

УДК 539.3.01

© 1994 г. Д. Н. ПАРФЕНЕНКО, А. Ф. УЛИТКО

ВДАВЛИВАНИЕ В УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО ШТАМПА, ИМЕЮЩЕГО В ПЛАНЕ ФОРМУ КРУГОВОГО СЕГМЕНТА

Предложен аналитический метод решения задачи о гладком контакте на упругом полупространстве жесткого штампа с плоским основанием в форме кругового сегмента в плане. Построение гармонической функции, входящей в общее решение уравнений равновесия, проводится в пространственных биполярных координатах с использованием интегральных преобразований типа Меллера — Фока, установленных в [1, 2]. Последующие преобразования, связанные с удовлетворением смешанных граничных условий, приводят к системе двух функциональных уравнений Винера — Хопфа. Рассмотрены два метода решения полученной функциональной системы, основанные на ее приведении к квази-вполне регулярным бесконечным системам линейных алгебраических уравнений или же к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. Исследовано распределение контактных напряжений, показано, что вблизи неугловых точек границ штампа поле напряжений имеет классическую корневую особенность, а в окрестности вершин штампа — слабую степенную особенность с вещественным показателем. Подробно изучена зависимость показателя особенности от угла раствора границ штампа. Получены интегральные представления для коэффициентов интенсивности напряжений на ребрах штампа.

Ранее, в [1] получено решение рассматриваемой задачи для штампа в форме полукруга. Аналогичная по математической постановке задача о проводящей пластинке в форме круговой луночки рассматривалась в [3]. Решение строилось в сфероконических координатах в виде рядов по функциям Ламе. При этом не исследовался вопрос о распределении плотности электрического заряда вблизи угловых точек луночки.

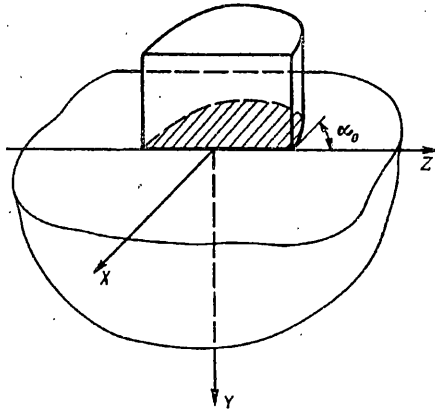
1. Рассмотрим задачу о гладком контакте жесткого штампа с плоским основанием, имеющем в плане форму кругового сегмента, с упругим полупространством. Внедрение штампа производится без перекоса (фигура). Решение уравнений Ламе для области $y \geq 0$, занимаемой упругим полупространством, разыскиваем в форме [4]:

$$u = j4 \frac{m-1}{m} \omega - \text{grad} \left(y\omega + \frac{m-2}{m} \omega^* \right) \quad (1.1)$$

где $\partial\omega^*/\partial y = \omega$, ω^* — гармонические в области $y \geq 0$ функции, а m — число Пуассона упругого материала. Отметим, что выбор вектора упругих смещений в форме (1.1) оставляет поверхность рассматриваемого полупространства свободной от касательных напряжений. С учетом представления (1.1) исходная контактная задача приводится к задаче о нахождении гармонической функции ω по смешанным граничным условиям на поверхности $y = 0$ [4]:

$$\omega \Big|_{\substack{y=0 \\ (x,z) \in \Omega}} = u \frac{m}{2(m-1)}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial y} \Big|_{\substack{y=0 \\ (x,z) \in \Omega}} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь Ω — плоская область, совпадающая с областью контакта, u — величина осадки штампа.



Решение задачи будем проводить в пространственных биполярных координатах (α, β, φ) , связанных с декартовыми координатами соотношениями [5]:

$$x = \frac{\sin \alpha}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha} \cos \varphi, \quad y = \frac{\sin \alpha}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha} \sin \varphi, \quad z = \frac{\operatorname{sh} \beta}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha} \quad (1.3)$$

$$0 \leq \alpha \leq \pi, \quad -\infty < \beta < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

При этом упругое основание совместится с пространственным клином $0 \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq \alpha \leq \pi$, $-\infty < \beta < \infty$, а область контакта Ω будет совпадать с несимметричной круговой луночкой $\varphi = \pi$, $\alpha_0 \leq \alpha \leq \pi$, $-\infty < \beta < \infty$, характерной особенностью которой является наличие двух угловых точек $\beta = \pm \infty$. На основании этого перепишем смешанные краевые условия (1.2) в следующем виде

$$\left. \frac{\partial \omega}{\partial y} \right|_{\substack{\varphi=0 \\ 0 \leq \alpha \leq \pi}} = 0, \quad \left. \frac{\partial \omega}{\partial y} \right|_{\substack{\varphi=\pi \\ 0 \leq \alpha < \alpha_0}} = 0, \quad \omega \Big|_{\substack{\varphi=\pi \\ \alpha_0 < \alpha \leq \pi}} = \frac{u}{2} \frac{m}{m-1} \quad (1.4)$$

