0,9616	1,0083	0,2945	0,3608	0,0878

лупространств, и имеют такую же структуру, как и в случае плоских [2] или осесимметричных задач [3] для межфазных трещин.

3. В качестве примера рассмотрим случай, когда к берегам трещины на оси x приложены сосредоточенные силы величины P на расстоянии a от ее вершины, т. е. $p(x, y) = P\delta(x + a)\,\delta(y)$ и, следовательно, $P_-(\lambda, \mu) = Pe^{-i\lambda a}/2\pi$. Подставляя это выражение в формулы (2.11) и используя теорему о вычетах, получаем

$$J_1(\mu) = \frac{P}{\pi}\mu^{1/2}\,\mathrm{ch}^2\pi\varepsilon\int_1^\infty \frac{\cos[\varepsilon\ln(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})]}{\sqrt{\xi - 1}}\,e^{-a\mu\xi}\,d\xi \tag{3.1}$$

$$J_2(\mu) = \frac{P}{\pi}\mu^{1/2}\,\mathrm{ch}^2\pi\varepsilon\left\{\int_1^\infty \frac{\xi\sin[\varepsilon\ln(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})]}{(\xi - 1)\sqrt{\xi + 1}}\,e^{-a\mu\xi}d\xi + 2^{-1/2}e^{-a\mu}\,\mathrm{th}\,\pi\varepsilon\right\}$$

Полученные представления функций $J_n(\mu)$ позволяют произвести интегрирование по переменной μ в формулах (2.12). Воспользовавшись интегралом [8]:

$$\int_0^\infty \mu^{-i\varepsilon+1/2}e^{-a\mu\xi}\cos\mu y\,d\mu = \Gamma\left(\frac{3}{2} - i\varepsilon\right)\omega(\xi, y)$$

$$\omega(\xi, y) = (y^2 + a^2\xi^2)^{-3/4+i\varepsilon/2}\cos\left[\left(\frac{3}{2} - i\varepsilon\right)\mathrm{arctg}\,\frac{y}{a\xi}\right]$$

а также соотношением $\Gamma(1/2 - i\varepsilon)\,\Gamma(1/2 + i\varepsilon) = \pi\,\mathrm{ch}^{-1}\pi\varepsilon$, из (2.12) и (3.1) будем иметь

$$r_1(y) = Pf(\varepsilon)\int_1^\infty \frac{\cos[\varepsilon\ln(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})]}{\sqrt{\xi - 1}}\,\omega(\xi, y)\,d\xi \tag{3.2}$$

$$r_2(y) = Pf(\varepsilon)\left\{\int_1^\infty \frac{\xi\sin[\varepsilon\ln(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})]}{(\xi - 1)\sqrt{\xi + 1}}\,\omega(\xi, y)\,d\xi + 2^{-1/2}\,\omega(1, y)\,\mathrm{th}\,\pi\varepsilon\right\}$$

$$f(\varepsilon) = 2^{i\varepsilon}(1/2 - i\varepsilon)\,\mathrm{ch}\,\pi\varepsilon$$

Отделяя в (3.2) вещественные и мнимые части, по форулам (2.14) получим коэффициенты интенсивности напряжений, которые в данном случае выражаются через однократные квадратуры.

Результаты численных расчетов коэффициентов интенсивности напряжений для ряда пар материалов M при различных значениях параметра $a = 0{,}5$; $1{,}0$; $2{,}0$ приведены в таблице, где $K_1^* = \pi^2K_1(0)/P$, $K_2^* = \pi^2K_2(0)/P$ (последняя строка соответствует паре: сталь — стекло). При вычислениях использованы значения упругих постоянных из [9]. Данные таблицы позволяют сделать заключение о том, что для всех рассмотренных пар материалов величина K_1^* незначительно отличается от коэффициента интенсивности нормальных напряжений, определяемого формулой $\pi^2K_1(0)/P = a^{-3/2}$ [10], в задаче для однородного пространства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дундурс Я., Комниноу М.* Обзор и перспективы исследования межфазной трещины//Мех. композит. матер. 1979. № 3. С. 387—396.
2. Механика разрушения и прочность материалов. Справ. пособие в 4-х т. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами/Саврук М. П. — Киев: Наук. думка, 1988. Т. 2. 619 с.
3. *Kassir M. K., Sih G. C.* Three dimensional crack problems. Leyden: Nordhoff intern. publ., 1975. 452 p.
4. *Dundurs J.* Edge — bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading//Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1969. V. 36. № 3. P. 650—652.
5. *Храпков А. А.* Некоторые случаи упругого равновесия бесконечного клина с несимметричным надрезом в вершине под действием сосредоточенных сил/ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 4. С. 677—689.
6. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1963. 639 с.
7. *Нобл Б.* Метод Винера — Хопфа. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 280 с.
8. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
9. *Hutchinson J. W., Mear M. E., Rice J. R.* Crack paralleling an interface between dissimilar materials//Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1987. V. 54. № 4. P. 828—832.
10. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 403 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
25.II.1993