Построение решения трехмерного уравнения Лапласа для пространственного клина в биполярных координатах (1.3) будет основано на использовании комплексного преобразования Фурье по координате β и применении установленных в [1, 2] интегральных преобразований типа Мелера — Фока по координате α . Явное выражение для исчезающей на бесконечности гармонической функции ω выбираем в виде

$$\omega = \sqrt{2 \operatorname{ch} \beta - 2 \cos \alpha} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-s\beta} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \mu \left[a_s(\mu) \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - s + \mu \right) + b_s(\mu) \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - s + \mu \right) \right] \cos \mu \Gamma \left(\frac{1}{2} - s + \mu \right) P_{-\nu/2-s}^{-\mu}(\cos \alpha) d\mu \right\} ds \quad (1.5)$$

где $a_s(\mu)$ и $b_s(\mu)$ — некоторые четные функции интегрирования, подлежащие определению. При таком выборе функции ω однородное краевое условие (1.4) на грани $\varphi = 0$ выполняется тождественно.

Переходим к удовлетворению краевых условий на грани $\varphi = \pi$. Обращая граничные значения разыскиваемой функции с помощью преобразования Фурье по переменной β приходим к разложению вида

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \mu \left[a_s(\mu) \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - s + \mu \right) + b_s(\mu) \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - s + \mu \right) \right] \times \\ \times \cos \mu \Gamma \left(\frac{1}{2} - s + \mu \right) P_{-\nu/2-s}^{-\mu}(\cos \alpha) d\mu =$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{s\beta}}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \beta - 2 \cos \alpha}} \omega|_{\varphi=\pi} d\beta = f(\alpha) \quad (0 \leq \alpha \leq \alpha_0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{s\beta}}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \beta - 2 \cos \alpha}} \frac{um}{2(m-1)} d\beta = \frac{um}{2(m-1)} \frac{\pi}{\cos \pi s} P_{-\frac{1}{2}-s}(-\cos \alpha) \quad (\alpha_0 \leq \alpha \leq \pi) \end{cases} \quad (1.6)$$

Здесь $f(\alpha)$ — пока что неизвестная функция, определяющая нормальные перемещения свободной поверхности упругого основания вне штампа и принимающая конечные значения на ребре штампа (при $\alpha \rightarrow \alpha_0$).

С использованием формул обращения [1] из (1.6) получаем соотношение

$$\begin{aligned} \mu \cos \pi \mu \left\{ a_s(\mu) \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - s + \mu \right) - b_s(\mu) \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - s + \mu \right) \right\} = \\ = U(\mu) \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2} \right)^\mu + \mu \Gamma \left(\frac{1}{2} + s + \mu \right) \int_0^{\alpha_0} \frac{f(\xi)}{\sin \xi} P_{-\frac{1}{2}-s}^{-\mu}(\cos \xi) d\xi \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$U(\mu) = -\frac{1}{\mu} \frac{\pi}{\cos \pi s} \frac{\Gamma(1+\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}-s+\mu)} \frac{um}{m-1} \quad (1.8)$$

где $U(\mu)$ — известная функция, определяющая конфигурацию подошвы штампа. Последнее слагаемое в соотношении (1.7) представим в виде [6]:

$$\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2} \right)^\mu \left\{ \mu \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+s+\mu)}{\Gamma(1+\mu)} \int_0^{\alpha_0} \frac{f(\xi)}{\sin \xi} \left(\frac{\operatorname{tg} \xi/2}{\operatorname{tg} \alpha_0/2} \right)^\mu F \left(\frac{1}{2} + s, \frac{1}{2} - s, 1 + \mu; \sin^2 \frac{\xi}{2} \right) d\xi \right\}$$

Анализ этого выражения с учетом свойств регулярности гамма и гипергеометрической функций показывает, что функция, стоящая в фигурных скобках, является регулярной в области $\operatorname{Re} \mu > -1/2$.

Таким образом, соотношение (1.7) можно переписать в виде

$$\mu \cos \pi \mu \left\{ a_s(\mu) \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - s + \mu \right) - b_s(\mu) \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - s + \mu \right) \right\} = Y^+(\mu) \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2} \right)^\mu \quad (1.9)$$

где $Y^+(\mu)$ — некоторая регулярная в области $\operatorname{Re} \mu > -1/2$ функция, за исключением единственного простого полюса в точке $\mu = 0$, где она имеет главную часть

$$Y^+(\mu) \sim -\frac{1}{\mu} \Gamma \left(\frac{1}{2} + s \right) \frac{um}{m-1}, \quad \mu \sim 0 \quad (1.10)$$

Значения нормальных перемещений свободной поверхности упругого основания должны непрерывно примыкать к заданному значению осадки штампа u на его ребре $\alpha = \alpha_0$ следуя асимптотическому разложению $u_y|_{y=0} \sim u + C \{ \sin(\alpha_0 - \alpha) \}^{1/2}$, $\alpha \sim \alpha_0 - 0$. Отсюда можно вывести, что при $\mu \rightarrow \infty$ поведение функции $Y^+(\mu)$ описывается асимптотикой

$$Y^+(\mu) \sim C \mu^{s-1}, \quad \mu \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Re} \mu > 0 \quad (1.11)$$

Обращая по Фурье граничные значения нормальной производной функции ω , приходим к разложению вида

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \mu^2 \left\{ a_s(\mu) \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - s + \mu \right) + b_s(\mu) \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - s + \mu \right) \right\} \times \\ \times \sin \pi \mu \Gamma \left(\frac{1}{2} - s + \mu \right) P_{-\frac{1}{2}-s}^{-\mu}(\cos \alpha) d\mu = \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 0 & (0 \leq \alpha < \alpha_0) \\ -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha e^{s\beta}}{\sqrt{2} (\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha)^{3/2}} \frac{\partial \omega}{\partial y} \Big|_{\varphi=\pi} d\beta = \sigma(\alpha) \sin \alpha & (\alpha_0 < \alpha \leq \pi) \end{cases} \quad (1.12)$$

В этом разложении $\sigma(\alpha)$ — пока что неизвестная функция, определяющая контактное давление под штампом и удовлетворяющая условиям на ребрах штампа

$$\sigma(\alpha) \sim \frac{C}{\sqrt{\sin(\pi - \alpha)}}, \quad \alpha \sim \pi - 0; \quad \sigma(\alpha) \sim \frac{C}{\sqrt{\sin(\alpha - \alpha_0)}}, \quad \alpha \sim \alpha_0 + 0 \quad (1.13)$$

С использованием формул обращения [1] из (1.12) получаем соотношение

$$\begin{aligned} & \mu \sin \pi \mu \left\{ a_s(\mu) \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - s + \mu \right) + b_s(\mu) \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - s + \mu \right) \right\} = \\ & = \Gamma \left(\frac{1}{2} + s + \mu \right) \int_0^{\pi - \alpha_0} \sigma(\pi - \xi) P_{-\frac{1}{2} - s}^{-\mu}(\cos \xi) d\xi \end{aligned} \quad (1.14)$$

Анализируя с учетом (1.13) правую часть этого выражения заключаем, что его можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \mu \sin \pi \mu \left\{ a_s(\mu) \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - s + \mu \right) + b_s(\mu) \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - s + \mu \right) \right\} = \\ & = X_+(\mu) \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2} \right)^{-\mu} \end{aligned} \quad (1.15)$$

где $X_+(\mu)$ — некоторая регулярная в области $\operatorname{Re} \mu > -1/2$ функция, поведение на бесконечности которой описывается асимптотикой (1.11).

Отметим, что при выводе соотношений (1.9) и (1.15) на поле перемещений налагалось условие конечности, а на поле напряжений — условие интегрируемости в угловых точках штампа (при $\beta \rightarrow \pm\infty$). В силу этих требований функции $a_s(\mu)$, $b_s(\mu)$, а вместе с ними и функции $X_+(\mu)$ и $Y^+(\mu)$ оказываются регулярными в полосе $|\operatorname{Re} s| < 1/2$ комплексной плоскости s . Поэтому везде в дальнейшем будем полагать параметр s чисто мнимым.

Заменяя в (1.9) и (1.15) переменную μ на $-\mu$ и пользуясь четностью функций $a_s(\mu)$, $b_s(\mu)$ получаем еще два соотношения. Исключая из полученных соотношений, а также соотношений (1.9) и (1.15) функции $a_s(\mu)$ и $b_s(\mu)$, после несложных преобразований приходим к системе функциональных уравнений Винера — Хопфа, имеющей в матричной форме вид

$$\left\| \begin{array}{c} Y^+(\mu) \\ X_+(\mu) \end{array} \right\| = \frac{1}{\cos \pi(s + \mu)} \left\| \begin{array}{cc} -\cos \pi s \left(\operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2} \right)^{2\mu} - \cos \pi \mu & \\ \frac{\sin^2 \pi \mu}{\cos \pi \mu} & \cos \pi s \left(\operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2} \right)^{-2\mu} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} Y^+(-\mu) \\ X_+(-\mu) \end{array} \right\| \quad (1.16)$$

и справедливой в общей полосе регулярности $|\operatorname{Re} \mu| < 1/2$. При выводе этой системы введено обозначение $\vartheta_0 = \pi - \alpha_0$ для локального угла раствора, образованного ребрами штампа в точках взаимного пересечения.

2. Переходя к решению системы (1.16) отметим, что ее матрица $G(\mu)$ в явном виде не факторизуется. Однако элементы $G(\mu)$ являются мероморфными функциями, что позволяет свести решение системы (1.16) к решению некоторой эквивалентной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений [7]. Легко показать, что $G(-\mu) = G^{-1}(\mu)$ и уравнения системы (1.16) являются функционально зависимыми, поэтому для ее решения достаточно работать лишь

с одним из ее уравнений. При $0 < \vartheta_0 < \pi/2$ целесообразно решать второе уравнение полученной системы, а при $\pi/2 \leq \vartheta_0 < \pi$ — ее первое уравнение.

Вначале рассмотрим случай, когда $\pi/2 \leq \vartheta_0 < \pi$, и будем работать с первым уравнением системы (1.16), которое перепишем в виде

$$\frac{\cos \pi (s + \mu)}{\cos \pi \mu} Y^+(\mu) + \frac{\cos \pi s}{\cos \pi \mu} \left(\operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2} \right)^{2\mu} Y^+(-\mu) + X_+(-\mu) = 0 \quad (2.1)$$

Ключевым моментом решения этого функционального уравнения является факторизация его коэффициента

$$\cos \pi (s + \mu) / \cos \pi \mu = K_+(\mu) / K_-(\mu) \quad (2.2)$$

$$K_+(\mu) = \frac{\Gamma(1/2 + \mu)}{\Gamma(1/2 + s + \mu)}, \quad K_-(\mu) = \frac{\Gamma(1/2 - s - \mu)}{\Gamma(1/2 - \mu)}$$

где $K_+(\mu)$, $K_-(\mu)$ — функции, регулярные и не имеющие нулей в областях $\operatorname{Re} \mu > -1/2$ и $\operatorname{Re} \mu < 1/2$ соответственно. С учетом факторизации (2.2) функциональное уравнение (2.1) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} K_+(\mu) Y^+(\mu) + \frac{\sqrt{\pi}}{\mu} \frac{um}{m-1} + \frac{\cos \pi s}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\mu + k + 1/2} \left(\operatorname{ctg} \frac{\vartheta_0}{2} \right)^{1+2k} \times \\ \times K_-\left(-\frac{1}{2} - k\right) Y^+\left(\frac{1}{2} + k\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\mu} \frac{um}{m-1} - K_-(\mu) X_+(-\mu) - \frac{\cos \pi s}{\cos \pi \mu} \times \\ \times \left(\operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2} \right)^{2\mu} K_-(\mu) Y^+(-\mu) + \frac{\cos \pi s}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\mu + k + 1/2} \left(\operatorname{ctg} \frac{\vartheta_0}{2} \right)^{1+2k} K_-\left(-\frac{1}{2} - k\right) Y^+\left(\frac{1}{2} + k\right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Дополнительные слагаемые в обеих частях предыдущего уравнения выбраны таким образом, чтобы его левая и правая части были регулярными функциями в областях $\operatorname{Re} \mu > -1/2$ и $\operatorname{Re} \mu < 1/2$ соответственно.

На основании представлений (2.2) и асимптотики (1.11) заключаем, что обе части уравнения (2.3) убывают как $C\mu^{-1}$ при $\mu \rightarrow \infty$. Отсюда на основании теоремы Лиувилля получаем представление

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(1/2 + \mu)}{\Gamma(1/2 + s + \mu)} Y^+(\mu) = -\frac{\cos \pi s}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\mu + k + 1/2} \left(\operatorname{ctg} \frac{\vartheta_0}{2} \right)^{1+2k} \frac{\Gamma(1 - s + k)}{\Gamma(1 + k)} \times \\ \times Y^+\left(\frac{1}{2} + k\right) - \frac{\sqrt{\pi}}{\mu} \frac{um}{m-1} \end{aligned} \quad (2.4)$$

справедливое уже во всей комплексной плоскости μ .

Последовательно полагая в (2.4) $\mu = 1/2 + n$, $n = 0, 1, \dots$ и вводя неизвестные

$$\frac{\Gamma(1 - s + n)}{\Gamma(1 + n)} Y^+\left(\frac{1}{2} + n\right) = -\sqrt{\pi} \frac{um}{m-1} y_n \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (2.5)$$

приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(1 + n) \Gamma(1 + n)}{\Gamma(1 + s + n) \Gamma(1 - s + n)} y_n = -\frac{\cos \pi s}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1 + n + k} \left(\operatorname{ctg} \frac{\vartheta_0}{2} \right)^{1+2k} y_k + \frac{2}{1 + 2n} \\ (n = 0, 1, \dots) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Исследуем полученную систему на регулярность. Если $\pi/2 < \vartheta_0 < \pi$, то непосредственной проверкой убеждаемся, что система (2.6) является квази-вполне регулярной. Если же $\vartheta_0 = \pi/2$, то с помощью замены переменных $y_0 = z_0$, $\sqrt{n} y_n = z_n$, $n \geq 1$ эта система преобразуется к некоторой системе, являющейся квази-вполне регулярной с ограниченными в совокупности свободными членами.

Заметим, что представление (2.4) на основании свойств регулярности функции $Y^+(\mu)$ можно переписать в виде

$$\frac{\Gamma(1/2 + \mu)}{\Gamma(1/2 + s + \mu)} Y^+(\mu) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\cos \pi s}{\cos \pi \xi} \frac{\Gamma(1/2 - s + \xi)}{\Gamma(1/2 + \xi)} \left(\operatorname{ctg} \frac{\vartheta_0}{2}\right)^{2\xi} \frac{Y^+(\xi)}{\xi + \mu} d\xi - \frac{\sqrt{\pi}}{\mu} \frac{um}{m-1}, \quad \operatorname{Re} \mu > 0 \quad (2.7)$$

где путь интегрирования L проходит вдоль положительного направления мнимой оси, обходя справа точку $\mu = 0$. На основании свойств интеграла Коши заключаем, что функция $Y^+(\mu)$ необходимо имеет асимптотику (1.11). Отсюда следует, что ограниченное решение системы (2.6) должно иметь асимптотику

$$y_n \sim c_0(s)/n, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.8)$$

При этом можно показать, что равномерность асимптотического разложения (2.8) нарушается при $s \rightarrow \infty$.

Переходя к нерассмотренному случаю, когда $0 < \vartheta_0 < \pi/2$, отметим, что при этом второе уравнение функциональной системы (1.16) в рамках изложенного подхода может быть аналогично приведено к квази-вполне регулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned} x_0 \cos \pi s \left\{ \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2} \right) + \frac{\psi(1/2 + s) + \psi(1/2 - s)}{2} + \psi \left(\frac{1}{2} \right) - 2\psi(1) \right\} = \\ = - \left(\frac{\cos \pi s}{\pi} \right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2} \right)^{2k} \left\{ \frac{1 - 2k \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2} \right)}{k^2} x_{2k-1} + \frac{x_{2k}}{k} \right\} + 1 \\ A_n(s) x_{2n-1} = -\frac{x_0}{n} - \frac{\cos \pi s}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2} \right)^{2k} \times \\ \times \left\{ \frac{1 - 2(n+k) \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2} \right)}{(n+k)^2} x_{2k-1} + \frac{x_{2k}}{n+k} \right\} \\ A_n(s) x_{2n} = -B_n(s) x_{2n-1} - \frac{x_0}{n} - \frac{\cos \pi s}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2} \right)^{2k} \times \\ \times \left\{ \frac{2 - 2(n+k) \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2} \right)}{(n+k)^3} x_{2k-1} + \frac{x_{2k}}{(n+k)^2} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.9)$$

относительно неизвестных

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(1/2 - s + n) \Gamma(1/2 + n)}{\Gamma(n) \Gamma(1 + n)} X_+(n) = -\frac{(\pi)^{3/2}}{2} \frac{um}{m-1} x_{2n-1} \\ \frac{d}{d\mu} \left\{ \frac{\Gamma(1/2 - s + \mu) \Gamma(1/2 + \mu)}{\Gamma(\mu) \Gamma(1 + \mu)} X_+(\mu) \right\}_{\mu=n} = \frac{(\pi)^{3/2}}{2} \frac{um}{m-1} x_{2n} \quad (n = 1, 2, \dots) \\ \frac{X_+(0)}{\Gamma(1/2 + s)} = \frac{\pi^2}{2} \frac{um}{m-1} x_0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

В системе (2.9) $\psi(z)$ — логарифмическая производная гамма-функции, а также приняты следующие обозначения:

$$A_n(s) = \frac{\Gamma(1/2 + n) \Gamma(1/2 + n)}{\Gamma(1/2 + s + n) \Gamma(1/2 - s + n)} \left\{ \frac{\Gamma(n) \Gamma(1 + n)}{\Gamma(1/2 + n) \Gamma(1/2 + n)} \right\}^2$$

$$B_n(s) = \{\psi(1/2+s+n) + \psi(1/2-s+n) + 2\psi(1/2+n) - 2\psi(1+n) - 2\psi(n)\} A_n(s)$$

Отметим, что усложненность системы (2.9) по сравнению с системой линейных уравнений (2.6) обусловлена наличием двойных полюсов у коэффициентов второго уравнения функциональной системы (1.16).

Для того, чтобы исследовать функциональную зависимость решений систем (2.6), (2.9) от параметра s , в дальнейшем уже не будем считать s чисто мнимым. Функции $y_n(s)$ и $x_n(s)$, определяемые первоначально как решения систем (2.6) и (2.9) соответственно при $\text{Re } s = 0$, можно аналитически продолжить с мнимой оси во всю комплексную плоскость s . В силу регулярности коэффициентов систем (2.6) и (2.9), их решения являются четными мероморфными функциями, полюса которых совпадают с нулями определителей матриц вышеуказанных систем. Эти полюса определяют однородные решения исходной задачи — нетривиальные решения уравнения Лапласа, удовлетворяющие однородным краевым условиям (1.4) и остающиеся ограниченными на ребрах штампа. Информация о расположении полюсов функций $y_n(s)$ и $x_n(s)$ позволяет вычислить внешний интеграл в представлении (1.5) с помощью теории вычетов и тем самым определить локальную особенность напряженного состояния вблизи угловых точек штампа.

3. Анализ напряженного состояния упругого полупространства проведем для случая, когда $\pi/2 \leq \vartheta_0 < \pi$ ($0 < \alpha_0 \leq \pi/2$). Запишем выражение для контактных напряжений, действующих под штампом

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_y}{2G} \Big|_{\varphi=\pi} &= \sqrt{2} \frac{(\text{ch } \beta - \cos \alpha)^{3/2}}{\sin \alpha} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-s\beta} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \mu \text{tg } \pi\mu Y^+(\mu) \Gamma\left(\frac{1}{2} - s + \mu\right) \left(\text{tg } \frac{\alpha_0}{2}\right)^\mu P_{-1/2-s}^{-\mu}(-\cos \alpha) d\mu \right\} ds \\ &(\alpha_0 < \alpha < \pi) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Вычисляя в (3.1) внутренний интеграл путем замыкания контура интегрирования в области $\text{Re } \mu > 0$ и суммирования вычетов подынтегрального выражения в полюсах функции $\text{tg } \pi\mu$, расположенных правее мнимой оси, с учетом (2.5) получаем выражение

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_y}{2G} \Big|_{\varphi=\pi} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{um}{m-1} \frac{(\text{ch } \beta - \cos \alpha)^{3/2}}{\sin \alpha} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-s\beta} \times \\ &\times \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} y_n(s) \left(\frac{1}{2} + n\right) \Gamma(1+n) \left(\text{tg } \frac{\alpha_0}{2}\right)^{1/2+n} P_{-1/2-s}^{-1/2-n}(-\cos \alpha) \right\} ds \quad (\alpha_0 < \alpha < \pi) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Анализируя это представление с учетом (2.8), можно в явном виде записать асимптотику контактных напряжений вблизи границ штампа.

$$\frac{m-1}{m} \frac{\sigma_y}{2G} \Big|_{\varphi=\pi} \sim -u \frac{K(\beta)}{\sqrt{2\pi r}} + O(r), \quad r \sim 0 \quad (3.3)$$

где под r понимаем расстояние до неугловых точек на ребрах штампа. В качестве примера приведем выражение для коэффициента $K(\beta)$ при корневой особенности в формуле (3.3) на ребре штампа $\alpha = \pi$:

$$K(\beta) = \left(\frac{2}{\pi} \text{tg } \frac{\alpha_0}{2}\right)^{1/2} (\text{ch } \beta + 1) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-s\beta} y_0(s) ds \quad (3.4)$$

Вычисляя интеграл в представлении (3.2) с помощью теории вычетов и оставляя только слагаемые, соответствующие ближайшим к мнимой оси полюсам $\pm s_1$ функций $y_n(s)$ (как показывают численные расчеты, эти полюса являются

ϑ_0/π	γ	ϑ_0/π	γ
0,00	-1,00000	0,55	-0,68600
0,05	-0,87340	0,60	-0,66819
0,10	-0,84681	0,65	-0,64987
0,15	-0,82546	0,70	-0,63097
0,20	-0,80638	0,75	-0,61138
0,25	-0,78847	0,80	-0,59102
0,30	-0,77121	0,85	-0,56980
0,35	-0,75427	0,90	-0,54762
0,40	-0,73742	0,95	-0,52439
0,45	-0,72052	1,00	-0,50000
0,50	-0,70338		

простыми и вещественными, находим главный член асимптотического разложения контактных напряжений вблизи угловых точек штампа

$$\frac{m-1}{m} \frac{\sigma_y}{2G} \Big|_{\varphi=\pi} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{u}{\sin \alpha} \exp \mp \left(s_1 - \frac{3}{2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + n \right) \Gamma(1+n) \times$$

$$\times \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2} \right)^{1/2+n} P_{-1/2-s_1}^{-1/2-n}(-\cos \alpha) \operatorname{res}_{s=s_1} y_n(s), \quad \beta \sim \pm \infty \quad (\alpha_0 < \alpha < \pi), \quad s_1 > 0 \quad (3.5)$$

Предыдущее выражение можно преобразовать к виду, позволяющему явно выделить особенность поля напряжений вблизи вершин штампа

$$\sigma \sim A\rho^\gamma, \quad \rho \sim 0 \quad (\gamma = s_1 - 3/2) \quad (3.6)$$

где ρ — расстояние до угловой точки штампа. Расчеты показывают, что величина γ является функцией угла раствора ϑ_0 границ штампа. Численно найденная зависимость показателя особенности γ от угла раствора ϑ_0 , изменяющегося на интервале $0 \leq \vartheta_0 \leq \pi$, реализуемом в рассматриваемой задаче, приведена в таблице. Таким образом, напряженное состояние вблизи угловых точек штампа является существенно трехмерным.

4. Задавшись целью исследовать распределение контактных напряжений в центральной части штампа ($\beta \sim 0$) отметим, что возможность использования для этих целей интегрального представления (3.2) существенно зависит от знания асимптотического поведения функций $y_n(s)$ при $s \rightarrow \infty$. Однако определение асимптотики этих функций на основании анализа бесконечной системы (2.6) является довольно сложной задачей. В связи с этим, рассмотрим следующий подход к решению функциональной системы (1.16). Для штампа с тупым углом при вершине ($\vartheta_0 \in [\pi/2, \pi)$), неизвестную функцию $Y^+(\mu)$ с учетом факторизации (2.2) разыскиваем в интегральной форме

$$K_+(\mu) Y^+(\mu) = -\sqrt{\pi} \frac{um}{m-1} \left\{ \frac{1}{\mu} + a^{-\mu} \int_0^a \xi^{\mu-1/2} g_s(\xi) d\xi \right\} \quad (4.1)$$

где $g_s(\xi)$ — некоторая непрерывная на интервале $[0, a]$ функция, $a = \operatorname{ctg}(\vartheta_0/2)$ ($a \in (0, 1)$). При таком выборе функции $Y^+(\mu)$, все налагаемые на нее условия будут выполнены. Тогда первое уравнение функциональной системы (1.16) можно переписать следующим образом:

$$\frac{a^\mu}{\mu} + \int_0^a \xi^{\mu-1/2} g_s(\xi) d\xi = -\frac{\cos \pi s}{\cos \pi \mu} \frac{K_-(\mu)}{K_+(-\mu)} \left\{ -\frac{a^{-\mu}}{\mu} + \int_0^a \xi^{-\mu-1/2} g_s(\xi) d\xi \right\} +$$

$$+ \frac{a^{\mu}}{\sqrt{\pi}} \frac{m-1}{um} K_{-}(\mu) X_{+}(-\mu) = 0 \quad (4.2)$$

Умножим обе части этого уравнения на $x^{-\mu-1/2}/2\pi i$ ($x \in [0, a]$) и проинтегрируем по переменной μ вдоль положительного направления мнимой оси. В результате, опуская промежуточные выкладки, связанные с заменой порядка интегрирования и вычислением контурных интегралов, приходим к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с симметричным ядром

$$g_s(x) + \frac{\cos \pi s}{\pi} \int_0^a g_s(\xi) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+s+n)\Gamma(1-s+n)}{\Gamma(1+n)\Gamma(1+n)} (-x\xi)^n \right\} d\xi =$$

$$= \sqrt{a} \frac{\cos \pi s}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+s+n)\Gamma(1-s+n)}{\Gamma(1+n)\Gamma(1+n)} \frac{2}{1+2n} (-ax)^n \quad (4.3)$$

С использованием теории гипергеометрических функций ядро полученного уравнения удастся свернуть, что позволяет переписать (4.3) в удобной для дальнейшего анализа форме

$$g_s(x) + s \operatorname{ctg} \pi s \int_0^a g_s(\xi) F(1+s, 1-s, 1; -x\xi) d\xi =$$

$$= -s \operatorname{ctg} \pi s \int_0^a \xi^{-1/2} F(1+s, 1-s, 1; -x\xi) d\xi, \quad x \in [0, a] \quad (4.4)$$

При этом ядро интегрального уравнения (4.4) допускает простое представление в виде комбинации функций Лежандра [6]:

$$F(1-s, 1+s, 1; -x\xi) = \frac{1}{2(1+x\xi)} \{ P_+(1+2x\xi) + P_-(1+2x\xi) \} \quad (4.5)$$

Анализ уравнения (4.4), основанный на использовании асимптотики функций Лежандра $P_s(x)$ при больших значениях индекса s [6], позволяет определить асимптотическое поведение функции $g_s(x)$ при $s \rightarrow \infty$:

$$g_s(x) = O(1), \quad s \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Re} s = 0 \quad (4.6)$$

Данная оценка является равномерно пригодной для всех $x \in [0, a]$.

Для случая штампа с острым углом при вершине ($\vartheta_0 \in (0, \pi/2)$), второе уравнение функциональной системы (1.16) также может быть сведено к некоторому интегральному уравнению Фредгольма второго рода, ядро которого не вычисляется в явном виде, а имеет сложное интегральное представление. В связи с этим, для случая $\vartheta_0 \in (0, \pi/2)$ функциональную систему (1.16) целесообразно решать путем сведения к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (2.9).

5. Запишем выражения для компонент поля напряжений в упругом полупространстве, на которое действует штамп в форме кругового сектора с тупым углом при вершине ($\vartheta_0 \in [\pi/2, \pi)$). Контактные напряжения, действующие под штампом, вычисляем на основании интегрального представления (3.1). Вычисляя в (3.1) внутренний интеграл с помощью теории вычетов и удерживая только вычет в простом полюсе, расположенном в точке $\mu = 1/2$, получаем интегральное представление для коэффициента $K(\beta)$ при корневой особенности поля напряжений в формуле (3.3) на плоском ребре штампа $\alpha = \pi$:

$$K(\beta) = \sqrt{2\pi} (\operatorname{ch} \beta + 1) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-s\beta} \frac{g_s(0)}{\cos \pi s} ds, \quad -\infty < \beta < \infty \quad (5.1)$$

Для того, чтобы получить корневую особенность поля напряжений на

криволинейном ребре штампа $\alpha = \alpha_0$, воспользуемся асимптотикой функции $Y^+(\mu)$, полученной на основании представления (4.1):

$$Y^+(\mu) \sim -\sqrt{\pi} \frac{im}{m-1} \frac{\Gamma(1/2+s+\mu)}{\Gamma(1/2+\mu)} \frac{1+g_s(a)}{\mu}, \quad \mu \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Re} \mu > 0 \quad (5.2)$$

а также интегральным представлением для функций Лежандра [6]:

$$P_{-1/2-s}^{-\mu}(-\cos \alpha) = \frac{2^\mu}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1/2+\mu)}{\Gamma(1/2+s+\mu)} \cdot \frac{(\sin \alpha)^\mu}{\Gamma(1/2-s+\mu)} \int_0^\infty (1-2t \cos \alpha + t^2)^{-\mu-1/2} t^{s+\mu-1/2} dt \quad (5.3)$$

Асимптотику внутреннего интеграла из (3.1) при $\alpha \sim \alpha_0 + 0$ находим с использованием леммы Ватсона [8] и учетом представлений (5.2), (5.3). В результате, опуская сложные промежуточные выкладки, получаем выражение для коэффициента $K(\beta)$ при корневой особенности поля напряжений на ребре штампа $\alpha = \alpha_0$:

$$K(\beta) = 2 \left(\frac{\pi}{\sin \alpha_0} \right)^{1/2} (\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha_0) \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\beta} \frac{1+g_s(a)}{\sin \pi s} ds, \quad -\infty < \beta < \infty \quad (5.4)$$

В силу (4.6) несобственные интегралы в представлениях (5.1) и (5.4) сходятся и могут быть эффективно найдены численно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Парфененко Д. Н., Улитко А. Ф. Об одном новом интегральном преобразовании и использовании его в контактных задачах теории упругости // Докл. АН УССР. Сер. А. 1988. № 11. С. 53—58.
2. Лебедев Н. Н., Скальская И. П. Интегральные разложения, родственные преобразованиям Мелера — Фока // Диф. уравнения. 1986. Т. 22. № 9. С. 1515—1523.
3. Лебедев Н. Н., Скальская И. П. Распределение электричества на тонкой проводящей пластине, имеющей форму произвольной круговой луночки // ЖТФ. 1986. Т. 56. № 3. С. 433—443.
4. Улитко А. Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наук. думка, 1979. 280 с.
5. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.: Физматгиз, 1963. 358 с.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1965. 292 с.
7. Нобл Б. Метод Винера — Хопфа. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 280 с.
8. Эрдейи А. Асимптотические разложения. М.: Физматгиз, 1962. 127 с.

Киев

Поступила в редакцию
28. II. 1992